УДК 517.95

©2009. **Е.В. Кириченко**

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ШАРЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе содержится один из результатов, полученных автором при исследовании вопросов существования решения задачи Дирихле в шаре для неоднородного ультрагиперболического уравнения с полиномиальной правой частью. Указан алгоритм построения формального решения, основанный на аппарате сферических функций и теории гипергеометрического уравнения Гаусса. Однако, доказательство гладкости упомянутого решения представляется затруднительным на данном этапе. Это вызвано тем, что каждый последующий член ряда, выражающего решение, может быть получен из предыдущего с помощью громоздких рекуррентных соотношений.

Рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

в n-мерном шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 - x^2 > 0\}$ для следующего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{k+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = f, \tag{2}$$

полагая, что функция f в правой части (2) является полиномом. Здесь $0 < k < n$, $a \in \mathbb{C}$.

Будем раскладывать искомую функцию u и известную функцию f в ряд по сферическим гармоникам, используя рассуждения, приводимые в работе [1]. При этом соответствующие разложения будут иметь следующий вид:

$$u(x', x'') = \sum_{\widetilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} u_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R'') S_{\widetilde{l}}^{i}(\tau') S_{l}^{j}(\tau''),$$

$$f(x', x'') = \sum_{\widetilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} f_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R'') S_{\widetilde{l}}^{i}(\tau') S_{l}^{j}(\tau'').$$

Отметим, что $\tau' = \frac{x'}{|x'|}$, $\tau'' = \frac{x''}{|x''|}$, $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Кроме того, сферические функции порядков i и j разложены по базисам $\{S_{\widetilde{l}}^{i}\}_{\widetilde{l}=1}^{L_i}$, $\{S_{l}^{j}\}_{l=1}^{L_j}$.

После подстановки указанных разложений в уравнение (2) и приравнивания коэффициентов Фурье $u_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R'')$, $f_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R'')$ при одинаковых базисных сферических функциях приходим к равенству

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'}\frac{\partial}{\partial R'} + \frac{I_i}{R'^2} - {} \right.$$
$$\left. - a^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial R''^2} + \frac{n-k-1}{R''}\frac{\partial}{\partial R''} + \frac{J_j}{R''^2}\right\}\right] u_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R'') = f_{\widetilde{l}l}^{ij}(R', R''),$$

которое можно записать несколько иначе:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial R'^2}+\frac{k-1}{R'}\frac{\partial}{\partial R'}+\frac{\partial^2}{\partial(-\frac{R''^2}{a^2})}+\frac{n-k-1}{(-\frac{R''}{a})}\frac{\partial}{\partial(-\frac{R''}{a})}+ \\ +\frac{I_i}{R'^2}+\frac{J_j}{(-\frac{R''^2}{a^2})}\Big]u^{ij}_{\tilde{l}l}(R',R'')=f^{ij}_{\tilde{l}l}(R',R''), \tag{3}$$

где $I_i=-i(i+k-2)$, $J_j=-j(j+n-k-2)$. При переходе к сферическим координатам условие Дирихле (1) преобразуется к виду:

$$u|_{R'^2+R''^2=1}=0,$$

откуда $u=(R'^2+R''^2-1)\tilde{u}$ (в силу теоремы Безу [2]). Таким образом,

$$u^{ij}_{\tilde{l}l}(R',R'')=(R'^2+R''^2-1)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l}(R',R'').$$

Теперь, положив $\widetilde{R}''^2=-\frac{R''^2}{a^2}$, что влечет $R''^2=-a^2\widetilde{R}''^2$, будем иметь:

$$u^{ij}_{\tilde{l}l}(R',R'')=(R'^2-a^2\widetilde{R}''^2-1)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l}(R',\widetilde{R}'').$$

Следовательно, равенство (3) приобретает вид:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial R'^2}+\frac{k-1}{R'}\frac{\partial}{\partial R'}+\frac{I_i}{R'^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{R}''^2}+ \\ +\frac{n-k-1}{\widetilde{R}''}\cdot\frac{\partial}{\partial\widetilde{R}''}+\frac{J_j}{\widetilde{R}''^2}\Big](R'^2-a^2\widetilde{R}''^2-1)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l}(R',\widetilde{R}'')=f^{ij}_{\tilde{l}l}(R',\widetilde{R}''). \tag{4}$$

Далее, переходя к полярным координатам (ρ,φ): $R'=\rho\cos\varphi$, $\widetilde{R}''=\rho\sin\varphi$, получим из выражения (4) следующее равенство:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\big(\frac{n-k-1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\varphi-\frac{k-1}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi\big)\frac{\partial}{\partial\varphi}+ \\ +\frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\Big]\big[(\rho^2\cos^2\varphi-a^2\rho^2\sin^2\varphi-1)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l}(\rho,\varphi)\big]=f^{ij}_{\tilde{l}l}(\rho,\varphi). \tag{5}$$

Выполнив разложение функций $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l}(\rho,\varphi)$ и $f^{ij}_{\tilde{l}l}(\rho,\varphi)$ по степеням ρ и подставив полученное в (5), для старшей степени однородности m будем иметь:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\big(\frac{n-k-1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\varphi-\frac{k-1}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi\big)\frac{\partial}{\partial\varphi}+ \\ +\frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\Big]\big\{\rho^{2+m}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\big\}=\rho^m f^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi), \tag{6}$$

где $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ и $f^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ – тригонометрические полиномы от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Исходя из того, что

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\varphi-\frac{k-1}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}+ \\ +\frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\Big]\{\rho^{2+m}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\}= \\ =\rho^m\big[(\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m})''(\varphi)+((n-k-1)\operatorname{ctg}\varphi-(k-1)\operatorname{tg}\varphi)(\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m})'(\varphi)+ \\ +\big((m+2)(m+n)+\frac{I_i}{\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\sin^2\varphi}\big)\,\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\big],$$

равенство (6) после деления на ρ^m становится обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка, а именно:

$$(\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m})''(\varphi)+((n-k-1)\operatorname{ctg}\varphi-(k-1)\operatorname{tg}\varphi)(\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m})'(\varphi)+ \\ +\big((m+2)(m+n)+\frac{I_i}{\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\sin^2\varphi}\big)\,\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)=f^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi). \tag{7}$$

При этом соответствующее однородное уравнение $(7)_0$ приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$y(1-y)\frac{d^2w}{dy^2}+\big[C-(A+B+1)y\big]\frac{dw}{dy}-ABw=0$$

так, как это показано в работе [3]. Более того, в данной работе найдены и описаны все решения гипергеометрического уравнения. Его исследование сводится к детальному анализу так называемого вырожденного случая, при котором решение может быть выражено через какие-либо два из 24 рядов Куммера (см. [4]).

Рассмотрим для определенности случай 1) утверждения 2.1 работы [3]. В этой ситуации одним из решений гипергеометрического уравнения является функция

$$w(y)=F(1-\frac{m+i+j+n}{2},2+\frac{m-i-j}{2},2-i-\frac{k}{2},y),$$

но тогда функция

$$Z(y)=y^{\frac12(2-i-k)}(y-1)^{\frac12(2-j-n+k)}\times \\ \times F(1-\frac{m+i+j+n}{2},2+\frac{m-i-j}{2},2-i-\frac{k}{2},y)$$

будет решением дифференциального уравнения

$$y^2(1-y)^2Z''-\frac12 y(1-y)(ny-k)Z'+\frac14\big[I_i+((m+2)(m+n)- \\ -I_i+J_j)y-(m+2)(m+n)y^2\big]Z=0.$$

Отсюда заключаем, что решение однородного дифференциального уравнения $(7)_0$ может быть записано в виде:

$$\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) = (\cos\varphi)^{2-i-k}(\sin\varphi)^{2-j-n+k}\times \\ \times F\left(1-\frac{m+i+j+n}{2}, 2+\frac{m-i-j}{2}, 2-i-\frac{k}{2}, \cos^2\varphi\right).$$

Возвращаясь к неоднородному уравнению (7), сделаем в нем подстановку

$$\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi) = \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)\cdot v(\varphi),$$

где $\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)$ – найденное выше ненулевое решение уравнения $(7)_0$, тогда, следуя книге [5], будем иметь:

$$v''(\varphi) + \left(\frac{2(\tilde{u}_m^{(0)})'}{\tilde{u}_m^{(0)}} + (n-k-1)\operatorname{ctg}\varphi - (k-1)\operatorname{tg}\varphi\right)\cdot v'(\varphi) = \frac{f_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)}{\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)}.$$

Отметим, что последнее уравнение допускает понижение порядка и сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Как показано в книге [5], общее решение уравнения (7) выражается следующим образом:

$$\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi) = c_1\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) + c_2\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E(\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi))^2} + \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)\times \\ \times\int\frac{1}{E(\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi))^2}\left(\int E\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)f_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)d\varphi\right)d\varphi. \tag{8}$$

В равенстве (8) c_1, c_2 – произвольные постоянные,

$$E = \exp\int[(n-k-1)\operatorname{ctg}\varphi - (k-1)\operatorname{tg}\varphi]d\varphi = (\sin\varphi)^{n-k-1}(\cos\varphi)^{k-1}.$$

Обратимся снова к уравнению (5). Тогда, обозначив оператор

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \\ + \left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{k-1}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi},$$

из (5) для следующей степени однородности $m-2$ получим соотношение

$$\mathcal{L}(\rho^m\tilde{u}_{\tilde{l}l_{m-2}}^{ij}(\varphi)) - \mathcal{L}(\rho^m\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)) = \rho^{m-2}f_{\tilde{l}l_{m-2}}^{ij}(\varphi).$$

Отсюда

$$\mathcal{L}\{\rho^m(\tilde{u}_{\tilde{l}l_{m-2}}^{ij}(\varphi) - \tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi))\} = \rho^{m-2}f_{\tilde{l}l_{m-2}}^{ij}(\varphi),$$

что равносильно равенству

$$\rho^{m-2}\tilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)[\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)-\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)]=\rho^{m-2}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi), \tag{9}$$

где

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\big((n-k-1)\operatorname{ctg}\varphi-(k-1)\operatorname{tg}\varphi\big)\frac{\partial}{\partial\varphi}+$$
$$+(m+2)(m+n)+\frac{I_i}{\cos^2\varphi}+\frac{J_j}{\sin^2\varphi}.$$

Разделив обе части равенства (9) на ρ^{m-2} и избавившись тем самым от одной из двух переменных, получим уравнение относительно неизвестной функции $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)$:

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)=\mathcal{Q}(\varphi)+f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi). \tag{10}$$

Здесь $\mathcal{Q}(\varphi)=\tilde{\mathcal{L}}\big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\big)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ – результат действия оператора $\tilde{\mathcal{L}}\big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\big)$ на найденное выше решение $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ уравнения (7).

Исследование полученного дифференциального уравнения второго порядка (10) подобно исследованию уравнения (7). Сначала рассматривается соответствующее однородное уравнение и находится одно из его нетривиальных решений $\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)$. Затем с помощью подстановки, описанной в книге [5] на с. 144, можно перейти от уравнения (10) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. При этом искомое общее решение уравнения (10) будет иметь вид:

$$\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)=c_3\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)+c_4\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi))^2}+\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\times$$
$$\times\int\frac{1}{E(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi))^2}\left(\int E\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)[f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)+\mathcal{Q}(\varphi)]d\varphi\right)d\varphi. \tag{11}$$

Продолжая анализ уравнения (5), в котором неизвестная функция и правая часть разложены в ряд по степеням ρ, на следующем шаге будем иметь соотношение для степени однородности $m-4$:

$$\mathcal{L}(\rho^{m-2}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi))-\mathcal{L}(\rho^{m-2}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi))=\rho^{m-4}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi).$$

После деления на ρ^{m-4} последнее уравнение становится уравнением, зависящим от одной переменной, и процедура нахождения его решения $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)$ такая же, как при рассмотрении уравнений (7) и (10). Следовательно,

$$\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)=c_5\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)+c_6\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi))^2}+\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\times$$
$$\times\int\frac{1}{E(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi))^2}\left(\int E\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)[f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)+\tilde{\mathcal{L}}(\frac{\partial}{\partial\varphi})\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)]d\varphi\right)d\varphi.$$

Таким образом, постепенно выводя из уравнения (5) соотношения, связывающие различные степени однородности искомой функции и правой части, начиная со старшей степени, мы приходим к конечному набору уравнений, из которых определяются компоненты разложения решения задачи (1) для уравнения (2). Тем самым будет указан процесс построения формального решения первой краевой задачи для неоднородного ультрагиперболического уравнения в единичном шаре. В результате получим ряд, каждый последующий член которого может быть выражен через предыдущий посредством достаточно громоздких рекуррентных соотношений.

1. *Бурский В.П., Кириченко Е.В.* Однозначная разрешимость задачи Дирихле в шаре для ультрагиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т.44, №4. – С.467-479.
2. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры – М.: Наука, 1968. – 431с.
3. *Кириченко Е.В.* О решении дифференциального уравнения, возникающего в задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре // Труды ИПММ НАНУ. – 2005. – Т.10. – С.59-71.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука. – 1965.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям – М: Наука, 1971. – 576с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ekirichenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 27.03.09