УДК 62-50 + 517.91

©2016. **А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный**

СИНХРОНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Исследована задача синхронизации по выходу двух динамических систем одинаковой структуры. Показано, что эта задача может быть сведена к задаче стабилизации по части переменных или к задаче построения управляющего воздействия, обеспечивающего асимптотическую устойчивость некоторого инвариантного множества объединенной системы. Рассмотрены особенности, возникающие при решении данной задачи в классе импульсных управлений. В качестве примера использована система Чуа, для которой построены синхронизирующие импульсные управления.
Ключевые слова: *задача синхронизации, импульсное управление, система Чуа.*

Введение. Ключевая идея целого ряда современных методов защиты информации в телекоммуникационных технологиях, которые основаны на динамических системах с хаотическими траекториями, состоит в том, что сигнал сообщения маскируется и модулируется с помощью некоторых функций от фазовых переменных передающей системы. Передающее устройство содержит аналогичную хаотическую систему, которая используется для расшифровки. Впервые подобная схема кодирования в задачах передачи информации была предложена в работе [1]. Поскольку начальные условия передающей и принимающей системы могут различаться, а для хаотических систем даже незначительное возмущение в начальных данных может приводить к существенным изменениям траектории, возникает потребность в построении управления с обратной связью по выходу, которое обеспечит, по крайней мере, асимптотическое сближение траекторий систем. Таким образом, задача синхронизации двух систем, имеющих одинаковую структуру, с помощью управления, которое вводится в принимающей системе, является актуальной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим передающую систему, которая описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$y = h(x), \tag{2}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор передатчика, $y \in R^m$ – выход системы, x_0 – начальные значения фазовых переменных, которые заранее неизвестны.

Вектор y передается через канал связи на принимающее устройство, динамика которого описывается системой

$$\dot{z} = F(z, y, u), \quad z(0) = z_0, \tag{3}$$

где $z \in R^n$ – фазовый вектор приемника, управление $u = u(z, y)$, зависящее лишь от фазового вектора принимающей и выхода передающей системы, предназначено для обеспечения подстройки параметров системы (1).

Задача синхронизации систем (1), (2) и (3) может быть сформулирована следующим образом. Требуется построить управление $u(z, y)$ таким образом, что, каковы бы ни были начальные значения $x_0, z_0 \in R^n$, для решений $x(t)$ системы (1) и $z(t)$ системы (3) при всех $t > 0$ выполнялось условие $\|z(t)-$ $-x(t)\| \le K(\|z_0 - x_0\|)$, где K – функция класса Хана, и при этом $\lim\limits_{t \to +\infty} \|z(t)-$ $-x(t)\| = 0$.

В инженерных приложениях требуют, как правило, большего. Требуют, чтобы для заданного уровня затухания $d < 1$ существовало время установления T такое, что для любого момента времени $t > T$ выполняется условие $\|z(t) - x(t)\| \le d\|z_0 - x_0\|$.

Без ограничения общности можно считать, что $d = 1/2$. Тогда при выполнении указанного свойства со временем установления $T_{1/2}$ для любого другого меньшего уровня затухания d время установления можно будет выразить формулой $T_d = -T_{1/2} \log_2 d$.

Предполагается, что система (3) имеет схожую с системой (1) структуру и при попадании на траекторию системы (1) в дальнейшем двигается вдоль нее, т. е.

$$F(z, h(z), u(z, h(z))) \equiv f(z). \tag{4}$$

Выполнив замену переменных $\tilde{u}(z, y) = u(z, y) - u(z, h(z))$, можно добиться того, что соответствующий режим синхронного движения будет обеспечиваться нулевым управлением. Переобозначив введенное таким образом управление снова буквой u и заменив соответствующим образом функцию F, можно условие (4) переписать в виде

$$u(z, h(z)) \equiv 0, \quad F(z, h(z), 0) \equiv f(z). \tag{5}$$

Условия (5) обеспечивают инвариантность множества, задаваемого соотношениями $z = x$, при $u \equiv 0$.

Таким образом, задача синхронизации систем (1), (2) и (3) сводится к задаче о построении управления, обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость инвариантного множества $z = x$.

Также эту задачу можно свести к задаче стабилизации системы ошибок. Для этого введем вектор ошибок $e = z - x$, который характеризует отклонение фазовых координат системы (3) от фазовых координат системы (1). Изменение этого вектора со временем описывается системой

$$\dot{e} = \tilde{F}(e, z, u), \tag{6}$$

где $\tilde{F}(e, z, u) = F(z, h(z - e), u) - f(z - e)$.

Можно убедиться в том, что при условиях (5) система (6) имеет нулевое решение $e \equiv 0$ (при управлении $u \equiv 0$). Таким образом, задача синхронизации систем (1), (2) и (3) эквивалентна задаче стабилизации системы, состоящей из уравнений (3) и (6), по части переменных e. Важно отметить, что переменные e не являются наблюдаемыми (или наблюдаемой может быть часть из них), в связи с чем управление u должно зависеть лишь от переменных z и $y = h(z - e)$.

2. Имульсное управление в задачах синхронизации. Импульсные управления в линейной теории управления были впервые использованы в работе [2]. Их возникновение было связано с тем, что при некоторых определениях интенсивности управления (целевого функционала) оптимальное управление не существовало в классе ограниченных измеримых функций, в связи с чем потребовалось введение обобщенных (импульсных) управлений. Несмотря на то, что расширение класса допустимых управлений за счет включения импульсных воздействий не позволило расширить классы управляемых или стабилизируемых линейных систем управления, введение новых управлений привлекло внимание многих исследователей. Благодаря чему была построена общая теория систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями [3, 4], предложена общая форма записи таких систем и разработан аппарат для анализа их устойчивости.

При использовании импульсных управлений система (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{z} &= F(z,y,u), \quad \text{при } (z,y,t) \notin S, \\ \Delta z &= G(z,y,\Delta U), \quad \text{при } (z,y,t) \in S, \\ z(0) &= z_0. \end{cases} \tag{7}$$

Функция скачков G при этом, как правило, не является произвольной, а вычисляется по функции F как предел реакции системы (3) на последовательность измеримых управлений, приближающих импульсное воздействие в фиксированный момент времени. Для некоторых достаточно общих классов и импульсных воздействий различных степеней и порядков выражения для функции G были получены в работе [5].

Полученная система (7) обладает более богатой динамикой, поскольку может иметь даже разрывные траектории. При решении задачи синхронизации могут выбираться подходящим образом не только управления u и ΔU, но и поверхность S в расширенном пространстве наблюдаемых переменных.

Важное значение имеют следующие частные случаи:

1. $S = \{p(z,y) = 0\}$. В этом случае скачки системы задаются на поверхности в пространстве наблюдаемых переменных, что обеспечивает автономность заданной системы, а, значит, и независимость траекторий от выбора начального момента времени.

2. $S = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \{t = \tau_i\}$, где $\{\tau_i\}$ – неограниченно возрастающая последовательность моментов времени, в которые траектория системы терпит разрывы. В этом случае имеем систему с фиксированными моментами импульсных воздействий, которые наиболее полно изучены в литературе по устойчивости импульсных систем.

3. $\Delta U \equiv 0$. Случай, когда сам объект имеет разрывные траектории и при этом используются обычные непрерывные управления. Этот случай вырождается в случай с классическим управлением (3), если функция G

вычисляется по функции F, поскольку при этом имеет место $G(z, y, 0) \equiv \equiv 0$. Однако, если функция G строилась из иных соображений, данный случай может представлять интерес.

4. $u \equiv 0$. Случай чисто импульсного управления. В этом случае система до достижения ею некоторого множества S не подвергается управляющему воздействию, а при достижении – импульсным воздействием мгновенно перебрасывается в другое положение. Такой подход может обеспечивать минимальное время работы управляющего устройства, однако может потребовать использования сигналов большой интенсивности.

3. Метод решения задачи синхронизации. Для решения задачи синхронизации систем (1), (2) и (3) воспользуемся методом функций Ляпунова. Поскольку задача синхронизации эквивалентна задаче стабилизации этой системы по переменным e, подберем некоторую функцию $V(e, z)$ таким образом, чтобы выполнялось:

- $V(0, z) = 0$ при любом z;
- $V(e, z) > 0$ при любых z и $e \neq 0$.

Вычислим производную этой функции в силу системы (3), (6)

$$\dot{V}(e, z, u) = \frac{\partial V}{\partial e} F(z, h(z-e), u) + \frac{\partial V}{\partial z} \tilde{F}(e, z, u).$$

Выберем некоторую функцию K класса Хана в R^n. Определим u для заданных значений z и y таким образом, чтобы максимальное из значений отношения $\dot{V}/K(\|e\|)$ на множестве $y = h(z-e)$ было минимально возможным

$$\dot{V}(e, z, u(y, z))/K(\|e\|) = \inf_{w} \sup_{y=h(z-e)} \dot{V}(e, z, w)/K(\|e\|).$$

Если при этом окажется, что функция $\dot{V}$ отрицательно определена по e, то построенное таким образом управление будет решать задачу синхронизации.

В импульсном случае описанная выше схема применяется всюду, за исключением множества S, а на множестве S она применяется для функции ΔV

$$\Delta V(e, z, \Delta U) = V(e + \tilde{G}(e, z, \Delta U), z + G(e, z, \Delta U)) - V(e, z).$$

4. Система Чуа. Рассмотрим электрическую цепь, предложенную в работе [6] и изображенную на рис. 1. Введем следующие обозначения: v_1, v_2 – разности потенциалов на обкладках конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 соответственно, i_3 – сила тока на участке цепи с катушкой индуктивности L и источником тока.

Уравнения, которые описывают изменение состояния контура Чуа со временем, имеют вид

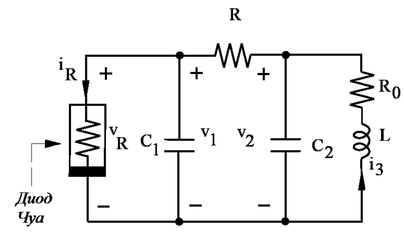

Рис. 1. Электрический колебательный контур Чуа.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dv_1}{dt} & = & \dfrac{1}{C_1}\left[G(v_2 - v_1) - f(v_1)\right], \\ \dfrac{dv_2}{dt} & = & \dfrac{1}{C_2}\left[G(v_1 - v_2) + i_3\right], \\ \dfrac{i_3}{dt} & = & \dfrac{1}{L}\left[-v_2 - R_0 i_3\right]. \end{array}\right. \tag{8}$$

Член $R_0 i_3$ добавлен в последнее уравнение, чтобы учесть малое сопротивление источника тока. Здесь $G = R^{-1}$, а $f(v)$ – вольт-амперная характеристика диода Чуа, которая выражается формулой

$$f(v) = G_b v + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v + E| - |v - E|),$$

где G_a и G_b – отрицательные постоянные, удовлетворяющие неравенству $G_a < G_b < 0$.

Выполнив замену переменных $v_1 = Ex$, $v_2 = Ey$, $i_3 = EGz$, $t = C_2 G^{-1}\tau$ в системе (8), получим канонический вид системы Чуа

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} & = & x - y + z, \\ \dot{z} & = & -\beta y - \gamma z, \end{array}\right. \tag{9}$$

где $\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$, $\beta = -\dfrac{C_2}{G^2 L}$, $\gamma = -\dfrac{R_0 C_2}{GL}$, $a = \dfrac{G_a}{G}$, $b = \dfrac{G_b}{G}$ $(a < b < 0)$, $f(x) = bx + \dfrac{a-b}{2}(|x+1| - |x-1|)$. В системе (9) и далее вместо τ используем в качестве безразмерного времени исходное обозначение t.

5. Импульсная синхронизация двух систем Чуа. Пусть система (9) установлена на передающем устройстве, которое передает в канал связи фазовую переменную x (т. е. $h(x, y, z) = x$). Запишем эту систему в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$.

На принимающем устройстве используем такую же систему, добавив в правую часть управления u_1, u_2, u_3:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} f(\tilde{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Вычисляя реакцию системы (11) на импульсные воздействия ΔU_i по каждой из управляющих переменных и используя формулу из [5] для аффинных систем управления, получим для скачков траекторий следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x} &= \Delta U_1(x, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ \Delta\tilde{y} &= \Delta U_2(x, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ \Delta\tilde{z} &= \Delta U_3(x, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \end{aligned} \tag{12}$$

Следует отдельно подчеркнуть, что даже при использовании импульсных управлений их величина и множество S, на котором они определяются, должны зависеть только от наблюдаемых переменных. Так, например, в работе [7] была предложена схема импульсной синхронизации, обеспечивающая хорошие показатели робастности по отношению к неточностям в параметрах системы, но при этом управляющие воздействия зависели от полного вектора ошибок. Однако, использование всех компонент вектора ошибок противоречит тому, что наблюдаемой является лишь переменная x передатчика.

Будем искать синхронизирующее управление в классе чисто импульсных управлений. Это значит, что все непрерывные управления считаем нулевыми: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Введем вектор ошибок $e = (e_x, e_y, e_z)^T$, где $e_x = \tilde{x} - x$, $e_y = \tilde{y} - y$, $e_z = \tilde{z} - z$. Запишем систему, которая описывает динамику изменения этого вектора,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} f(\tilde{x}) - f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь функцию Ляпунова $V = \dfrac{1}{2}\left(\beta e_x^2 + \alpha\beta e_y^2 + \alpha e_z^2\right)$. Поскольку все постоянные α, β, γ являются строго положительными, функция V является положительно определенной по переменным e. Вычислим ее производную в силу системы (13):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha\beta e_x(-e_x + e_y - [f(\tilde{x}) - f(x)]) + \alpha\beta e_y(e_x - e_y + e_z) - \alpha e_z(\beta e_y + \gamma e_z) = \\ &= -\alpha[\beta(e_x - e_y)^2 + \gamma e_z^2] - \alpha\beta(\tilde{x} - x)(f(\tilde{x}) - f(x)). \end{aligned}$$

Обозначим $W_1(e_x, e_y, e_z) = -\alpha[\beta(e_x - e_y)^2 + \gamma e_z^2]$, $W_2(x, \tilde{x}) = -\alpha\beta(\tilde{x} - x)(f(\tilde{x}) - f(x))$. Нетрудно видеть, что W_1 – функция отрицательно-постоянная, при этом, когда $e_x = 0$, можно дать оценку $W_1(0, e_y, e_z) \leq$

$\leq -\min(\beta,\gamma)\alpha(e_y^2+e_z^2)$. В силу того, что $f(x)$ – строго убывающая функция, W_2 будет вносить в $\dot V$ некоторую положительную поправку, которая будет тем больше, чем большее значение будет принимать e_x. Таким образом, мы не можем говорить об определенности знака производной функции Ляпунова $\dot V$ на всем фазовом пространстве (более того, она оказывается знакопеременной). Но существует окрестность множества $x=\tilde x$, в которой функция $\dot V$ будет определена отрицательно.

Выберем некоторое $\varepsilon>0$. Зададим на множестве S, определенном неравенством

$$-\alpha[\beta(e_x-e_y)^2-\gamma e_z^2]-\alpha\beta(\tilde x-x)(f(\tilde x)-f(x))\geq -\varepsilon e_x^2, \tag{14}$$

импульсное управление

$$\Delta U_1=-e_x=x-\tilde x,\ \Delta U_2=\Delta U_3=0, \tag{15}$$

которое обеспечивает сбрасывание траектории на множество $x=\tilde x$. Тем самым будет гарантировано, что вдоль траектории движения производная функции Ляпунова $\dot V$ будет отрицательной и отделенной от нуля, обеспечивая тем самым решение задачи синхронизации.

Однако, построенное таким способом управление не является решением задачи с неполной информацией, поскольку множество (14) зависит не только от наблюдаемой переменной x передатчика, но и от ненаблюдаемых y и z (посредством компонент вектора ошибок e). Получить автономную обратную связь в этом случае не представляется возможным, но можем использовать импульсные управления в фиксированные моменты времени.

Теорема 1. *Для каждых значений параметров $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $a<b<0$ существует T^* такое, что для любого $T\in(0;T^*]$ управление* (15) *в фиксированные моменты времени $\tau_i=iT$ $(i=0,1,\dots)$ обеспечивает синхронизацию систем* (10) и (11).

Доказательство. Пусть q – наибольшее собственное значение матрицы A. Тогда, если в момент времени $t=\tau_i$ значение e_x равно 0, то для каждого момента времени t в течение промежутка времени длительности T значение e_x^2 не превзойдет величины $(e_y^2+e_z^2)[\exp(2(q+\alpha|a|)(t-\tau_i))-1]$. Чтобы $\dot V$ было отрицательным, достаточно потребовать выполнения условия

$$\exp((2q+\alpha|a|)(t-\tau_i))\leq 1+|a|^{-1}\min(\gamma/\beta,1/2).$$

Выполнение указанного неравенства обеспечивается выбором

$$T^*=(2q+\alpha|a|)^{-1}\ln(1+|a|^{-1}\min(\gamma/\beta,1/2)).$$

Тогда для каждого t из промежутка (τ_i,τ_i+T) величина $\dot V$ вдоль траектории будет отрицательной. Кроме того, импульсное воздействие (15) в момент времени $t=\tau_i$ будет переводить вектор ошибок e из положения (e_x,e_y,e_z) в положение $(0,e_y,e_z)$, что обеспечивает уменьшение значения функции V на величину e_x^2. Таким образом, функция V на произвольной траектории монотонно убывает и стремится при $t\to+\infty$ к нулю. Тем самым доказана асимптотическая устойчивость множества $e\equiv 0$. □

Несмотря на то, что в закон управления (15) явно не входит время, синхронизацию нельзя считать автономной, поскольку моменты импульсных воздействий выбираются фиксированными. Однако благодаря тому, что системы (10) и (11) являются автономными, а синхронизация гарантируется при произвольных начальных условиях, построенное управление будет обеспечивать асимптотическое сближение траекторий и при использовании его, начиная с произвольного момента времени (не обязательно нулевого).

Заключение. В статье рассмотрена задача синхронизации автономных систем дифференциальных уравнений. Предложен метод решения этой задачи в классе ограниченных управляющих воздействий и в классе импульсных. В качестве примера изучена задача стабилизации двух систем Чуа и построено неавтономное синхронизирующее импульсное управление, которое обеспечивает асимптотическое сближение траекторий для произвольного выбора начальных значений и любого начального момента времени.

1. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1990. – **64** (8). – P. 821-824.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.
4. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. – Singapure: World Scientific, 1989. – 275p.
5. *Ковалев А.М., Кравченко Н.В., Неспирный В.Н.* Задачи управления и стабилизации динамических систем с импульсным управлением и неголономные механические системы // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 163–179.
6. *Matsumoto T.* A Chaotic Attractor from Chua's Circuit // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1984. – CAS-31, № 12. – P. 1055–1058.
7. *Yang T.* A survey of chaotic secure communication systems // Int. J. of Comp. Cognition. – 2002. – **1**, № 1. – P. 1-41.

A.M. Kovalev, V.N. Nespirnyy

Synchronization of dynamical systems in class of impulsive controls

The output synchronization problem for two dynamical systems of same structure is investigated. It is shown that this problem can be reduced to the partial stabilization problem or to the problem of feedback control synthesis, ensuring the asymptotic stability of some invariant set for the combined system. The features arising under solving this problem in the class of impulsive controls are considered. As an example, it is taken the Chua's circuit, and synchronizing impulsive controls for this system are constructed.

Keywords: *synchronization problem, impulsive control, Chua's circuit.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 05.05.16
kovalev@iamm.su, vetal_n@mail.ru