П. В. Харламов

СОСТАВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ МАЯТНИК

Рассмотрим совокупность гиростатов S^k ($k=1, 2, \ldots, n$). Пусть при каждом $k>1$ тела-носители S_0^k и S_0^{k-1} гиростатов S^k и S^{k-1} имеют общую ось l^k, проходящую через фиксированную в S_0^k точку O^k в направлении единичного вектора $\mathbf{e}^k$. Ось l^1 закреплена на некоторой платформе, совершающей заданное движение (скорость $\mathbf{v}_0$ точки O^1 и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^0$ платформы — известные функции времени t). Такую совокупность гиростатов назовем *составным маятником*. Если все векторы $\mathbf{e}_k$ коллинеарны, маятник *плоский*, если же среди осей l^k имеются непараллельные — *пространственный*. Пример составного пространственного маятника — гироскоп в кардановом подвесе.

В данной статье получены уравнения движения составного пространственного маятника. Указан случай интегрируемости этих уравнений. Частным случаем найденного здесь решения является принадлежащее Е. Л. Николаи решение задачи о гироскопе в кардановом подвесе [1].

Принимаем обозначения работы [2]. Запишем уравнения (59) этой работы, полагая $r=0$:

$$\boldsymbol{\omega}^k = \boldsymbol{\omega}^0 + \sum_{p=1}^{k} \mathbf{e}^p \dot{\varphi}^p, \tag{1}$$

$$\mathbf{e}^n \cdot [(\mathbf{A}^n \cdot \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + m^n \mathbf{c}^n \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^n] = L^n, \tag{2}$$

$$\mathbf{e}^k \cdot \left\{ \sum_{p=k}^{n} \left[(\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p \mathbf{c}^p \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{p-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^p \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=k}^{n-1} \mathbf{s}^p \times \sum_{q=p+1}^{n} \left[m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l \right)^{\cdot} - \mathbf{F}^q \right] \right\} = L^k$$

$$(k = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{3}$$

$$\mathbf{e}^1 \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{n} [(\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p \mathbf{c}^p \times \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{M}^p] + \sum_{p=2}^{n} m^p \mathbf{c}^p \times \sum_{l=1}^{p-1} (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n-1} \mathbf{s}^p \times \sum_{q=p+1}^{n} \left[m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l \right)^{\cdot} - \mathbf{F}^q \right] \right\} = L^1. \tag{4}$$

Из (1) находим угловое ускорение тела S_0^k:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k = \dot{\boldsymbol{\omega}}^k = \sum_{p=1}^{k} \left(\mathbf{e}^p \ddot{\varphi}^p + \sum_{r=1}^{p} \mathbf{e}^r \times \mathbf{e}^p \dot{\varphi}^r \dot{\varphi}^p + \boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{e}^p \dot{\varphi}^p \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^0, \tag{5}$$

а затем вычисляем производную вектора $\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l$:

$$(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} = \boldsymbol{\varepsilon}^l \times \mathbf{s}^l + \boldsymbol{\omega}^l \times (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l) = \sum_{p=1}^{l} \left\{ \mathbf{e}^p \times \mathbf{s}^l \ddot{\varphi}^p + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{r=1}^{p} (\mathbf{e}^r \times \mathbf{e}^p) \times \mathbf{s}^l + \sum_{r=1}^{l} \mathbf{e}^p \times (\mathbf{e}^r \times \mathbf{s}^l) \right] \dot{\varphi}^r \dot{\varphi}^p + 2\boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{e}^p \times \mathbf{s}^l) \dot{\varphi}^p \right\} +$$

$$+ \boldsymbol{\varepsilon}^0 \times \mathbf{s}^l + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{s}^l). \tag{6}$$

При этом было использовано тождество

$$(\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{e}^p) \times \mathbf{s}^l + \mathbf{e}^p \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{s}^l) = \boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{e}^p \times \mathbf{s}^l).$$

Обозначим звездочкой операцию дифференцирования по времени вектора с номером p в системе координат, сопутствующей телу S_0^p. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\boldsymbol{\omega}}^p = \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}{}^p,$$

$$(\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} = \mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\omega}^p \times (\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p) + \overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}{}^p. \tag{7}$$

В последнем равенстве учтено, что в системе координат, сопутствующей телу S_0^p, тензор $\mathbf{A}^p$ не зависит от t. Внесем (1), (5) в правую сторону равенства (7):

$$(\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} = \sum_{r=1}^{p} \left\{ \mathbf{A}^p \cdot \mathbf{e}^r \ddot{\varphi}^r + \sum_{h=1}^{r} \mathbf{A}^p \cdot (\mathbf{e}^h \times \mathbf{e}^r) \dot{\varphi}^h \dot{\varphi}^r + \sum_{h=1}^{p} (\mathbf{e}^r \times \mathbf{A}^p \cdot \mathbf{e}^h) \dot{\varphi}^h \dot{\varphi}^r + \right.$$

$$+ [\mathbf{A}^p\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{e}^r) + \mathbf{e}^r\times(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\lambda}^p) + \boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^r]\dot{\varphi}^r\Big\} +$$

$$+ \mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\lambda}^p) + \overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}{}^p.$$

Полученное выражение вместе с (6) подставим в уравнения (2) — (4):

$$\sum_{r=1}^{n}\mathbf{e}^n\cdot\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{e}^r\ddot{\varphi}^r + m^n\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{l}\mathbf{e}^n\cdot[\mathbf{c}^n\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\ddot{\varphi}^r +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{h=1}^{r}\mathbf{e}^n\cdot\mathbf{A}^n\cdot(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r + \sum_{h=1}^{n}\mathbf{e}^n\cdot(\mathbf{e}^r\times\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{e}^h)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right] +$$

$$+ m^n\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{l}(\mathbf{e}^n\times\mathbf{c}^n)\cdot\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{s}^l + \sum_{h=1}^{l}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{s}^l)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n}[\mathbf{e}^n\cdot\mathbf{A}^n\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{e}^r) + (\mathbf{e}^n\times\mathbf{e}^r)\cdot(\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\lambda}^n) + \mathbf{e}^n\cdot(\boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{A}^n\cdot\mathbf{e}^r)]\dot{\varphi}^r +$$

$$+ 2m^n\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{l}\mathbf{e}^n\cdot\{\mathbf{c}^n\times[\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\}\dot{\varphi}^r + \mathbf{e}^n\cdot\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0 + (\mathbf{e}^n\times\boldsymbol{\omega}^0)\cdot(\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\lambda}^n) +$$

$$+ (\boldsymbol{\lambda}^n\cdot\mathbf{e}^n)^{\cdot} + m^n\mathbf{e}^n\cdot\left\{\mathbf{c}^n\times\left[\dot{\mathbf{v}}_0 + \left(\sum_{l=1}^{n-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^0\cdot\mathbf{s}^l + \boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{s}^l)\right)\right]\right\} = \mathbf{e}^n\cdot\mathbf{M}^n + L^n, \tag{8}$$

$$\sum_{p=k}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{p}\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^r\ddot{\varphi}^r + \sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}m^p\mathbf{e}^k\cdot[\mathbf{c}^p\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\ddot{\varphi}^r\right\} +$$

$$+ \sum_{p=k}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q\mathbf{e}^k\cdot\left[\mathbf{s}^p\times\left(\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l\ddot{\varphi}^r + \sum_{r=1}^{q}\mathbf{e}^r\times\mathbf{c}^q\ddot{\varphi}^r\right)\right] +$$

$$+ \sum_{p=k}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{p}\left[\sum_{h=1}^{r}\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{A}^p\cdot(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r + \sum_{h=1}^{p}\mathbf{e}^k\cdot(\mathbf{e}^r\times\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^h)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right] +\right.$$

$$\left.+ m^p\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}(\mathbf{e}^k\times\mathbf{c}^p)\cdot\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{s}^l + \sum_{h=1}^{l}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{s}^l)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right\} +$$

$$+ \sum_{p=k}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q(\mathbf{e}^k\times\mathbf{s}^p)\cdot\left\{\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{s}^l + \sum_{h=1}^{l}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{s}^l)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r +\right.$$

$$\left.+ \sum_{r=1}^{q}\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{c}^q + \sum_{h=1}^{q}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{c}^q)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right\} +$$

$$+ \sum_{p=k}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{p}[\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{A}^p\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{e}^r) + (\mathbf{e}^k\times\mathbf{e}^r)\cdot(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\lambda}^p) + \mathbf{e}^k\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^r)]\dot{\varphi}^r +\right.$$

$$\left.+ 2m^p\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}(\mathbf{e}^k\times\mathbf{c}^p)\cdot[\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\dot{\varphi}^r\right\} +$$

$$+ 2\sum_{p=k}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q(\mathbf{e}^k\times\mathbf{s}^p)\cdot\left[\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)\dot{\varphi}^r + \sum_{r=1}^{q}\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{c}^q)\dot{\varphi}^r\right] +$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{p=k}^{n}\{\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0+(\mathbf{e}^k\times\boldsymbol{\omega}^0)\cdot(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0+\boldsymbol{\nu}^p)+\mathbf{e}^k\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}{}^p+m^p\mathbf{e}^k\cdot(\mathbf{c}^p\times\dot{\mathbf{v}}_0)+\\
&\qquad+m^p(\mathbf{e}^k\times\mathbf{c}^p)\cdot\sum_{l=1}^{p-1}[\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{s}^l+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{s}^l)]\}+\\
&+\sum_{p=k}^{n-1}(\mathbf{e}^k\times\mathbf{s}^p)\cdot\sum_{q=p+1}^{n}m^q\Big\{\dot{\mathbf{v}}_0+\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{c}^q+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{c}^q)+\sum_{l=1}^{q-1}[\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{s}^l+\\
&\qquad+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{s}^l)]\Big\}=L^k+\sum_{p=k}^{n}\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{M}^p+\sum_{p=k}^{n-1}\mathbf{e}^k\cdot\left(\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\mathbf{F}^q\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$(k=2,3,\ldots,n-1),$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^r\ddot{\varphi}^r+\sum_{p=2}^{n}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}m^p\mathbf{e}^1\cdot[\mathbf{c}^p\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\ddot{\varphi}^r+\\
&+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q\mathbf{e}^1\cdot\left[\mathbf{s}^p\times\left(\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l\ddot{\varphi}^r+\sum_{r=1}^{q}\mathbf{e}^r\times\mathbf{c}^q\ddot{\varphi}^r\right)\right]+\\
&+\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\left[\sum_{h=1}^{r}\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{A}^p\cdot(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r+\sum_{h=1}^{p}\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^r\times\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^h)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right]+\\
&+\sum_{p=2}^{n}m^p\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}(\mathbf{e}^1\times\mathbf{c}^p)\cdot\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{s}^l+\sum_{h=1}^{l}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{s}^l)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r+\\
&+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q(\mathbf{e}^1\times\mathbf{s}^p)\cdot\left\{\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{s}^l+\sum_{h=1}^{l}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{s}^l)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r+\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{r=1}^{q}\left[\sum_{h=1}^{r}(\mathbf{e}^h\times\mathbf{e}^r)\times\mathbf{c}^q+\sum_{h=1}^{q}\mathbf{e}^r\times(\mathbf{e}^h\times\mathbf{c}^q)\right]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r\right\}+\\
&+\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}[\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{A}^p\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{e}^r)+(\mathbf{e}^1\times\mathbf{e}^r)\cdot(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0+\boldsymbol{\lambda}^p)+\mathbf{e}^1\cdot(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{A}^p\cdot\mathbf{e}^r)]\dot{\varphi}^r+\\
&\qquad+2\sum_{p=2}^{n}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}m^p(\mathbf{e}^1\times\mathbf{c}^p)\cdot[\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)]\dot{\varphi}^r+\\
&+2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q(\mathbf{e}^1\times\mathbf{s}^p)\cdot\left[\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{s}^l)\dot{\varphi}^r+\sum_{r=1}^{q}\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{e}^r\times\mathbf{c}^q)\dot{\varphi}^r\right]+\\
&\qquad+\sum_{p=1}^{n}[\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0+(\mathbf{e}^1\times\boldsymbol{\omega}^0)\cdot(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^0+\boldsymbol{\lambda}^p)+\mathbf{e}^1\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}{}^p+\\
&+m^p\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{c}^p\times\dot{\mathbf{v}}_0)]+\sum_{p=2}^{n}m^p(\mathbf{e}^1\times\mathbf{c}^p)\cdot\sum_{l=1}^{p-1}[\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{s}^l+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{s}^l)]+\\
&+\sum_{p=1}^{n-1}(\mathbf{e}^1\times\mathbf{s}^p)\cdot\sum_{q=p+1}^{n}m^q\Big\{\dot{\mathbf{v}}_0+\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{c}^q+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{c}^q)+\sum_{l=1}^{q-1}[\boldsymbol{\varepsilon}^0\times\mathbf{s}^l+\\
&\qquad+\boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\mathbf{s}^l)]\Big\}=L^1+\sum_{p=1}^{n}\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{M}^p+\sum_{p=1}^{n-1}\mathbf{e}^1\cdot\left(\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\mathbf{F}^q\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Уравнения (8)—(10) получены при достаточно общих предположениях. Не накладывалось никаких ограничений на внешние силы и на управляющие моменты $\mathbf{L}^k$. Сохранен произвол в выборе осей координат, сопутствующих телам S_0^k. Последующие преобразования этих уравнений основаны на специализации сопутствующих осей координат и конкретизации действующих на систему сил.

Пусть $\mathbf{э}_1^k$, $\mathbf{э}_2^k$, $\mathbf{э}_3^k$ — ортонормированный базис осей координат, сопутствующих телу S_0^k: $\mathbf{э}_i^k \cdot \mathbf{э}_j^k = \delta_{ij}$. Полагаем, что первая ось координат совмещена с осью l^k: $\mathbf{э}_1^k = \mathbf{e}^k$. Пусть θ^k — угол между векторами $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}^{k-1}$: $\mathbf{э}_1^k \times \mathbf{э}_1^{k-1} = \cos\theta^k$. Если $\theta^k \neq 0, \pi$, определен вектор $\mathbf{э}_2^{k-1}$ такой, что $\mathbf{э}_1^{k-1} \times \times \mathbf{э}_1^k = \mathbf{э}_1^{k-1} \sin\theta^k$. Если же векторы $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}^{k-1}$ коллинеарны, в выборе вектора $\mathbf{э}_2^{k-1}$ остается произвол, который может быть использован в дальнейшем.

Определяющий положение тела S_0^k в S_0^{k-1} угол φ^k отсчитывается в плоскости, ортогональной $\mathbf{э}_1^k$ от $\mathbf{э}_2^{k-1}$ к $\mathbf{э}_2^k$. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{э}_1^k &= \mathbf{э}_1^{k-1}\cos\theta^k - \mathbf{э}_3^{k-1}\sin\theta^k, \\ \mathbf{э}_2^k &= \mathbf{э}_1^{k-1}\sin\theta^k\sin\varphi^k + \mathbf{э}_2^{k-1}\cos\varphi^k + \mathbf{э}_3^{k-1}\cos\theta^k\sin\varphi^k, \\ \mathbf{э}_3^k &= \mathbf{э}_1^{k-1}\sin\theta^k\cos\varphi^k - \mathbf{э}_2^{k-1}\sin\varphi^k + \mathbf{э}_3^{k-1}\cos\theta^k\cos\varphi^k. \end{aligned} \tag{11}$$

Напомним [2], что $\mathbf{э}_1^0$, $\mathbf{э}_2^0$, $\mathbf{э}_3^0$ — базис неподвижной системы координат и

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^k &= \mathbf{э}_i^k \cdot \mathbf{э}_j^0, \\ \alpha_{ij}^{kl} &= \alpha_{ji}^{lk} = \mathbf{э}_i^k \cdot \mathbf{э}_j^l. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно рекуррентное соотношение: $\alpha_{ij}^{k,k-2} = \alpha_{is}^{k,k-1}\alpha_{sj}^{k-1,k-2}$. Если $k > l$, то

$$\alpha_{ij}^{kl} = \alpha_{ii_{k-1}}^{k,k-1}\alpha_{i_{k-1}i_{k-2}}^{k-1,k-2}\ldots\alpha_{i_{l+2}i_{l+1}}^{l+2,l+1}\alpha_{i_{l+1}j}^{l+1,l}, \tag{13}$$

и при $l = 0$

$$\alpha_{ij}^k = \alpha_{ii_{k-1}}^{k,k-1}\alpha_{i_{k-1}i_{k-2}}^{k-1,k-2}\ldots\alpha_{i_2i_1}^{21}\alpha_{i_1j}^1. \tag{14}$$

Из (11), (12) при $k > 1$ следует

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}^{k,k-1} = \cos\theta^k, && \alpha_{12}^{k,k-1} = 0, && \alpha_{13}^{k,k-1} = -\sin\theta^k, \\ &\alpha_{21}^{k,k-1} = \sin\theta^k\sin\varphi^k, && \alpha_{22}^{k,k-1} = \cos\varphi^k, && \alpha_{23}^{k,k-1} = \cos\theta^k\sin\varphi^k, \\ &\alpha_{31}^{k,k-1} = \sin\theta^k\cos\varphi^k, && \alpha_{32}^{k,k-1} = -\sin\varphi^k, && \alpha_{33}^{k,k-1} = \cos\theta^k\cos\varphi^k. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (13) находим, что α_{ij}^{kl} зависит лишь от переменных φ^{l+1}, $\varphi^{l+2}, \ldots, \varphi^k$.

Ось l^1 назовем основанием маятника. Если эта ось сохраняет направление в пространстве ($\dot{\mathbf{e}}^1 = 0$), то формулы (15) применимы и к телу S_0^1:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}^1 = \cos\theta^1, && \alpha_{12}^1 = 0, && \alpha_{13}^1 = -\sin\theta^1, \\ &\alpha_{21}^1 = \sin\theta^1\sin\varphi^1, && \alpha_{22}^1 = \cos\varphi^1, && \alpha_{23}^1 = \cos\theta^1\sin\varphi^1, \\ &\alpha_{31}^1 = \sin\theta^1\cos\varphi^1, && \alpha_{32}^1 = -\sin\varphi^1, && \alpha_{33}^1 = \cos\theta^1\cos\varphi^1. \end{aligned}$$

В этом случае, как следует из (14), α_{ij}^k — известные функции переменных $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k$.

Вместе с α_{ij}^{kl} определяются в зависимости от φ^r и величины

$$\alpha_{uivj}^{kprl} = э_u^k \cdot [э_i^p \times (э_v^r \times э_j^l)] = \alpha_{uv}^{kr}\alpha_{ij}^{pl} - \alpha_{uj}^{kl}\alpha_{iv}^{pr},$$

$$\alpha_{1is1j}^{kprhl} = э_1^k \cdot \{э_i^p \times [э_s^r \times (э_1^h \times э_j^l)]\} = \alpha_{2j}^{hl}\alpha_{1is3}^{kprh} - \alpha_{3j}^{hl}\alpha_{1is2}^{kprh}, \tag{16}$$

которые вскоре понадобятся.

Используя обозначения (57) работы [2], получаем

$$\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{A}^p \cdot \mathbf{e}^r = A_{ij}^p \alpha_{1i}^{kp} \alpha_{1j}^{rp}, \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{A}^p \cdot (\mathbf{e}^h \times \mathbf{e}^r) = A_{ij}^p \alpha_{1i}^{kp} \alpha_{j132}^{prhh},$$

$$\mathbf{e}^k \cdot (\mathbf{e}^r \times \mathbf{A}^p \cdot \mathbf{e}^h) = A_{ij}^p \alpha_{1j}^{hp} \alpha_{1i32}^{kprr}, \quad \mathbf{e}^k \cdot [\mathbf{c}^p \times (\mathbf{e}^r \times \mathbf{s}^l)] = c_i^p s_j^l \alpha_{1i1j}^{kprl},$$

$$(\mathbf{e}^k \times \mathbf{c}^p) \cdot [\mathbf{e}^h \times (\mathbf{e}^r \times \mathbf{s}^l)] = c_i^p s_j^l \alpha_{1i11j}^{kphrl}.$$

Подобные этим выражения находятся и для других величин, встречающихся в уравнениях (8) — (10), и последние могут быть теперь записаны с указанием явной зависимости коэффициентов при $\ddot{\varphi}^r$, $\dot{\varphi}^r\dot{\varphi}^h$, $\dot{\varphi}^r$ и слагаемых, не содержащих этих производных, от переменных $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ (а в случае подвижного основания — и от времени t). Не проделывая этого в общем случае, рассмотрим представляющий основной интерес случай, когда основание маятника неподвижно, а внешними по отношению к рассматриваемой системе силами являются силы тяжести: $\mathbf{F}^k = gm^k э_1^0$, $\mathbf{M}^k = \mathbf{c}^k \times \times gm^k э_1^0$, где g — ускорение силы тяжести. Неподвижная система координат выбрана так, что ее первая ось имеет направление силы тяжести.

Так как центр масс каждого носимого тела гиростата S^k принадлежит оси этого тела, то силы тяжести не вносят вклад в момент $\mathbf{L}$, входящий в уравнение (29) работы [2]. Полагая, что взаимодействие носимых тел с носителем характеризуется силами, приложенными в точках крепления оси носимого тела, получим $\mathbf{L}=0$, и значит, $p=\mathrm{const}$, Если эти условия выполнены для всех носимых тел, то гиростатический момент неизменен в теле-носителе: $\underset{i}{\boldsymbol{\lambda}^k} = 0$. Полагаем еще, что трение в опорах осей l^k отсутствует и из управляющих моментов отличным от нуля может быть лишь момент, действующий на тело $S_0^n : L^n = = L(t)$, $L^k=0$ $(k<n)$. При этих условиях система (8) — (10) записывается так:

$$\left(\sum_{r=1}^{n} A_{1j}^n \alpha_{1j}^{rn} + m^n \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{l} c_i^n s_j^l \alpha_{1i1j}^{nnrl}\right)\ddot{\varphi}^r + \left[\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{r} A_{1j}^n \alpha_{j132}^{nrhh} + \right.\right.$$

$$\left.+ \sum_{h=1}^{n} A_{ij}^n \alpha_{j1}^{nh} \alpha_{1i32}^{nnrr}\right) + m^n \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{h=1}^{r} \alpha_{1ij11}^{nnlrh} + \sum_{h=1}^{l} \alpha_{1i11j}^{nnrhl}\right) c_i^n s_j^l \Bigg]\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} (\lambda_3^n \alpha_{12}^{rn} - \lambda_2^n \alpha_{13}^{rn})\dot{\varphi}^r = gm^n (c_2^n \alpha_{13}^n - c_3^n \alpha_{12}^n) + L, \tag{17}$$

$$\left[\sum_{p=k}^{n}\left(\sum_{r=1}^{p} A_{ij}^p \alpha_{1i}^{kp} \alpha_{1j}^{rp} + m^p \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{r=1}^{l} c_i^p s_j^l \alpha_{1i1j}^{kprl}\right) + \sum_{p=k}^{n-1} \sum_{q=p+1}^{n} m^q \left(\sum_{l=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{l} s_j^l \alpha_{1i1j}^{kprl} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{r=1}^{q} c_j^q \alpha_{1i1j}^{kprq}\right) s_i^p\right]\ddot{\varphi}^r + \left\{\sum_{p=k}^{n}\left[A_{ij}^p \sum_{r=1}^{p}\left(\alpha_{1i}^{kp} \sum_{h=1}^{r} \alpha_{j132}^{prhh} + \sum_{h=1}^{p} \alpha_{j1}^{ph} \alpha_{1i32}^{kprr}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + m^p \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{h=1}^{r} \alpha_{1ij11}^{kplrh} + \sum_{h=1}^{l} \alpha_{1i11j}^{kprhl}\right) c_i^p s_j^l\right] + \sum_{p=k}^{n-1} \sum_{q=p+1}^{n} m^q s_i^p \left[\sum_{l=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{l} \times\right.$$

$$\times\left(\sum_{h=1}^{r}\alpha_{1ij11}^{kplrh}+\sum_{h=1}^{l}\alpha_{1i11j}^{kprhl}\right)s_j^l+\sum_{r=1}^{q}\left(\sum_{h=1}^{r}\alpha_{1ij11}^{kpqrh}+\sum_{h=1}^{q}\alpha_{1i11j}^{kprhq}\right)c_j^q\Bigg]\Bigg\}\dot\varphi^h\dot\varphi^r+$$

$$+\sum_{p=k}^{n}\sum_{r=1}^{p}\lambda_i^p\alpha_{i132}^{prkk}\ddot\varphi^r=g\left(\sum_{p=k}^{n}m^pc_i^p+\sum_{p=k}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^qs_i^p\right)(\alpha_{13}^k\alpha_{i2}^{pk}-\alpha_{12}^k\alpha_{i3}^{pk}),\qquad(18)$$

$$(k=2,3,\ldots,n-1).$$

$$\left[\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}A_{ij}^p\alpha_{1i}^{1p}\alpha_{1j}^{rp}+\sum_{p=2}^{n}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}m^pc_i^ps_j^l\alpha_{1i1j}^{1prl}+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^q\left(\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}s_j^l\alpha_{1i1j}^{1prl}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{r=1}^{q}c_j^q\alpha_{1i1j}^{1prq}\right)s_i^p\right]\ddot\varphi^r+\Bigg\{\sum_{p=1}^{n}A_{ij}^p\sum_{r=1}^{p}\left(\alpha_{1i}^{1p}\sum_{h=1}^{r}\alpha_{j132}^{prhh}+\sum_{h=1}^{p}\alpha_{j1}^{ph}\alpha_{1i32}^{1prr}\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n}m^p\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{h=1}^{r}\alpha_{1ij11}^{1plrh}+\sum_{h=1}^{l}\alpha_{1i11j}^{1prhl}\right)c_i^p\,s_j^l+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^qs_i^p\Bigg[\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{h=1}^{r}\alpha_{1ij11}^{1plrh}+\sum_{h=1}^{l}\alpha_{1i11j}^{1prhl}\right)s_j^l+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left(\sum_{h=1}^{r}\alpha_{1ij11}^{1pqrh}+\sum_{h=1}^{q}\alpha_{1i11j}^{1prhq}\right)c_j^q\Bigg]\Bigg\}\dot\varphi^h\dot\varphi^r+\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\lambda_i^p\alpha_{i132}^{pr11}\ddot\varphi^r=$$

$$=g\left(\sum_{p=1}^{n}m^pc_i^p+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}m^qs_i^p\right)(\alpha_{13}^1\alpha_{i2}^{p1}-\alpha_{12}^1\alpha_{i3}^{p1}).\qquad(19)$$

Если в уравнении (17) управляющий момент отсутствует: $L=0$, система (17) — (19) имеет интеграл энергии. При условиях, отмеченных в предыдущем разделе, последнее слагаемое в выражении (17) работы [2] не зависит от времени. Обозначим через T сумму переменных составляющих таких выражений для всех тел пространственного маятника:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[m^k\mathbf{v}_0^{k2}+2m^k\mathbf{v}_0^k\cdot(\boldsymbol\omega^k\times\mathbf{c}^k)+\boldsymbol\omega^k\cdot\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol\omega^k].$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{v}_0^k=\begin{cases}0 & ,\text{ если } k=1,\\ \sum\limits_{p=1}^{k-1}\boldsymbol\omega^p\times\mathbf{s}^p, & \text{если } k>1\end{cases}$$

и

$$2T=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol\omega^k\cdot A^k\cdot\boldsymbol\omega^k+2\sum_{k=2}^{n}m^k(\boldsymbol\omega^k\times\mathbf{c}^k)\cdot\sum_{p=1}^{k-1}(\boldsymbol\omega^p\times\mathbf{s}^p)+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}(\boldsymbol\omega^p\times\mathbf{s}^p)\cdot(\boldsymbol\omega^q\times\mathbf{s}^q),$$

а так как

$$\boldsymbol\omega^p=\sum_{r=1}^{p}\mathbf{э}_1^r\dot\varphi^r,\qquad(20)$$

то

$$2T=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{k}э_1^r\cdot A^k\cdot э_1^h\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r+2\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{p}э_1^r\cdot[э_i^k\times(э_1^h\times э_j^p)]c_i^k s_j^p\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}э_1^r\cdot[э_i^p\times(э_1^h\times э_j^q)]\,s_i^p s_j^q\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r,$$

или, с учетом обозначений (12), (16),

$$2T=\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{k}A_{ij}^k\alpha_{1i}^{hk}\alpha_{1j}^{rk}+2\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{p}c_i^k s_j^p\alpha_{1i1j}^{rkhp}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}s_i^p s_j^q\alpha_{1i1j}^{rphq}\right)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r. \tag{21}$$

Силовая функция действующих на маятник сил тяжести такова:

$$U=gэ_1^0\cdot\left[m^1\mathbf{c}^1+\sum_{k=2}^{n}m^k\left(\mathbf{c}^k+\sum_{q=1}^{k-1}\mathbf{s}^q\right)\right]=$$

$$=g\left|mc_i^1\alpha_{i1}^1+\sum_{k=2}^{n}m^k\left(c_i^k\alpha_{i1}^k+\sum_{q=1}^{k-1}s_i^q\alpha_{i1}^q\right)\right|. \tag{22}$$

Постоянную энергии обозначим через E:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{k}A_{ij}^k\alpha_{1i}^{hk}\alpha_{1j}^{rk}+2\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{h=1}^{p}c_i^k s_j^p\alpha_{1i1j}^{rkhp}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n}m^k\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}s_i^p s_j^q\alpha_{1i1j}^{rphq}\right)\dot{\varphi}^h\dot{\varphi}^r-$$

$$-g\left|m^1c_i^1\alpha_{i1}^1+\sum_{k=2}^{n}m^k\left(c_i^k\alpha_{i1}^k+\sum_{q=1}^{k-1}s_i^p\alpha_{i1}^q\right)\right]=E. \tag{23}$$

Момент относительно O^1 количества движения пространственного маятника запишем, воспользовавшись формулой (45) работы [2]:

$$\sum_{p=1}^{n}(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)+\sum_{p=2}^{n}m^p\left[\left(\mathbf{c}^p+\sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right)\times\sum_{l=1}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)-(\boldsymbol{\omega}^p\times\mathbf{c}^p)\times\sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right]. \tag{24}$$

Если основание маятника неподвижно и

$$э_1^1=э_1^0 \tag{25}$$

(ось l^1 вертикальна), то проекция вектора (24) на эту ось остается с течением времени неизменной. Обозначим эту постоянную через k:

$$э_1^1\cdot\left\{\sum_{p=1}^{n}(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)+\sum_{p=2}^{n}m^p\left[\left(\mathbf{c}^p+\sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right)\times\sum_{l=1}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\boldsymbol{\omega}^p\times\mathbf{c}^p)\cdot\sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right\}=k. \tag{26}$$

Отметим, что в общем случае условия существования интегралов (23) и (26) могут не совпадать. Для существования интеграла (23) условие (25) не является необходимым, а интеграл (26) существует и при $L \neq 0$.

Подставим в (26) значение (20):

$$\left\{\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} \mathrm{э}_1^1\cdot\mathbf{A}^p\cdot\mathrm{э}_1^r+\sum_{p=2}^{n} m^p\left\langle\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}\mathrm{э}_1^1\cdot[\mathbf{c}^p\times(\mathrm{э}_1^r\times\mathbf{s}^l)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}\sum_{q=1}^{p-1}\mathrm{э}_1^1\cdot[\mathbf{s}^q\times(\mathrm{э}_1^r\times\mathbf{s}^l)]+\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{p}\mathrm{э}_1^1\cdot[\mathbf{s}^q\times(\mathrm{э}_1^r\times\mathbf{c}^p)]\right\rangle\right\}\dot\varphi^r+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{э}_1^1\cdot\boldsymbol{\lambda}^p=k,$$

или в координатной форме

$$\left[\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}A_{ij}^p\alpha_{1i}^{1p}\alpha_{1j}^{rp}+\sum_{p=2}^{n}m^p\left(\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}c_i^p s_j^l\alpha_{1i1j}^{1prl}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{l}\sum_{q=1}^{p-1}s_i^q s_j^l\alpha_{1i1j}^{1qrl}+\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{p}s_i^q c_j^p\alpha_{1i1j}^{1qrp}\right)\right]\dot\varphi^r+\sum_{p=1}^{n}\lambda_i^p\alpha_{1i}^{1p}=k. \qquad (27)$$

Если маятник составлен лишь из двух гиростатов и выполнены условия $\mathrm{э}_1^1=\mathrm{э}_1^0$ и $\mathbf{L}=0$, то интегралов (23), (27) достаточно для сведения задачи к квадратурам.

Для упрощения записи углы φ^1, φ^2, ϑ^2 обозначим через ψ, φ, ϑ (вследствие (25) угол ϑ^1 равен нулю); массу m^2 — через m_*. Общий перпендикуляр к осям l^1, l^2 примем за вторую ось сопутствующей телу S_0^1 системы координат, и по этой оси направим вектор $\mathbf{s}^1$: $\mathbf{s}^1=s\mathrm{э}_2^1$, т. е.

$$s_i^1=s\delta_{i2}.$$

Оставшимся произволом в выборе системы координат, сопутствующей телу S_0^2, распорядимся так, чтобы третья компонента вектора $\mathbf{c}^2$ исчезла: $\mathbf{c}^2=c_1\mathrm{э}_1^2+c_2\mathrm{э}_2^2$ (верхние индексы у компонент этого вектора опущены).

Из (15) с учетом введенных обозначений получаем

$$\alpha_{1i}^1=\alpha_{i1}^1=\delta_{i1},\ \alpha_{22}^1=\alpha_{33}^1=\cos\psi,\ \alpha_{23}^1=-\alpha_{32}^1=\sin\psi,$$

$$\alpha_{11}^2=\alpha_{11}^{21}=\cos\vartheta,\ \alpha_{21}^2=\alpha_{21}^{21}=\sin\vartheta\sin\varphi,\ \alpha_{31}^2=\alpha_{31}^{21}=\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\alpha_{12}^{21}=0,\ \alpha_{22}^{21}=\cos\varphi,\ \alpha_{32}^{21}=-\sin\varphi,$$

$$\alpha_{13}^{21}=-\sin\vartheta,\ \alpha_{23}^{21}=\cos\vartheta\sin\varphi,\ \alpha_{33}^{21}=\cos\vartheta\cos\varphi.$$

Интегралы (23), (27) в этом случае таковы:

$$J(\varphi)\dot\psi^2+2C(\varphi)\dot\varphi\dot\psi+A_{11}^2\dot\varphi^2=E(\varphi), \qquad (28)$$

$$J(\varphi)\dot\psi+C(\varphi)\dot\varphi=K(\varphi), \qquad (29)$$

где

$$J(\varphi)=A_{11}^1+A_{11}^2\cos^2\vartheta+m_*s^2+2(m_*sc_2+A_{31}^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\cos\varphi+$$

$$+2A_{21}^2\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi+A_{22}^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+$$

$$+A_{33}^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+2A_{23}^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$C(\varphi)=A_{11}^2\cos\vartheta+(m_*sc_2\cos\vartheta+A_{13}^2\sin\vartheta)\cos\varphi+A_{12}^2\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$E(\varphi) = 2[E + gm^1c_1^1 + gm_*(c_1\cos\vartheta + c_2\sin\vartheta\sin\varphi)],$$

$$K(\varphi) = k - \lambda_1^1 - \lambda_1^2\cos\vartheta - (\lambda_2^2\sin\varphi + \lambda_3^2\cos\varphi)\sin\vartheta.$$

Исключив $\dot\psi$ из уравнений (28), (29), получим

$$[A_{11}^2 J(\varphi) - C^2(\varphi)]\,\dot\varphi^2 = J(\varphi)E(\varphi) - K^2(\varphi)$$

и, значит,

$$t = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \Phi(\varphi)\,d\varphi, \tag{30}$$

где

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{A_{11}^2 J(\varphi) - C^2(\varphi)}{E(\varphi)J(\varphi) - K^2(\varphi)}}\,.$$

Зависимость ψ от φ находим из (29), (30):

$$\psi - \psi_0 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} [K(\varphi)\Phi(\varphi) - C(\varphi)]\frac{d\varphi}{J(\varphi)}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Николаи Е. Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 3, 4, 1939.

2. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел. См. статью в настоящем сборнике.