

УДК 531.38, 531.39

©2017. Г.А. Котов, А.И. Шмыгаль

О ПРЕЦЕССИЯХ ВТОРОГО ТИПА ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата, несущего два ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил. Исследованы условия существования прецессий гиростата, характеризующихся постоянством скорости собственного вращения. Уравнения движения редуцированы к одному дифференциальному уравнению относительно скорости прецессии гиростата. Получены новые решения приведенных уравнений.

Ключевые слова: *прецессии второго типа, два ротора, гиростат с переменным гироскопическим моментом.*

Введение. В динамике систем связанных твердых тел традиционно применяется модель гиростата. Она использовалась в статьях Н. Е. Жуковского [1], В. В. Румянцева [2], П. В. Харламова [3], которые получили дифференциальные уравнения движения гиростата в случаях постоянного и переменного гироскопического момента. Подробный анализ результатов в задачах динамики твердого тела изложен в монографиях [4–6]. Он показывает, что большое внимание в научных публикациях уделяется изучению прецессионных движений, которые находят широкое применение в практических задачах техники. Так, например, в статьях [7, 8] рассмотрена проблема исследования условий существования прецессий гиростата с одним ротором. В статьях [9–12] изучены различные классы прецессий гиростата, который несет два вращающихся ротора. В [9] рассмотрены полурегулярные прецессии, в [10] предложен общий метод исследования прецессий, в [11] получены условия существования маятниковых движений, в [12] указаны новые решения уравнений движения гиростата в случае прецессионно-изоконических движений. Общим математическим методом служит метод инвариантных соотношений для автономных [13] и неавтономных дифференциальных уравнений [14].

В данной статье изучаются прецессии гиростата с двумя роторами в предположении, что постоянна скорость собственного вращения гиростата. Получено одно дифференциальное уравнение относительно скорости прецессии и указаны решения этого уравнения.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с двумя роторами в предположении, что на гиростат действуют потенциальные и гироскопические силы [6]

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} + \dot{\lambda}_1(t)\alpha + \dot{\lambda}_2(t)\beta = (A\omega + \lambda_1(t)\alpha\lambda_2(t)\beta) \times \omega + \\ + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

В (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$) – проекции гиростатического момента на единичные ортогональные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – постоянные симметричные матрицы; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t .

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad [A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}] \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Зададим прецессии второго типа [5, 6]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \quad (4)$$

где $\dot{\varphi} = n = \text{const}$, или $\varphi = nt + \varphi_0$ (положим $\varphi_0 = 0$); $a_0 = \cos \theta_0$, $\theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})$; \boldsymbol{a} – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом.

Подставим (4) в (2), тогда

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \quad (5)$$

Полагая $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, из (5) и интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ находим [5]

$$\nu_1 = a'_0 \sin nt, \quad \nu_2 = a'_0 \cos nt, \quad \nu_3 = a_0, \quad (6)$$

где $a'_0 = \sqrt{1 - a_0^2}$. Таким образом, общее решение уравнения (2) выражается в виде периодических функций (6).

Запишем уравнение (1), подставив в него $\boldsymbol{\omega}$ из (4):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = & -\ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} - \dot{\psi}n\text{Sp}(A)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}2n(\boldsymbol{\nu} \times A\boldsymbol{a}) + n^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \\ & + \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + \lambda_1(t)[n(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] + \lambda_2(t)[n(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu})] + \\ & + \dot{\psi}(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) + n(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) $\text{Sp}(A) = \sum_{i=1}^3 A_{ii}$.

Векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ составляют базис. Спроецируем обе части уравнения (7) на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда, полагая $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = & \lambda_2(t)(P^{(1)}(t)\dot{\psi} + n\gamma_3) - \ddot{\psi}(t)p_1(t) + \dot{\psi}(t)[c_0(\alpha_1 \cos nt - \\ & - \alpha_2 \sin nt) + R^{(1)}(t)] + \dot{\psi}^2(t)Q^{(1)}(t) + K^{(1)}(t) + nN^{(1)}(t) + \Pi^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t)(P^{(1)}(t)\dot{\psi} + n\gamma_3) - \ddot{\psi}(t)q_1(t) + \dot{\psi}(t)[c_0(\beta_1 \cos nt - \beta_2 \sin nt) + R^{(2)}(t)] + \dot{\psi}^2(t)Q^{(2)}(t) + K^{(2)}(t) + nN^{(2)}(t) + \Pi^{(2)}(t), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(t)[\dot{\psi}(t)(a'_0\beta_1 \sin nt + a'_0\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3) + n\beta_3] - \\ & - \lambda_2(t)[\dot{\psi}(t)(a'_0\alpha_1 \sin nt + a'_0\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3) + n\alpha_3] = \\ & = \ddot{\psi}(t)r_1(t) - \dot{\psi}(t)[c_0(\gamma_1 \cos nt - \gamma_2 \sin nt) + R^{(3)}(t)] - \\ & - \dot{\psi}^2(t)Q^{(3)}(t) - K^{(3)}(t) - nN^{(3)}(t) - \Pi^{(3)}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (8)–(10) введены следующие функции:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \varepsilon_1^{(1)} \cos nt + \varepsilon_2^{(1)} \sin nt + \varepsilon_0^{(1)}, \\ q_1(t) &= \varepsilon_1^{(2)} \cos nt + \varepsilon_2^{(2)} \sin nt + \varepsilon_0^{(2)}, \\ r_1(t) &= \varepsilon_1^{(3)} \cos nt + \varepsilon_2^{(3)} \sin nt + \varepsilon_0^{(3)}, \\ P^{(1)}(t) &= P_1^{(1)} \cos nt + P_2^{(1)} \sin nt + P_0^{(1)}, \\ Q^{(k)}(t) &= Q_2^{(k)} \sin 2nt + Q_1^{(k)} \cos nt + \tilde{Q}_1^{(k)} \sin nt, \\ R^{(k)}(t) &= R_2^{(k)} \sin 2nt + R_1^{(k)} \cos nt + \tilde{R}_1^{(k)} \sin nt, \\ K^{(k)}(t) &= K_1^{(k)} \cos nt + K_2^{(k)} \sin nt + K_0^{(k)}, \\ N^{(k)}(t) &= N_1^{(k)} \cos nt + N_2^{(k)} \sin nt, \\ \Pi^{(k)}(t) &= \Pi_2^{(k)} \sin 2nt + \Pi_1^{(k)} \cos nt + \tilde{\Pi}_1^{(k)} \sin nt, \\ & k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= a'_0 n(A_3 - A_2 - A_1), \\ P_1^{(1)} &= a'_0 \gamma_2, \quad P_2^{(1)} = a'_0 \gamma_1, \quad P_0^{(1)} = a_0 \gamma_3, \\ \varepsilon_1^{(1)} &= a'_0 \alpha_2 A_2, \quad \varepsilon_2^{(1)} = a'_0 \alpha_1 A_1, \quad \varepsilon_0^{(1)} = a_0 \alpha_3 A_3, \\ \varepsilon_1^{(2)} &= a'_0 \beta_2 A_2, \quad \varepsilon_2^{(2)} = a'_0 \beta_1 A_1, \quad \varepsilon_0^{(2)} = a_0 \beta_3 A_3, \\ \varepsilon_1^{(3)} &= a'_0 \gamma_2 A_2, \quad \varepsilon_2^{(3)} = a'_0 \gamma_1 A_1, \quad \varepsilon_0^{(3)} = a_0 \gamma_3 A_3, \\ Q_2^{(1)} &= \frac{1}{2} a_0'^2 \alpha_3 (A_1 - A_2), \quad Q_1^{(1)} = a_0 a'_0 \alpha_1 (A_2 - A_3), \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = a_0 a'_0 \alpha_2 (A_3 - A_1), \\ Q_2^{(2)} &= \frac{1}{2} a_0'^2 \beta_3 (A_1 - A_2), \quad Q_1^{(2)} = a_0 a'_0 \beta_1 (A_2 - A_3), \quad \tilde{Q}_1^{(2)} = a_0 a'_0 \beta_2 (A_3 - A_1), \\ Q_2^{(3)} &= \frac{1}{2} a_0'^2 \gamma_3 (A_1 - A_2), \quad Q_1^{(3)} = a_0 a'_0 \gamma_1 (A_2 - A_3), \quad \tilde{Q}_1^{(3)} = a_0 a'_0 \gamma_2 (A_3 - A_1), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 R_2^{(1)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\alpha_3(B_1 - B_2), R_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_2(B_3 - B_1), \\
 R_2^{(2)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\beta_3(B_1 - B_2), R_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_2(B_3 - B_1), \\
 R_2^{(3)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\gamma_3(B_1 - B_2), R_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_2(B_3 - B_1), \\
 K_1^{(1)} &= a_0'(\alpha_3s_1 - \alpha_1s_3), K_2^{(1)} = a_0'(\alpha_2s_3 - \alpha_3s_2), K_0^{(1)} = a_0(\alpha_1s_2 - \alpha_2s_1), \\
 K_1^{(2)} &= a_0'(\beta_3s_1 - \beta_1s_3), K_2^{(2)} = a_0'(\beta_2s_3 - \beta_3s_2), K_0^{(2)} = a_0(\beta_1s_2 - \beta_2s_1), \\
 K_1^{(3)} &= a_0'(\gamma_3s_1 - \gamma_1s_3), K_2^{(3)} = a_0'(\gamma_2s_3 - \gamma_3s_2), K_0^{(3)} = a_0(\gamma_1s_2 - \gamma_2s_1), \\
 N_1^{(1)} &= -a_0'\alpha_1B_2, \quad N_2^{(1)} = -a_0'\alpha_2B_1, \quad N_1^{(2)} = -a_0'\beta_1B_2, \\
 N_2^{(2)} &= -a_0'\beta_2B_1, \quad N_1^{(3)} = -a_0'\gamma_1B_2, \quad N_2^{(3)} = -a_0'\gamma_2B_1, \\
 \Pi_2^{(1)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\alpha_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_2(C_3 - C_1), \\
 \Pi_2^{(2)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\beta_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_2(C_3 - C_1), \\
 \Pi_2^{(3)} &= \frac{1}{2}a_0'^2\gamma_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_2(C_3 - C_1).
 \end{aligned}$$

Запишем интеграл моментов из (3) в координатах

$$\begin{aligned}
 &\lambda_1(t)(a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0'\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3) + \lambda_2(t)(a_0'\beta_1 \sin nt + \\
 &+ a_0'\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3) = d_2 \cos 2nt + d_0 - \dot{\psi}(t)\left(\frac{a_0'^2}{2}(A_2 - A_1) \cos 2nt + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2}a_0'^2(A_1 + A_2) + a_0^2A_3\right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $d_2 = \frac{1}{4}a_0'^2(B_2 - B_1)$, $d_0 = k + \frac{a_0'^2}{4}(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}a_0^2B_3 - a_0nA_3$.

Опишем общий метод решения задачи об условиях существования прецессий (4)–(6). Обозначая через $u(t) = \dot{\psi}(t)$, из уравнений (10), (13) находим функции $\lambda_i(t) = \lambda_i(t, u(t), \dot{u}(t), \sigma_{ij})$, где σ_{ij} – параметры задачи, указанные в (12). Подставляя данные функции в одно из уравнений (8), (9), получим дифференциальное уравнение вида $F(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \sigma_{ij}) = 0$, решение которого позволяет найти зависимость $\dot{\psi} = u(t)$ и тем самым построить решение $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{a}$, которое описывает вместе с формулами (6) прецессию второго типа.

Условия разрешимости уравнения $F(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \sigma_{ij}) = 0$ есть условия существования построенного таким методом решения уравнений (1), (2).

2. Новые классы полурегулярных прецессий второго типа. Положим

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1). \tag{14}$$

Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} n_1 &= a_0'^2 A_1 + a_0'^2 A_3, & m_1 &= k + \frac{a_0'^2}{4}(3B_1 - B_2) + \frac{a_0'^2}{2}B_3 - a_0 n A_3, \\ n_2 &= a_0'^2 A_2 + a_0'^2 A_3, & m_2 &= k + \frac{a_0'^2}{4}(3B_2 - B_1) + \frac{a_0'^2}{2}B_3 - a_0 n A_3. \end{aligned}$$

Используя условия (14) и значения постоянных параметров (12), из (10), (13) и (8) получим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{1}{a_0' u(t)} [a_0 A_3 \dot{u}(t) \cos nt - n_1 u^2(t) \sin nt + \\ &+ u(t)(-d_2 \cos 2nt + m_1) \sin nt - a_0'(s_1 \cos nt - s_2 \sin nt) \cos nt - \\ &- a_0'^2(C_2 - C_1) \sin nt \cos^2 nt], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) &= \frac{1}{a_0' u(t)} [-a_0 A_3 \dot{u}(t) \sin nt - n_2 u^2(t) \cos nt + \\ &+ u(t)(-d_2 \cos 2nt + m_2) \cos nt + a_0'(s_1 \cos nt - s_2 \sin nt) \sin nt + \\ &+ a_0'^2(C_2 - C_1) \sin^2 nt \cos nt], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t)(a_0 u(t) + n) + a_0' A_1 \dot{u}(t) \sin nt + a_0'[a_0(B_2 - B_3) + \\ + n(A_1 - A_2 + A_3)]u(t) \cos nt - a_0 a_0'(A_2 - A_3)u^2(t) \cos nt + \\ + a_0'[nB_2 + a_0(C_2 - C_3) + s_3] \cos nt - a_0 s_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что функции (15), (16) определены из уравнений (10), (13). Подставим (15), (16) в уравнение (17):

$$\begin{aligned} a_0 A_3 u(t) \ddot{u}(t) - a_0 A_3 \dot{u}^2(t) + a_0' \dot{u}(t) [s_1 \cos nt - s_2 \sin nt + \\ + a_0'(C_2 - C_1) \sin nt \cos nt] + a_0 A_3 u^4(t) + u^3(t)(a_0 d_2 \cos 2nt + \sigma_1) - \\ + u^2(t) [\sigma_2 \cos 2nt - a_0 a_0'(s_1 \sin nt + s_2 \cos nt) + \sigma_3] + \\ + n a_0' u(t) [s_1 \sin nt + s_2 \cos nt - a_0'(C_2 - C_1) \cos 2nt] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{a_0 a_0'^2}{4}(B_1 + B_2 - 4B_3) - a_0(k + \frac{a_0'^2}{2}B_3) + n A_3, \\ \sigma_2 &= \frac{a_0'^2}{2} [a_0(C_2 - C_1) - n(B_2 - B_1)], \\ \sigma_3 &= \frac{a_0'^2}{2} [a_0(C_1 + C_2 - 2C_3) + n(B_1 + B_2) + 2s_3]. \end{aligned}$$

Вариант № 1. Положим в уравнении (18)

$$a_0 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad C_1 = C_2, \quad B_1 = B_2. \quad (19)$$

В силу (19) уравнение (18) упрощается:

$$u^2(t)[nA_3u(t) + s_3 + nB_1] = 0,$$

откуда при $u(t) \neq 0$ находим $\dot{\psi} = u(t) = -\frac{s_3 + nB_1}{nA_3}$. Следовательно, скорость прецессии – постоянная величина. То есть, в случае ограничений (19) имеем вырождение полурегулярной прецессии в регулярную. Из формул (15), (16) найдем

$$\lambda_1(t) = \frac{nA_3(B_1 + 2k) + 2A_1(s_3 + nB_2)}{2nA_3} \sin nt,$$

$$\lambda_2(t) = \frac{nA_3(B_1 + 2k) + 2A_2(s_3 + nB_2)}{2nA_3} \cos nt.$$

Таким образом, при выполнении условий (19) угловая скорость гиростата, как следует из (4), имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\boldsymbol{\nu},$$

где $m = -\frac{s_3 + nB_1}{nA_3}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ выражаются по формулам (6).

Вариант № 2. Рассмотрим уравнение (18) при условиях

$$a_0 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad C_1 = C_2.$$

Тогда имеем

$$\dot{\psi}(t) = u(t) = \frac{1}{2A_3} [(B_2 - B_1) \cos 2nt - (B_1 + B_2) - \frac{2s_3}{n}]. \quad (20)$$

Полагая $B_2 \neq B_1$, $s_3 \neq -\frac{n}{2}(B_1 + B_2)$, из уравнения (20) получим

$$\psi(t) = \frac{1}{2nA_3} \left[\frac{B_2 - B_1}{2} \sin 2nt - (s_3 + nB_1 + nB_2)t \right] + \psi_0, \quad (21)$$

где $\psi_0 = \text{const}$. Зависимость (21) показывает, что $\psi(t)$ – условно периодическая функция, имеющая вековую составляющую. Данное решение является частным случаем решения из [15], поскольку в (21) матрицы A , B , C являются диагональными.

Вариант № 3. Пусть имеют место ограничения

$$a_0 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 \neq C_1, \quad s_3 = -nB_1. \quad (22)$$

Обозначим $\mu = C_2 - C_1$. В силу (22) уравнение (18) принимает вид

$$\frac{1}{2}\mu\dot{u}(t)\sin 2nt - n\mu u(t)\cos 2nt + nA_3u^3(t) = 0$$

и допускает решение $u(t) = \frac{\sqrt{\mu}\cos nt\sin nt}{\sqrt{c\mu - A_3\cos^2 nt}}$ (c – произвольная постоянная).

Следовательно,

$$\psi(t) = \int u(t)dt = \frac{\sqrt{\mu}}{nA_3}\sqrt{c\mu - A_3\cos^2 nt} + \psi_1,$$

где $\psi_1 = \text{const}$. Таким образом, угол прецессии – периодическая функция с периодом $T = \frac{\pi}{n}$.

Компоненты $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ гиросtatического момента $\lambda(t)$ найдем из (15), (16); период этих функций $T = \frac{2\pi}{n}$.

Условия (22) можно ослабить: не обязательно требовать принадлежности центра масс гиростата третьей оси. В таком случае уравнение (18) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\dot{u}(t)(s_1\cos nt - s_2\sin nt + \mu\sin nt\cos nt) + \\ &+ nu(t)(s_1\sin nt + s_2\cos nt - \mu\cos 2nt) + u^3(t)nA_3 = 0 \end{aligned}$$

и с помощью замены $v(t) = s_1\cos nt - s_2\sin nt + \frac{1}{2}\mu\sin 2nt$ представим его в виде

$$-\left(\frac{v(t)}{u(t)}\right)' + nA_3u(t) = 0. \quad (23)$$

Пусть $w = c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)$, где c_0 – произвольная постоянная. Легко проверить, что функция $u(t) = \frac{\dot{w}}{4nA_3\sqrt{w}} = \frac{2v}{\sqrt{w}}$ является решением уравнения (23). Скорость прецессии такова

$$\dot{\psi}(t) = \frac{2s_1\cos nt - 2s_2\sin nt + \mu\sin 2nt}{\sqrt{c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)}}.$$

Угол прецессии находится путем интегрирования уравнения

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\dot{w}}{4nA_3\sqrt{w}},$$

т. е.

$$\psi(t) = \frac{1}{2nA_3}\sqrt{c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)} + \psi_2,$$

где $\psi_2 = \text{const}$. Период полученного решения, в отличие от случая $s_1 = s_2 = 0$, равен $T = \frac{2\pi}{n}$. Компоненты гиросtatического момента определяются из (15), (16).

Вариант № 4. Зададим равенства

$$B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = a_0(C_3 - C_1) - nB_1, \quad (24)$$

$$k = \frac{1}{a_0}(nA_3 + \frac{a_0 a_0^2}{2}(B_1 - 2B_3)) - \frac{a_0^2}{2}B_3.$$

При этом полагаем $a_0 \neq 0$. Для записи уравнения (18) при условиях (24) вместо переменной t введем безразмерное время $\tau = nt$. Обозначая дифференцирование по τ штрихом, из (18) получим

$$\psi'(\tau)\psi'''(\tau) - (\psi''(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^4 = 0. \quad (25)$$

Общее решение уравнения (25) таково

$$\psi(t) = \arctg \operatorname{sh}(c_1^* nt + c_2^*) + \psi_3, \quad (26)$$

где ψ_3, c_1^*, c_2^* — произвольные постоянные. На основании (26) компоненты $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ из (15), (16) преобразуются к виду

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{a_0'} \left[-a_0 n c_1^* A_3 \cos nt \operatorname{th}(c_1^* nt + c_2^*) - n n_1 c_1^* \frac{\sin nt}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)} + m_1 \sin nt \right],$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{a_0'} \left[a_0 A_3 n c_1^* \sin nt \operatorname{th}(c_1^* nt + c_2^*) - n n_2 c_1^* \frac{\cos nt}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)} + m_2 \cos nt \right].$$

Примечательным свойством полученного решения является непериодический характер указанных компонент $\lambda_i(t)$.

В варианте 4 угловая скорость гиростата в силу (4) и (26) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = n \left(\mathbf{a} + \frac{c_1^* \boldsymbol{\nu}}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)} \right),$$

откуда следует, что при $t \rightarrow \infty$ вектор угловой скорости стремится к вектору

$$\boldsymbol{\omega}^* = n \mathbf{a}, \quad (27)$$

т. е. гиростат при $t \rightarrow \infty$ стремится к равномерному вращению с угловой скоростью (27), которая не коллинеарна вектору вертикали $\boldsymbol{\nu}$.

Заключение. Получены дифференциальные уравнения движения гиростата в случае прецессии второго типа. Эти уравнения (8)–(10) редуцированы к одному уравнению (18) на скорость прецессии. В предположении ортогональности гиростатического момента оси собственного вращения гиростата получены четыре решения приведенного уравнения. Первые три решения характеризуются свойством ортогональности оси собственного вращения вектору оси симметрии силовых полей.

Ни в одном из решений нет ограничений на главные моменты инерции гиростата. В четвертом решении ось собственного вращения не ортогональна вектору оси симметрии силовых полей; компоненты гиростатического момента выражаются через тригонометрические и гиперболические функции времени; движение гиростата асимптотически стремится к равномерному вращению относительно наклонной оси в неподвижном пространстве.

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной каплевой жидкостью // Собр. соч. – М.;Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 1. – С. 152–310.
2. Румянцев В.В. Об уравнении ориентации и о стабилизации спутника ротора // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
3. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
6. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
8. Мазнев А.В., Котов Г.А. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.
9. Горр Г.В., Щетлицина Е.К. Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 16–26.
10. Котов Г.А. Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.
11. Горр Г.В., Котов Г.А. О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40–50.
12. Горр Г.В., Кошель Ю.В. Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 45–54.
13. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
14. Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
15. Котов Г.А. О полурегулярных прецессиях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 37–44.

G.A. Kotov, A.I. Shmigal

On the second type precessions of a gyrostat with the variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces

The problem of motion of a gyrostat carrying two rotors under the action of potential and gyroscopic forces is considered. Conditions of existence of precession motions of the gyrostat with permanent self-rotation velocity are studied. The equations of motions are reduced to one differential equation for the precession velocity of the gyrostat and new solutions of this equation are obtained.

Keywords: *second type precessions, two rotors, gyrostat with variable gyrostatic moment.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства и архитектуры”, Макеевка,
ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
kotov_ga@rambler.ru, agreena@mail.ru

Получено 25.05.17