УДК 517.95

Н. В. Житарашу

ФОРМУЛА ГРИНА И СУЩЕСТВОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛАБЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

В статье рассматривается вопрос о существовании обобщенных начальных и граничных значений слабых обобщенных (в смысле $\mathscr{D}'(\Omega)$) решений линейных параболических уравнений и систем в цилиндрической области Ω.

1. Обозначения. Формула Грина в случае гладких функций. Пусть G — ограниченная область R^n с гладкой границей $\partial G \in C^\infty$, $\Omega = G \times (0, T)$, $S = \partial G \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, ν — орт внутренней нормали к ∂G; $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $[\cdot, \cdot]$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ — скалярные произведения (и их расширения) в $L_2(\Omega)$, $L_2(S)$, $L_2(G)$ и $L_2(\partial G)$. Для любого $s \geqslant 0$ обозначим через $H^s(G)$, $H^s(\partial G)$ и $\mathscr{H}^s(\Omega) = \mathscr{H}^{ss/2b}_{xt}(\Omega)$, $\mathscr{H}^s(S) = \mathscr{H}^{ss/2b}_{x't}(S)$ $(0 < b$ — целое фиксированное) изотропные и анизотропные L_2-пространства Соболева — Слободецкого, а для $-s < 0$ обозначим через $\mathscr{H}^{-s}(\Omega) = (\mathscr{H}^s(\Omega))^*$, $\mathscr{H}^{-s}(S) = (\mathscr{H}^s(S))^*$, $H^{-s}(G) = (H^s(G))^*$, $H^{-s}(\partial G) = (H^s(\partial G))^*$ — сопряженные пространства относительно расширений скалярных произведений в L_2 с обычными нормами сопряженных пространств, $\|\cdot, \Omega\|_s$ $\langle\langle \cdot, S \rangle\rangle_s$, $|[\cdot, G]|_s$, $\langle\langle \cdot, \partial G \rangle\rangle'_s$ — нормы в $\mathscr{H}^s(\Omega)$, $\mathscr{H}^s(S)$, $H^s(G)$, $H^s(\partial G)$, $s \in R^1$. Отметим, что при $s < 0$ $H^s(G) \approx H^s_{\bar{G}}(R^n)$, $\mathscr{H}^s(\Omega) \approx \mathscr{H}^s_{\bar{\Omega}}(R^{n+1})$.

В области Ω задан линейный параболический (по Петровскому) оператор $\mathscr{L}(x, t, D, D_t) = (l_{ij})^m_{i,j=1}$ $(\operatorname{ord} l_{ij} = t_j = 2bt'_j$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m$,

t'_j — целые) с достаточно гладкими коэффициентами, пусть запись $\mathscr{L}$ вблизи S имеет вид

$$l_{ij}(\cdot, D, D_t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{t_j} l_{ij, t_j-\alpha}(\cdot, D', D_t)\, D_\nu^\alpha \equiv \sum_{\beta=0}^{t'_j} \Lambda_{ij, t'_j-\beta}(\cdot, D)\, D_t^\beta,$$

где D' и D_ν означают дифференцирование по касательным (к ∂G) переменным x' и по нормали ν. Для полиномов $l(\cdot, p)$ и $\Lambda(\cdot, \xi_n)$ по p и ξ_n определим полиномы $l^{(\lambda)}(\cdot, p)$ и $\Lambda^{(k)}(\cdot, \xi_n)$ как целые части деления $l(\cdot, p)$ и $\Lambda(\cdot, \xi_n)$ на p^λ и ξ_n^k соответственно и обозначим через

$$l_{ij}^{(k,\lambda)}(\cdot, D_\nu, D_t) \equiv \sum_{\alpha=k}^{t_j} l_{ij, t_j-\alpha}^{(\lambda)}(\cdot, D_t)\, D_\nu^{\alpha-k} \equiv \sum_{\beta=\lambda}^{t'_j} \Lambda_{ij, t'_j-\beta}^{(k)}(\cdot, D_\nu) \cdot D_t^{\beta-\lambda},$$

l_{ij}^*, $l_{ij}^{(k,\lambda)*}$ — формально сопряженные (по Лагранжу) операторы, а через P_j — множество пар индексов (k, λ), для которых существует $l_{ij}^{(k,\lambda)} \not\equiv 0$.

Пусть $u = (u_1, .., u_m)$, $u_j(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u_{j0}(x, t) = u_j|_{\bar{\Omega}}$, $u_{jk}(x', t) = D_\nu^{k-1} u|_{\bar{S}}$, $v_{j\lambda}(x) = D_t^{\lambda-1} u_j(x, 0)|_{\bar{G}}$, $\omega_{j\lambda k}(x') = D_\nu^{k-1} D_t^{\lambda-1} u_j|_{\partial G}$, $u_0 = (u_{10}, \ldots, u_{m0})$, $f_i(x, t) = \sum_{i=1}^m l_{ij} u_j$, $f_0 = (f_{10}, \ldots, f_{m0})$.

Интегрируя по частям, убеждаемся в том, что для любой вектор-функции $w = (w_1, \ldots, w_m)$ с $w(x, t) \in \overset{0}{C}{}^\infty(\bar{\Omega})$ (равной нулю вблизи $t = T$) справедлива следующая формула Грина:

$$(u_0, \mathscr{L}^* w) - \sum_{j: t_j \geqslant 1} \sum_{k=1}^{t_j} \langle u_{jk}, (N^k w)_j \rangle - \sum_{j: t'_j \geqslant 1} \sum_{\lambda=1}^{t'_j} [v_{j\lambda}, (Q^\lambda w)_j] - \tag{1}$$

$$- \sum_{j: t'_j > 1} \sum_{(k,\lambda) \in P_j} \langle \omega_{j\lambda k}, (Q^{\lambda k} w)_j \rangle' = (f_0, w),$$

где

$$(N^k w)_j = \sum_{i: k \leqslant t_j} l_{ij}^{(k,0)*} w_i, \quad (Q^\lambda w)_j = \sum_{i: \lambda \leqslant t'_j} l_{ij}^{(0,\lambda)*} w_i;$$

$$(Q^{k\lambda} w)_j = \sum_{i: (k,\lambda) \in P_i} l_{ij}^{(k,\lambda)*} w_i,$$

$\mathscr{L}^*$ — формально сопряженный (по Лагранжу) матричный оператор. В частности, для финитной вектор-функции $w(x, t)$

$$(u_0, \mathscr{L}^* w) = (f_0, w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

В случае распределений u_0 и f_0 равенство (2) означает, что $u_0(x, t)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ является решением системы

$$\mathscr{L}(x, t, D, D_t)\, u_0(x, t) = f_0(x, t). \tag{3}$$

Формула Грина (I) может быть рассмотрена как формула коммутирования оператора $\mathscr{L}$ с оператором умножения на характеристическую (единичную) функцию области $\theta(\Omega)$ на языке теории распределений и непосредственно следует из работы [1]. С другой стороны, равенство (1) фактически есть формула представления функционала $(u_0, \mathscr{L}^* w) - (f_0, w)$ для указанных выше w.

2. Различные формы записи формулы Грина, существование граничных и начальных значений решений в обобщенном смысле. Для $\forall s \in R^1$ обозначим через: а) $s'=[s+1/2]$ при $s\leqslant -t_m+1/2$ и $s'=-t_m$ при $s>-t_m+1/2$; б) $s''=[(s+b)/2b]$ при $s\leqslant -t_m+b$ и $s''=-t_m$ при $s>-t_m+b$. Пусть распределения $u_{j0}(x,t)\in\mathscr{D}'(\Omega)$ в Ω являются решением системы (3). Нас интересует вопрос о том, какими свойствами гладкости обладает $u_0(x,t)$ вблизи границы области Ω и в каком смысле можно говорить о существовании граничных и начальных значений $u_0(x,t)$ на S, G и ∂G в зависимости от гладкости $f_0(x,t)$ в $\overline{G}\times[0,T)$.

Теорема 1. Пусть $s<-t_m+1/2$ и $u_0(x,t)\in\prod_{j=1}^{m}\mathscr{H}^{s+t_j}(\Omega)$ внутри Ω является слабым обобщенным решением системы (3) с $f_{i0}(x,t)\in\mathscr{H}^s(\Omega)$. Тогда существуют распределения

$$u_{jk}(x',t)\in\mathscr{H}^{s+t_j-k+1/2}(S),\quad k=1,\dots t_j;\quad \tilde{u}_{jq}(x',t)\in\mathscr{H}^{s+t_j+q+1/2}(S),$$
$$q=0,\dots,-s'-t_j-1;$$
$$v_{j\lambda}(x)\in H^{s+t_j-2b\lambda+b}(G),\quad \lambda=1,\dots,t_j';\quad \tilde{v}_{j\mu}(x)\in H^{s+t_j+2b\mu+b}(G),$$
$$\mu=0,\dots,-s''-t_j'-1,$$

такие, что для $w\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega})$ справедливо равенство

$$(u_0,\mathscr{L}^*w)-\sum_{j:t_j'\geqslant 1}\sum_{k=1}^{t_j}\langle u_{jk},(N^kw)_j\rangle+\sum_{j:-s'-t_j\geqslant 1}\sum_{q=0}^{-s'-t_j-1}\langle\tilde{u}_{jq},\overline{D}{}_\nu^q(\mathscr{L}^*w)_j\rangle-$$
$$-\sum_{j:t_j'\geqslant 1}\sum_{\lambda=1}^{t_j'}[v_{j\lambda},(Q^\lambda w)_j]+\sum_{j:-s''-t_j'\geqslant 1}\sum_{\mu=0}^{-s''-t_j'-1}[\tilde{v}_{j\mu},\overline{D}{}_t^\mu(\mathscr{L}^*w)_j]=$$
$$=(f_0,w),\quad \overline{D}_\nu=-D_\nu,\quad \overline{D}_t=-D_t. \tag{4}$$

Существует постоянная C_s такая, что

$$\langle\langle u_{jk},S\rangle\rangle_{s+t_j-k+1/2}+\langle\langle\tilde{u}_{jq},S\rangle\rangle_{s+t_j+q+1/2}+|[v_{j\lambda},G]|_{s+t_j-2b\lambda+b}+$$
$$+|[\tilde{v}_{j\mu},G]|_{s+t_j+2b\mu+b}<C_s(\|u_{j0},\Omega\|_{s+t_j}+\sum_{i=1}^{m}\|f_{i0},\Omega\|_s),$$

где повторение всех индексов означает суммирование по всем соответствующим им значениям. Распределения u_{jk}, $\tilde{u}_{jq}$, $v_{j\lambda}$ и $\tilde{v}_{j\mu}$ определяются однозначно с точностью до слагаемых, сосредоточенных на ∂G и удовлетворяющих однородному равенству (4): $u_0(x,t)\equiv f_0(x,t)\equiv 0$.

Чтобы лучше понять смысл теоремы 1, преобразуем равенство (4) следующим образом. Используя определения δ-функций $\delta(\partial G)$ и $\delta(t)$, представим скалярные произведения, содержащие $\tilde{u}_{jq}(x',t)$ и $\tilde{v}_{j\mu}(x)$, в виде скалярных произведений $(\cdot,\cdot)$ по Ω, затем в этих скалярных произведениях перебросим D_ν^q и D_t^μ на множители $\tilde{u}_{jq}(x',t)\times\delta(\partial G)$ и $\tilde{v}_{j\mu}(x)\times\delta(t)$ соответственно. Обозначим через

$$u_{j0}'(x,t)=\sum_{q=0}^{-s'-t_j-1}D_\nu^q(\tilde{u}_{jq}(x',t)\times\delta(\partial G))\ \forall j:-s'-t_j\geqslant 1,$$
$$v_{j0}'(x,t)=\sum_{\mu=0}^{-s''-t_j'-1}D_t^\mu(\tilde{v}_{j\mu}(x)\times\delta(t))\quad\forall j:-s''-t_j'\geqslant 1$$

и $u_{j0}'(x,t)\equiv 0$, $v_{j0}'(x,t)\equiv 0$ для остальных j, $u_0'=(u_{10}',\dots,u_{m0}')$, $v_0'=(v_{10}',\dots,v_{m0}')$. Тогда равенство (4) перепишется в виде

$$(u_0+u_0'+v_0',\mathscr{L}^*w)-\sum_{j:t_j\geqslant 1}\sum_{k=1}^{t_j}\langle u_{jk},(N^kw)_j\rangle-$$
$$-\sum_{j:t_j'\geqslant 1}\sum_{\lambda=1}^{t_j'}[v_{j\lambda},(Q^\lambda w)_j]=(f_0,w),\quad\forall w\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega}) \tag{5}$$

и распределения u_0', v_0', u_{jk}, $v_{j\lambda}$ однозначно определятся с точностью до распределений, сосредоточенных на ∂G. Теорема 1 доказана в [2]. Оказывается, формулу (5) можно представить в виде (1) и указать условия однозначности такого представления.

Теорема 2. Пусть $u_0(x, t) \in \prod_{j=1}^{m} \mathscr{H}^{s+t_j}(\Omega)$ внутри Ω является решением системы (3) с $f_0(x, t) \in \prod_{i=1}^{m} \mathscr{H}^{s}(\Omega)$, $s \in R^1$. Тогда для любых распределений $\omega_{j\lambda k}(x') \in H^{s+t_j-k-2b\lambda+b+1/2}(\partial G)$ с $(k, \lambda) \in P_j$ $(\omega_{j\lambda k}(x') = D_\nu^{k-1} D_t^{\lambda-1} u_0|_{\partial G}$ при $s+t_j-k-2b\lambda+b+1/2 > 0)$ существуют распределения $u_{j0}'(x, t)$ $(\equiv 0$ при $s+t_j \geqslant 1/2)$, $v_{j0}'(x, t)$ $(\equiv 0$ при $s+t_j \geqslant -b)$, $u_{jk}(x', t)$ и $v_{j\lambda}(x)$, принадлежащие указанным выше пространствам и такие, что распределения $U_0(x, t) = u_0(x, t) + u_0'(x, t) + v_0'(x, t)$, $u_{jk}(x', t)$, $v_{j\lambda}(x)$ и $\omega_{j\lambda k}(x')$ удовлетворяют равенству (1). Эти распределения определяются однозначно с точностью до слагаемых, сосредоточенных на ∂G и удовлетворяющих однородному равенству (1) $u_0(x, t) \equiv f_0(x, t) \equiv 0$. При фиксированных $v_{j0}'(x, t)$, $v_{j\lambda}(x)$ и $\omega_{j\lambda k}(x')$ указанный набор распределений определяется однозначно.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2] и основано на леммах 3 и 4 из [2].

Распределения $u_{jk}(x', t)$, $v_{j\lambda}(x)$ и $\omega_{j\lambda k}(x')$, удовлетворяющие равенству (1) и играющие в этом смысле роль значений $D_\nu^{k-1} u_0|_{\bar S}$, $D_t^{\lambda-1} u_0|_{\bar G}$ и $D_\nu^{k-1} D_t^{\lambda-1} u_0|_{\partial G}$, называем обобщенными граничными и начальными значениями решения $u_0(x, t)$ системы (3). Они обладают тем свойством, что повышение гладкости $u_0(x, t)$ в $f_0(x, t)$ приводит к тому, что эти обобщенные граничные и начальные значения принимаются соответственно в сильном или предельном смысле. Заметим, что в теореме 2 остается произвол только при определении тех компонент u_{j0}', v_{j0}', u_{jk}, $v_{j\lambda}$, которые могут содержать сосредоточенные на ∂G слагаемые.

3. Существование предельных значений слабых обобщенных решений. В смысле определений, данных в работах [3—5], формула (1) означает, что элементы $u_j(x, t)$ (пространств $\widetilde{\mathscr{H}}^{s+t_j}_{(t_j', t_j, P_j)}(\Omega)$) $(j = 1, \ldots, m)$ с компонентами $(u_0, u_{jk}, v_{j\lambda}, \omega_{j\lambda k}, (k, \lambda) \in P_j)$ являются обобщенным (сильным) решением системы $\mathscr{L}u = f$ в Ω, а теорема 2 фактически утверждает, что по слабому обобщенному решению $u_0(x, t)$ и правой части $f_0(x, t)$ системы (3) сильное обобщенное решение «восстанавливается» с точностью до распределений, указанных выше. Поэтому, предполагая, что для системы (3) существует параболическая краевая задача, и используя теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений параболических краевых задач [3—5], как и в эллиптической теории краевых задач [6], можно доказать теоремы о существовании предельных значений решений на S, G и ∂G. Для простоты ограничимся рассмотрением одного параболического уравнения и приведем формулировку одной теоремы о предельных значениях типа теорем, доказанных в [6—8] для эллиптических и параболических уравнений.

В силу гладкости ∂G существует ε_0-окрестность ∂G, такая, что через каждую ее точку x проходит единственная нормаль ν к ∂G. Пусть $G_\varepsilon = \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) > \varepsilon\}$, $\{\partial G_\varepsilon\}$ — семейство поверхностей, «параллельных» ∂G. Тогда отображение $x \to y = x + \varepsilon\nu$ — диффеоморфизм ∂G на ∂G_ε, а диффеоморфизм $\alpha_\varepsilon : x \to y = x + \varepsilon\nu$, $t = t$ порождает изоморфизм α_ε^* множества распределений $u(y, t)$, определенных на $S_\varepsilon^\delta = \partial G_\varepsilon \times (\delta, T)$, в множество распределений $u(\alpha_\varepsilon(x), t) = \alpha_\varepsilon^* u(y, t)$, определенных на S_0^δ. Для функций $u(x, t)$, заданных в Ω, обозначим через $u_k(y, t) = D_\nu^{k-1} u_0|_{S_\varepsilon^\delta}$.

Теорема 3. Пусть $L(x, t, D, D_t)$ — скалярный, равномерно параболический оператор порядка $2m = 2br$ в $\overline{\Omega}$ и внутри Ω $u_0(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является решением уравнения $Lu_0 = f_0(x, t) \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, где $-\sigma - 1/2 \leqslant s < -\sigma + 1/2$, $\sigma \in [1, m]$, σ — целое.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $u_0(x, t) \in \mathcal{H}^{s+2m}(\Omega)$;

2) существуют функции $u_k(x', t)$ $(k = 1, \ldots, 2m - \sigma)$ и $v_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, \ldots, \lambda_0 = [(2m + s)/2b])$ такие, что

$$\| \overset{*}{\alpha}_\varepsilon u_k(y, t) - u_k(x', t), S_\varepsilon^\delta \|_{s+2m-k+1/2} \to 0,$$

$$|[D_t^{\lambda-1} u_0(x, \delta) - v_\lambda(x), G_\varepsilon]|_{s+2m-2b\lambda+b} \to 0$$

при $(\varepsilon, \delta) \to 0$;

3) нормы $\| D_\nu^{k-1} u_0(y, t), S_\varepsilon^\delta \|_{s+2m-k+1/2}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $|[D_t^{\lambda-1} u_0(x, \delta), G_\varepsilon]|_{s+2m-2b\lambda+b}$ $(\lambda = 1, \ldots, \lambda_0)$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ ограничены.

1. *Житарашу Н. В.* О формуле частичного и полного коммутирования операторов L (; D, D_t) и $\theta(x_n)\,\theta(t)$, модельной формуле Грина и двойном преобразовании Лапласа // Мат. исслед.— 1986.— Вып. 88.— С. 32—39.
2. *Житарашу Н. В.* О граничных значениях обобщенных решений систем параболических уравнений // Там же.— 1988.— Вып. 90.— С. 15—18.
3. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического (по И. Г. Петровскому) уравнения // Мат. сб.— 1985.— **128**, № 4.— С. 451—473.
4. *Житарашу Н. В.* Теоремы об изоморфизмах в L_2-теории слабых решений параболических граничных задач // Докл. АН СССР.— 1981.— **260**, № 5.— С. 1054—1058.
5. *Житарашу Н. В.* О корректной разрешимости общих модельных параболических граничных задач в пространствах $H^s(\Omega)$, $-\infty < s < \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— **51**, № 5.— С. 962—993.
6. *Ройтберг Я. А.* О существовании предельных значений обобщенных решений эллиптических уравнений на границе области // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 386—396.
7. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1979.— **108**.— С. 3—21.
8. *Петрушко И. М.* О граничных и начальных условиях в L_p, $p > 1$, решений параболических уравнений // Там же.— 1984.— **125**, № 4.— С. 489—521.

Ин-т математики, Вычисл. центр АН МССР, Кишинев

Получено 29.09.87