УДК 531.38; 531.39

©2019. **Г.В. Горр, Т.В. Балаклицкая**

О ДВИЖЕНИИ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В СЛУЧАЕ ПРЕЦЕССИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛИ

Рассмотрена постановка задачи о движении главных осей инерции тела в пространстве в случае прецессии относительно вертикали. Полагается, что известно решение в прецессионной системе координат. Найдены углы Эйлера, которые определяют положение главной системы координат тела в неподвижном пространстве. Получены явные значения компонент вектора, направленного по главной оси, через параметры и переменные, которые задают прецессию тела в прецессионной системе координат.

Ключевые слова: *прецессия, главная и прецессионная системы координат, углы Эйлера, апекс главной оси.*

Введение. Прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой относятся к классам движений, которые находят широкое применение на практике (прецессии гироскопа, навигационных приборов, спутников и других объектов современной техники). Регулярная прецессия симметричного твердого тела, имеющая место в классическом решении Ж. Лагранжа [1, 2], описана во многих учебниках и монографиях (см., например, [2]). Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [3] выполнили обширное исследование движения гироскопа Ж. Лагранжа, учтя при этом все динамические эффекты действующих на него сил и моментов. Итальянский механик Д. Гриоли открыл регулярную прецессию несимметричного тела относительно наклонной оси [4]. Он рассмотрел общую теорию прецессионных движений [5] и ввел понятие обобщенных прецессионных движений [6]. В статье [7] приведен обзор результатов, полученных в исследовании прецессий тяжелого гиростата и показано, что существует прецессия общего вида, для которой постоянно произведение скоростей прецессии и собственного вращения тела. Эта прецессия описывается решением А.И. Докшевича [8, с. 136]. В монографии [9] исследованы условия существования прецессий тела в обобщенных силовых полях и указана литература, посвященная прецессиям тела. Представляет большой интерес прецессия тела, указанная А. Брессаном [10], поскольку она относится к прецессии относительно горизонтальной оси в пространстве и описывается частным случаем решения В. Гесса [11]. Прецессионные движения рассмотрены и в динамике систем связанных твердых тел. Например, в [12] показана динамическая невозможность прецессии Гриоли в задаче о движении твердого тела, подвешенного на стержне; в [13] найдены полурегулярные прецессии гироскопа Гесса в задаче о движении системы двух твердых тел. Обобщение результатов [13] получено в статье [14]; значение их для динамики систем твердых тел состоит в том, что рассматриваемая в [14] система тел может состоять как из гироскопов Лагранжа, так и из гироскопов Гесса.

В последние годы проведены значительные исследования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом (см. обзоры в [15, 16]).

Отмеченные выше исследования прецессионных движений проводились в прецессионной системе координат (системе, одна из осей которой направлена по вектору, образующему постоянный угол между фиксированной в теле осью и неподвижной осью). Представляет большой интерес изучение движения главных осей инерции тела в пространстве для всех классов прецессий тела. Постановка задачи и общий метод ее решения даны в настоящей статье. В качестве примеров рассмотрены равномерные вращения, регулярные прецессии и прецессии общего вида [8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим прецессии твердого тела S, имеющего неподвижную точку. Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы осей подвижной системы координат $Oxyz$ (O – неподвижная точка); $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор в этой системе. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ угловую скорость тела, через $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор оси симметрии силового поля действующих на тело сил. Например, если на тело действует только сила тяжести, то вектор $\boldsymbol{\nu}$ будем полагать единичным вектором этой силы; если на тело действуют потенциальные и гироскопические силы, то вектор $\boldsymbol{\nu}$ будем направлять по оси симметрии совокупного силового поля.

Прецессией тела относительно $\boldsymbol{\nu}$ (вертикали) называют движение, при котором постоянен угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ [3–7]. Она может быть определена инвариантным соотношением (ИС) [9]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0,\ \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})). \tag{1}$$

Для вектора $\boldsymbol{\nu}$ имеет место уравнение Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где точкой обозначена относительная производная вектора $\boldsymbol{\nu}$. Очевидно, что в силу неизменности вектора $\boldsymbol{a}$ по отношению к телу, имеет место равенство

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Вычисляя производную от ИС (1), в силу уравнений (2), (3), получим, что смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}$ равно нулю. Полагая $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\nu}$, для вектора $\boldsymbol{\omega}$ получим разложение [9]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где φ, ψ – углы Эйлера: собственного вращения и прецессии соответственно.

Назовем систему координат $Oxyz$ прецессионной системой, если $\boldsymbol{a} = \mathbf{i}_3$. В этой системе будем обозначать векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через $\boldsymbol{\nu}_\Pi$ и $\boldsymbol{\omega}_\Pi$, т. е.

$$\boldsymbol{\nu}_\Pi = \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\Pi = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3. \tag{6}$$

Запишем компоненты векторов (5), (6), используя результаты [9], которые получены из соотношений (1) – (4) и геометрического интеграла:

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{7}$$

$$\omega_1 = a_0' \dot\psi \sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0' \dot\psi \cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot\varphi + a_0 \dot\psi, \tag{8}$$

где $a_0' = \sin\theta$.

Свяжем с телом S вторую систему координат $Ox^*y^*z^*$, оси которой направим по главным осям инерции тела. Единичные векторы этой системы координат обозначим через $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_1, \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2, \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3$. Полагаем

$$\boldsymbol{\nu}_\Gamma = \nu_1^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_1 + \nu_2^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2 + \nu_3^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\Gamma = \omega_1^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_1 + \omega_2^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2 + \omega_3^* \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3 \ . \tag{10}$$

В неподвижном пространстве введем систему координат $O\xi\eta\zeta$, единичные векторы этой системы обозначим через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\nu}$. Пусть u, v, w – углы Эйлера, которые определяют положение главной системы координат в системе $O\xi\eta\zeta$. Тогда компоненты векторов (9), (10) запишем в виде [2]

$$\nu_1^* = \sin u \sin\vartheta, \qquad \nu_2^* = \sin u \cos\vartheta, \qquad \nu_3^* = \cos u, \tag{11}$$

$$\omega_1^* = \dot w \sin u \sin\vartheta + \dot u \cos\vartheta, \quad \omega_2^* = \dot w \sin u \cos\vartheta - \dot u \sin\vartheta, \quad \omega_3^* = \dot v + \dot w \cos u, \tag{12}$$

где w – угол прецессии, u – угол нутации, ϑ – угол собственного вращения тела, которые определяют положение главной системы в пространстве.

Рассмотрим связь между прецессионной и главной системами координат. Для этой цели введем постоянные параметры α, β, γ, с помощью которых определим матрицу ориентации [2]

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta, \quad a_{12} = \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta, \\
&a_{13} = \sin\gamma\sin\beta, \qquad a_{21} = -\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha\cos\beta, \\
&a_{22} = -\sin\gamma\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha\cos\beta, \qquad a_{23} = \cos\gamma\sin\beta, \\
&a_{31} = \sin\alpha\sin\beta, \qquad a_{32} = -\cos\alpha\sin\beta, \qquad a_{33} = \cos\beta.
\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда в силу (12), (13) получим следующую связь базисов прецессионной и главной систем координат:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= a_{11} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_1 + a_{12} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2 + a_{13} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3, \\
\mathbf{i}_2 &= a_{21} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_1 + a_{22} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2 + a_{23} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3, \\
\mathbf{i}_3 &= a_{31} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_1 + a_{32} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_2 + a_{33} \ \boldsymbol{\mathfrak{э}}_3 \ .
\end{aligned} \tag{14}$$

Компоненты матрицы E удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}
a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1, \quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, \quad a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1, \\
a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0, \quad a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0, \\
a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0, \quad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0, \\
a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0, \quad a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0, \\
a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1, \quad a_{12}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, \quad a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1.
\end{gathered} \tag{15}$$

В настоящей статье полагаем, что рассматриваемое прецессионное движение тела найдено в прецессионной системе координат, т. е. известны функции $\varphi(t), \psi(t)$. Данное предположение позволяет в силу (5) – (8) построить вектор-функции (5), (6):

$$\boldsymbol{\nu}_\Pi = a_0' \sin\varphi\, \mathbf{i}_1 + a_0' \cos\varphi\, \mathbf{i}_2 + a_0\, \mathbf{i}_3, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\Pi = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi\, \mathbf{i}_1 + a_0'\dot{\psi}\cos\varphi\, \mathbf{i}_2 + (\dot{\varphi} + a_0\dot{\psi})\, \mathbf{i}_3. \tag{17}$$

Для получения вектор-функций (9), (10) подставим величины (14) в равенства (16), (17). Тогда получим

$$\begin{aligned}
\nu_1^* &= a_0 a_{31} + a_0'(a_{11}\sin\varphi + a_{21}\cos\varphi), \\
\nu_2^* &= a_0 a_{32} + a_0'(a_{12}\sin\varphi + a_{22}\cos\varphi), \\
\nu_3^* &= a_0 a_{33} + a_0'(a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\omega_1^* = a_{31}\dot{\varphi} + \dot{\psi}\nu_1^*, \quad \omega_2^* = a_{32}\dot{\varphi} + \dot{\psi}\nu_2^*, \quad \omega_3^* = a_{33}\dot{\varphi} + \dot{\psi}\nu_3^*. \tag{19}$$

Поскольку ν_i^*, ω_i^* найдены в виде (18), (19), то найти углы Эйлера u, v, w, от которых зависят функции (11), (12), можно на основании формул [16, с. 349]:

$$\begin{gathered}
u = \arccos \nu_3^*, \qquad v = \operatorname{arctg} \frac{\nu_1^*}{\nu_2^*}, \\
\dot{w} = \frac{(\boldsymbol{\omega}_\Gamma \times\, \boldsymbol{э}_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}_\Gamma \times\, \boldsymbol{э}_3)}{(\boldsymbol{\nu}_\Gamma \times\, \boldsymbol{э}_3)^2}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Сформулируем постановку задачи: ***исследовать движение главных осей инерции тела в случае прецессий тела относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$.***

Далее, не умаляя общности, будет изучено движение третьей главной оси инерции, единичный вектор которой в неподвижном пространстве имеет вид

$$\boldsymbol{э}_3 = \sin u \sin w\, \mathbf{r}_1 - \sin u \cos w\, \mathbf{r}_2 + \cos u\, \mathbf{r}_3, \tag{21}$$

а углы Эйлера u, v, w удовлетворяют уравнениям (20).

2. Метод решения задачи. Подставим $\nu_i^*,\ \omega_i^*\ \ (i=\overline{1,3})$ из (18), (19) в соотношения (20) и воспользуемся условиями (15):

$$u=\arccos\left[a_0a_{33}+a_0'(a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi)\right], \tag{22}$$

$$v=\operatorname{arctg}\frac{a_0a_{31}+a_0'(a_{11}\sin\varphi+a_{21}\cos\varphi)}{a_0a_{32}+a_0'(a_{12}\sin\varphi+a_{22}\cos\varphi)}, \tag{23}$$

$$w=\psi+\int\frac{\Phi_1(\varphi)d\,\varphi}{\Phi_2(\varphi)}, \tag{24}$$

где

$$\Phi_1(\varphi)=a_0(1-a_{33}^2)-a_{33}a_0'(a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi),$$

$$\Phi_2(\varphi)=\frac{1}{2}\left[(1+a_0^2)+a_{33}^2(1-3a_0^2)\right]-2a_0a_0'a_{33}(a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi)+ \tag{25}$$
$$+\frac{1}{2}{a_0'}^2(a_{13}^2-a_{23}^2)\cos 2\varphi-{a_0'}^2a_{13}a_{23}\sin 2\varphi\,.$$

I. Случай, когда вектор a принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции. Анализ условий существования прецессий гиростата в задачах динамики твердого тела [7, 9, 16] показывает, что большинство этих движений имеет следующее свойство: неизменно связанный с телом вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции тела, построенного в неподвижной точке. Поэтому рассмотрим этот случай подробнее. Без ограничения общности положим, что ось Ox с единичным вектором $\mathbf{i}_1$ является главной, т. е. $\mathbf{i}_1=\text{э}_1$. Из равенств (13), (14) следует, что $\alpha=0,\ \gamma=0$. Следовательно, в (13), (14) имеют место равенства

$$\begin{gathered}a_{11}=1,\quad a_{12}=0,\quad a_{13}=0,\quad a_{21}=0,\quad a_{22}=\cos\beta,\\ a_{23}=\sin\beta,\quad a_{31}=0,\quad a_{32}=-\sin\beta,\quad a_{33}=\cos\beta,\end{gathered} \tag{26}$$

при выполнении которых из (14) получим

$$\mathbf{i}_1=\text{э}_1,\qquad \mathbf{i}_2=\cos\beta\ \text{э}_2+\sin\beta\ \text{э}_3,\qquad \mathbf{i}_3=-\sin\beta\ \text{э}_2+\cos\beta\ \text{э}_3\,.$$

Вычисление интеграла из (24) проведем, используя замену $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=z^*$. Тогда получим

$$w=\psi+\frac{1}{a_0'\cos\beta+a_0\sin\beta}\left[\frac{1}{z_1^*}(\sin\beta-a_0')\operatorname{arctg}\frac{z^*}{z_1^*}+\frac{1}{z_2^*}(\sin\beta+a_0')\operatorname{arctg}\frac{z^*}{z_2^*}\right], \tag{27}$$

где

$$\left(z_1^*\right)^2=\frac{(a_0'-\sin\beta)^2}{(a_0'\cos\beta+a_0\sin\beta)^2},\qquad \left(z_2^*\right)^2=\frac{(a_0'+\sin\beta)^2}{(a_0'\cos\beta+a_0\sin\beta)^2}. \tag{28}$$

Рассмотрим три варианта окончательного результата (27) с учетом (28). Если $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, то $a_0 = 0,\ a_0' = 1$ и

$$w = \psi - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\beta \sin\varphi). \tag{29}$$

При $\beta = -\theta_0$ (особый случай) имеем

$$w = \psi - \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{a_0}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Bigr) \quad (a_0 \neq 0). \tag{30}$$

Третий вариант соответствует общему случаю:

$$w = \psi - \operatorname{arctg}\frac{\sin\beta\sin\varphi}{a_0'\cos\beta - a_0\sin\beta\cos\varphi}. \tag{31}$$

Для случая, когда выполняются условия (26), соотношения (22), (23) принимают вид

$$\begin{gathered} u = \arccos(a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\cos\varphi), \\ v = \operatorname{arctg}\frac{a_0'\sin\varphi}{-a_0\sin\beta + a_0'\cos\beta\cos\varphi}. \end{gathered} \tag{32}$$

II. Общий случай. Рассмотренный выше частный случай позволяет получить результат интегрирования и в общем случае. Для этой цели (22), (24) преобразуем так:

$$u = \arccos(a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\cos(\varphi-\gamma)), \tag{33}$$

$$w = \psi + \sin\beta\int\frac{[a_0\sin\beta - a_0'\cos\beta\cos(\varphi-\gamma)]d\,\varphi}{1-\bigl(a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\cos(\varphi-\gamma)\bigr)^2}. \tag{34}$$

Вычисление интеграла (34) целесообразно проводить по аналогии со случаем (31). Тогда результат очевиден:

$$w = \psi + \operatorname{arctg}\frac{\sin\beta\sin(\varphi-\gamma)}{a_0\sin\beta\cos(\varphi-\gamma) - a_0'\cos\beta}. \tag{35}$$

Рассмотрим вектор-функцию (21). Используя равенства (33), (35), получим

$$\text{э}_3 = R_1(\varphi,\psi)\mathbf{r}_1 + R_2(\varphi,\psi)\mathbf{r}_2 + R_3(\varphi)\mathbf{r}_3, \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered} R_1(\varphi,\psi) = (a_0\sin\beta\cos(\varphi-\gamma) - a_0'\cos\beta)\sin\psi + \sin\beta\sin(\varphi-\gamma)\cos\psi, \\ R_2(\varphi,\psi) = \sin\beta\sin(\varphi-\gamma)\sin\psi - (a_0\sin\beta\cos(\varphi-\gamma) - a_0'\cos\beta)\cos\psi, \\ R_3(\varphi) = a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\cos(\varphi-\gamma). \end{gathered} \tag{37}$$

Таким образом, если известны функции $\varphi(t), \psi(t)$, то движение главной оси эллипсоида инерции тела, направленной по вектору $\boldsymbol{\vartheta}_3$, описывается вектор-функцией (36), в которой $R_i(\varphi,\psi)\ \ (i=\overline{1,3})$ определены формулами (37).

Запишем равенства (37) в случае, когда одна из осей прецессионной системы координат является главной. Ранее предполагалось, что главной служит первая координатная ось. Здесь целесообразно рассмотреть вариант, когда вторая ось прецессионной системы координат является главной, так как многие результаты имеют место для этого случая [7,9,16]. Положим в равенствах (13), (37) $\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$, $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&R_1(\varphi,\psi)=(a_0\sin\beta\sin\varphi-a_0'\cos\beta)\sin\psi-\sin\beta\cos\varphi\cos\psi,\\
&R_2(\varphi,\psi)=-(a_0\sin\beta\sin\varphi-a_0'\cos\beta)\cos\psi-\sin\beta\cos\varphi\sin\psi, \qquad (38)\\
&R_3(\varphi)=a_0\cos\beta+a_0'\sin\varphi\sin\beta.
\end{aligned}$$

Поскольку при исследовании функций (38) необходимо знать не только величины a_0, a_0', но и значение угла β, то рассмотрим метод получения β на основе $A_{ij}\ \ (i=\overline{1,3})$, где A_{ij} – элементы тензора инерции A в прецессионной системе координат. Обозначим через $A_i\ \ (i=\overline{1,3})$ главные моменты инерции. Тогда справедливо равенство

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{13}xz=A_1x^{*2}+A_2y^{*2}+A_3z^{*2}, \qquad (39)$$

в котором учтено, что вторая координатная ось системы $Oxyz$ – главная ось инерции ($A_{12}=A_{23}=0$). Выполним в равенстве (39) преобразование поворота

$$x=x^*\cos\beta-y^*\sin\beta, \qquad y=y^*, \qquad z=x^*\sin\beta+y^*\cos\beta. \qquad (40)$$

Подставляя значения (40) в равенство (39), найдем значение β:

$$\beta=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2A_{13}}{A_{11}-A_{33}}, \qquad (41)$$

которое необходимо учитывать в равенствах (38) для **всех** прецессий тела, характеризующихся условиями $A_{12}=0,\ A_{23}=0$. Величины a_0, a_0' необходимо определять для каждого отдельного решения, описывающего прецессию тела. Это обстоятельство относится и к функциям $\varphi(t), \psi(t)$.

3. Некоторые классы прецессий. Равномерное вращение тела относительно наклонной оси можно отнести к вырожденному классу прецессий [9].

Пусть в соотношениях (4), (7), (8), (36), (37) выполняются условия

$$\psi=0, \qquad \varphi=\omega_0 t, \qquad (42)$$

где ω_0 – угловая скорость равномерного вращения тела. Тогда из (38) следует разложение

$$\text{э}_3 = -\sin\beta\cos\omega_0 t\mathbf{r}_1 + (a_0'\cos\beta - a_0\sin\beta\sin\omega_0 t)\mathbf{r}_2 + (a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\sin\omega_0 t)\mathbf{r}_3. \tag{43}$$

Обозначим компоненты вектора (43) через X, Y, Z. Из (43) следуют равенства

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad a_0'Y + a_0 Z = \cos\beta. \tag{44}$$

Из (44) получим, что годограф вектора э_3 – линия пересечения сферы единичного радиуса и плоскости. Движение конца вектора э_3 в пространстве – периодическое с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Рассмотрим регулярные прецессии [9]

$$\psi = mt, \qquad \varphi = nt, \tag{45}$$

где m и n – постоянные. При выполнении равенств (45) компоненты R_i $(i = \overline{1,3})$ таковы

$$\begin{aligned} R_1(t) &= (a_0\sin\beta\sin nt - a_0'\cos\beta)\sin mt - \sin\beta\cos nt\cos mt,\\ R_2(t) &= (a_0'\cos\beta - a_0\sin\beta\sin nt)\cos mt - \sin\beta\cos nt\sin mt,\\ R_3(t) &= a_0\cos\beta + a_0'\sin\beta\sin nt. \end{aligned} \tag{46}$$

Из (46) найдем следующие значения:

$$\sin nt = \frac{1}{a_0'\sin\beta}\big(R_3 - a_0\cos\beta\big),$$

$$\sin mt = \frac{R_1(a_0R_3 - \cos\beta) - R_2\sqrt{{a_0'}^2\sin^2\beta - (R_3 - a\cos\beta)^2}}{a_0'\sin\beta(1 - R_3^2)}.$$

Исключим из этих равенств время t:

$$\begin{gathered} \frac{1}{n}\arcsin\frac{R_3 - a_0\cos\beta}{a_0'\sin\beta} = \\ = \frac{1}{m}\arcsin\frac{R_1(a_0R_3 - \cos\beta) - R_2\sqrt{{a_0'}^2\sin^2\beta - (R_3 - a_0\cos\beta)^2}}{a_0'\sin\beta(1 - R_3^2)}. \end{gathered} \tag{47}$$

Если движение тела является регулярной прецессией и обладает свойством изоконичности, то выполняется равенство $m = n$. В этом случае, используя первое и третье соотношения из (46), получим

$$R_1 = \frac{1}{(1 - a_0)\sin\beta}\big[R_3^2 - (1 + a_0)R_3\cos\beta + (a_0 - \sin^2\beta)\big]. \tag{48}$$

То есть при $m = n$ годограф (46) – линия пересечения сферы $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$ и цилиндрической поверхности (48). В силу (47) при $m \neq n$ вторая поверхность (47) является трансцендентной.

Примером полурегулярных прецессий тела могут служить прецессионно-изоконические движения [9, с. 234].

В первом случае имеем

$$\dot{\psi} = m, \qquad \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_0\,\mathrm{tg}\,\tau}{1 - c_0\,\mathrm{tg}\,\tau} \quad \Big(\tau = \frac{mt}{2}\Big). \tag{49}$$

Второй случай описывается вектор-функцией $\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}$, где n – параметр, а функция $\psi(t)$ такова

$$\psi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{nt}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\,\frac{nt}{2}}. \tag{50}$$

В формулах (49), (50) параметры b_0 и c_0 подчинены условию $b_0^2 = 1 + c_0^2$.

Интерес представляют прецессии общего вида, которые имеют свойство прецессионности. Первый случай соответствует равенству $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$; второй случай описывается уравнением

$$\psi(\varphi) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}} \quad \big(b_0^2 = 1 + c_0^2\big). \tag{51}$$

Рассмотрим прецессию тела, которая описывается решением А.И. Докшевича [8, с. 136], которое имеет место при условиях Гесса. Положим [9]

$$\begin{gathered} \nu_1 = a_0'\sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \qquad \nu_3 = 0, \\ \omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}, \end{gathered} \tag{52}$$

где $\dot{\psi}\,\dot{\varphi} = \mathrm{const}$. То есть

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2\sin\varphi}, \qquad \dot{\psi} = \frac{\beta}{\dot{\varphi}}. \tag{53}$$

Здесь значения β, β_1, β_2 таковы

$$\begin{gathered} \beta_1 = \frac{2a_0e_1s[2A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22})]}{a_0'A_{13}[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2]}, \\ \beta_2 = \frac{2e_1s(A_{11} - A_{22})}{[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2]}, \qquad \beta = -\frac{2e_1sA_{13}}{a_0'A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2}. \end{gathered} \tag{54}$$

В решении (52), (53) параметры задачи удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
A_{12} = A_{23} = 0, \\
4A_{13}^4 + A_{13}^2(A_{11} - A_{22})(A_{11} + 3A_{22} - 4A_{33}) - A_{11}A_{33}(A_{11} - A_{22})^2 = 0, \\
e_2 = 0, \qquad k = 0, \qquad E = -\frac{a_0 s}{A_{33}}(e_1 A_{33} + e_3 A_{13}), \\
\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{A_{22}A_{13}^2}{A_{33}[A_{13}^2 - (A_{11} - A_{33}(A_{11} - A_{22}))]},
\end{gathered}
\tag{55}
$$

где e_1, e_2, e_3 – компоненты единичного вектора, направленного из точки O в центр тяжести тела C; s – произведение веса тела и расстояния OC.

Запишем решение в эллиптических функциях времени:

$$
\varphi(t) = 2\,a\,m\,\mu_0 t + \frac{\pi}{2}, \qquad \dot{\varphi}(t) = 2\mu_0\,\mathrm{dn}\,\mu_0 t, \qquad \psi(t) = \arccos\frac{\mathrm{cn}\,\mu_0 t}{\mathrm{dn}\,\mu_0 t}, \tag{56}
$$

$$
\nu_1(t) = a_0'(1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,\mu_0 t), \qquad \nu_2(t) = -2\,a_0'\mathrm{sn}\,\mu_0 t\ \mathrm{cn}\,\mu_0 t, \qquad \nu_3(t) = a_0, \tag{57}
$$

$$
\begin{gathered}
\omega_1(t) = \frac{a_0'(1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,\mu_0 t)}{2\mu_0\,\mathrm{dn}\,\mu_0 t}, \qquad \omega_2(t) = -\frac{a_0'\beta\,\mathrm{sn}\,\mu_0 t\ \mathrm{cn}\,\mu_0 t}{\mu_0\mathrm{dn}\,\mu_0 t}, \\
\omega_3(t) = \frac{4\mu_0^2\mathrm{dn}^2\,\mu_0 t + a_0\beta}{2\mu_0\,\mathrm{dn}\,\mu_0 t}.
\end{gathered}
\tag{58}
$$

Параметр μ_0 и модуль k_1 эллиптических функций в формулах (56) – (58) подчинены условиям

$$
\mu_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \qquad k_1 = \frac{2\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}.
$$

Для исследования движения вектора $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_3$ в пространстве необходимо в равенствах (38) учесть соотношения (53) – (56). Если воспользоваться результатом статьи [7], в которой показано, что движение тела в решении А.И. Докшевича – периодическое, то можно заключить, что конец вектора $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_3$ совершает периодическое движение. Получение конкретного вида данной кривой (апекса этого вектора) представляет самостоятельную задачу.

1. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика: в 2 т. Т. 2. – М.–Л.: ГИТТЛ. – 1950. – 440 с. *Lagrange J.L.* Mécanique Analytique. – Paris: M^{me} Ve. Courcier, 1811. – Т. 1; 1815. – Т. 2. – 428 p.
2. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
3. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. – New York: Johnson Reprint Corp., 1965. – 966 s.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. pura et appl. Ser. 4. – 1947. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.

5. *Гриоли Дж.* К общей теории асимметричных гироскопов // Проблемы гироскопии / Под ред. Г. Циглера. – М.: Мир, 1967. – С. 34–39.
6. *Гриоли Дж.* Обобщенные движения прецессии // Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей. – 1971. – № 3 (127). – С. 3–8.
7. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 573–587.
8. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
9. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
10. *Брессан А.О.* О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса // Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей. – 1958. – **52**. – С. 153–158.
11. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**, H. 2. – S. 153–181.
12. *Горр Г.В., Кононыхин Г.А.* О динамической невозможности регулярной прецессии типа Гриоли при движении тела, подвешенного на стержне // Прикл. математика и механика. – 1987. – **51**, вып. 3. – С. 371–374.
13. *Горр Г.В., Кононыхин Г.А.* Полурегулярная прецессия гироскопа Гесса, подвешенного на стержне, и ее обобщение в задаче о движении системы двух твердых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 2. – С. 48–51.
14. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, вып. 5. – С. 707–712.
15. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: ГУ "ИПММ", 2018. – 265 с.
16. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.

G.V. Gorr, T.V. Balaklitskaya

On motion of the principal axes of inertia of a rigid body, having a fixed point, in the case of precession relative to the vertical

In the article, a statement is considered for the problem on the space motion of the body principle axes of inertia in the case of precession relative to the vertical. It is assumed that the solution is known in the precession coordinate system. Euler angles are determined, which define the orientation of the principal coordinate system in the fixed space. For components of the vector, directed along the principal axis, explicit expressions are obtained through parameters and variables, which specify the body precession in the precession coordinate system.

Keywords: *precession, principal and precession coordinate systems, Euler angles, apex of the principal axis.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 27.09.19
gvgorr@gmail.com