УДК 517.97

А. А. Ковалевский

О СВЯЗАННОСТИ ПОДМНОЖЕСТВ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ И Г-СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ С ПЕРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть k, n — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, m — вещественное число, $m > 1$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей, содержащихся в Ω.

В работе вводятся и изучаются некоторые понятия связанности последовательности множеств $V_s \subset W_m^k(\Omega_s)$ с множеством $V \subset W_m^k(\Omega)$ и понятие $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости последовательности функционалов $I_s : W_m^k(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ к функционалу $I : W_m^k(\Omega) \to \mathbb{R}$. Рассматриваются свойства этих понятий, описывается их связь с вопросом о сходимости решений вариационных задач для функционалов I_s.

Используем следующие обозначения: $\overset{0}{W}{}_m^k(\Omega)$ — замыкание в $W_m^k(\Omega)$ класса функций $C_0^\infty(\Omega)$; если $s \in \mathbb{N}$, то $\overset{0}{W}{}_m^k(\Omega_s)$ — замыкание в $W_m^k(\Omega_s)$ класса функций $C_0^\infty(\Omega_s)$, $W_{m,0}^k(\Omega_s)$ — замыкание в $W_m^k(\Omega_s)$ множества всех функций $W_m^k(\Omega_s)$, носители которых содержатся в Ω, q_s — отображение $W_m^k(\Omega)$ в $W_m^k(\Omega_s)$ такое, что для $u \in W_m^k(\Omega)$ $q_s u = u\big|_{\Omega_s}$. Для последовательности $\{u_s\}$ и последовательности непустых множеств $\{V_s\}$ запись $\{u_s\} \in \{V_s\}$ означает, что для любого s $u_s \in V_s$.

О некоторых понятиях связанности множеств

Определение 1. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$. V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{V_s\}$ сильно связана с множеством V, если существуют последовательность отображений $p_s : V_s \to V$ и постоянная $c > 0$ такие, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in V_s$ $q_s(p_s u) = u$ почти всюду на Ω_s и

$$\| p_s u \|_{W_m^k(\Omega)} \leqslant c(1 + \| u \|_{W_m^k(\Omega_s)}).$$

Пример 1. Последовательность $\{\overset{0}{W}{}_m^k(\Omega_s)\}$ сильно связана с множеством $\overset{0}{W}{}_m^k(\Omega)$.

Пример 2. Пусть выполняется условие:

$A_1)$ существуют непустые конечные множества $X_s \subset \Omega\ (s \in \mathbb{N})$ и числа $r_{s,x} > 0\ (s \in \mathbb{N},\ x \in X_s)$ такие, что

$$\forall s : \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{x \in X_s} B(x, r_{s,x});$$

$$\lim_{s \to \infty} \max_{x \in X_s} r_{s,x} = 0;$$

$$\inf_s \min_{x \in X_s} r_{s,x}^{-1} \operatorname{dist}\left(B(x, r_{s,x}), \bigcup_{z \neq x} B(z, r_{s,z}) \cup \partial\Omega\right) > 0,$$

где $B(x, r_{s,x})$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом $r_{s,x}$.

Тогда последовательность $\{W_m^k(\Omega_s)\}$ сильно связана с пространством $W_m^k(\Omega)$.

Сильная связанность последовательности $\{W_m^k(\Omega_s)\}$ с пространством $W_m^k(\Omega)$ влечет сильную связанность различных последовательностей множеств $V_s \subset W_m^k(\Omega_s)$ с соответствующими им множествами V из $W_m^k(\Omega)$. Например, имеет место такой результат.

Предложение 1. Пусть для любого s множество $\Omega \setminus \Omega_s$ замкнуто. И пусть последовательность $\{W_m^k(\Omega_s)\}$ сильно связана с пространством $W_m^k(\Omega)$. Тогда для любого $f \in W_m^k(\Omega)$ последовательность $\{q_s f + W_{m,0}^k(\Omega_s)\}$ сильно связана с множеством $f + \overset{0}{W}{}_m^k(\Omega)$.

Далее введем еще одно понятие связанности множеств, которое является более общим по сравнению с понятием сильной связанности.

Определение 2. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$. Будем говорить, что последовательность $\{V_s\}$ регулярна, если существует последовательность $\{h_s\} \in \{V_s\}$ такая, что

$$\sup_s \| h_s \|_{W_m^k(\Omega_s)} < \infty.$$

Определение 3. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$. V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V, если последовательность $\{V_s\}$ регулярна и для любой последовательности $\{u_s\} \in \{V_s\}$, удовлетворяющей неравенству $\sup_s \| u_s \|_{W_m^k(\Omega_s)} < \infty$, существует возрастающая последовательность $\{s_t\}$ и функция $u \in V$ такие, что

$$\lim_{t \to \infty} \| u_{s_t} - q_{s_t} u \|_{W_m^{k-1}(\Omega_{s_t})} = 0. \tag{1}$$

Соотношение между компактной и сильной связанностью множеств описывает следующее предложение.

Предложение 2. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$, причем последовательность $\{V_s\}$ регулярна, а множество V слабо замкнуто. И пусть последовательность $\{V_s\}$ сильно связана с множеством V. Тогда последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V.

Заметим, что из компактной связанности сильная связанность, вообще говоря, не следует.

Из предложения 2 и примеров 1 и 2 заключаем, что последовательность $\{\overset{0}{W}{}^k_m(\Omega_s)\}$ компактно связана с множеством $\overset{0}{W}{}^k_m(\Omega)$, а если выполняется условие A_1), то последовательность $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ компактно связана с пространством $W^k_m(\Omega)$.

Используя компактную связанность последовательности $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ с пространством $W^k_m(\Omega)$, можно сделать вывод о компактной связанности множеств, заданных с помощью различных функциональных соотношений. Приведем один общий результат в этом направлении.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ компактно связана с пространством $W^k_m(\Omega)$. И пусть для любого s φ_s — функционал на $W^k_m(\Omega_s)$, $V_s=\{u\in W^k_m(\Omega_s):\varphi_s(u)\leqslant 0\}$, φ — функционал на $W^k_m(\Omega)$, $V=\{u\in W^k_m(\Omega): \varphi(u)\leqslant 0\}$, причем выполняются условия:

а) для любой функции $u\in W^k_m(\Omega)$ и любой последовательности $\{u_s\}\in\{W^k_m(\Omega_s)\}$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|u_s-q_su\|_{W^{k-1}_m(\Omega_s)}=0$, справедливо неравенство $\varliminf\limits_{s\to\infty}\varphi_s(u_s)\geqslant\varphi(u)$;

б) для любого s $V_s\neq\varnothing$;

в) последовательность $\{V_s\}$ регулярна.

Тогда $V\neq\varnothing$ и последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V.

Доказательство. Пусть $\{u_s\}\in\{V_s\}$, причем $\sup\limits_s\|u_s\|_{W^k_m(\Omega_s)}<\infty$. В силу компактной связанности последовательности $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ с пространством $W^k_m(\Omega)$ существуют возрастающая последовательность $\{s_t\}$ и функция $u\in W^k_m(\Omega)$ такие, что справедливо равенство (1). Тогда в силу условия а)

$$\varliminf_{t\to\infty}\varphi_{s_t}(u_{s_t})\geqslant\varphi(u).$$

Отсюда, учитывая, что для любого s $\varphi_s(u_s)\leqslant 0$, получаем неравенство $\varphi(u)\leqslant 0$. Следовательно, $u\in V$. Тогда $V\neq\varnothing$ и получаем, что последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть последовательность $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ компактно связана с пространством $W^k_m(\Omega)$ и выполняется условие:

A_2) существует ограниченная измеримая функция $b:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что для любого куба $Q\subset\Omega$

$$\lim_{s\to\infty}\operatorname{mes}(Q\cap\Omega_s)=\int_Q b\,dx.$$

И пусть

$$\forall s:\ V_s=\{u\in W^k_m(\Omega_s):\|u\|_{W^{k-1}_m(\Omega_s)}\leqslant 1\},\tag{2}$$

$$V=\{u\in W^k_m(\Omega):\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\int_\Omega b\,|D^\alpha u|^m dx\leqslant 1\}.\tag{3}$$

Тогда последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V.

Следствие 2. Пусть последовательность $\{W^k_m(\Omega_s)\}$ компактно связана с пространством $W^k_m(\Omega)$ и выполняется условие A_2). И пусть

$$\forall s:\ V_s=\{u\in W^k_m(\Omega_s):\int_{\Omega_s}u\,dx=0\},\tag{4}$$

$$V=\{u\in W^k_m(\Omega):\int_\Omega bu\,dx=0\}.\tag{5}$$

Тогда последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V.

Далее понадобится еще одно понятие связанности множеств.

Определение 4. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W^k_m(\Omega_s)$,

V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Будем говорить, что множество V регулярно связано с последовательностью $\{V_s\}$, если для любой функции $u \in V$ существует последовательность $\{u_s\} \in \{V_s\}$ такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W_m^{k-1}(\Omega_s)} = 0, \quad \sup_s \| u_s \|_{W_m^k(\Omega_s)} < \infty.$$

Пример 3. Пространство $W_m^k(\Omega)$ регулярно связано с последовательностью $\{W_m^k(\Omega_s)\}$.

Пример 4. Если выполняется условие A_2), то множество V, определенное формулой (3), регулярно связано с последовательностью $\{V_s\}$, определенной формулой (2), а множество V, определенное формулой (5), регулярно связано с последовательностью $\{V_s\}$, определенной формулой (4).

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства компактной связанности множеств.

Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, V, U — непустые множества в $W_m^k(\Omega)$. Справедливы следующие предложения.

Предложение 3. Если последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V, $r \in \mathbb{R}$, $\{r_s\} \subset \mathbb{R}$, причем $r \neq 0$, $r_s \neq 0\ (\forall s)$ и $\lim\limits_{s\to\infty} r_s = r$, то последовательность $\{r_s V_s\}$ компактно связана с множеством rV.

Предложение 4. Если последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V, $f \in W_m^k(\Omega)$, $\{f_s\} \in \{W_m^k(\Omega_s)\}$, причем $\lim\limits_{s\to\infty} \| f_s - q_s f \|_{W_m^{k-1}(\Omega_s)} = 0$ и $\sup \| f_s \|_{W_m^k(\Omega_s)} < \infty$, то последовательность $\{f_s + V_s\}$ компактно связана с множеством $f + V$.

Предложение 5. Пусть последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множествами V и U, причем множества V и U регулярно связаны с последовательностью $\{V_s\}$. И пусть выполняется условие:

A_3) для любой возрастающей последовательности $\{s_t\}$

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus \bigcup_t \Omega_{s_t}) = 0.$$

Тогда $V = U$.

Замечание 1. Условие A_3) выполняется, например, в том случае, когда выполняется условие A_1).

Введем теперь с помощью понятий компактной и регулярной связанности понятие $\mathcal{H}$-сходимости множеств из рассматриваемых соболевских пространств.

Определение 5. Пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{V_s\}$ $\mathcal{H}$ сходится к множеству V, если последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V, а множество V регулярно связано с последовательностью $\{V_s\}$.

Замечание 2. Если выполняется условие A_3), то последовательность $\{V_s\}$ может $\mathcal{H}$ сходиться только к одному множеству из $W_m^k(\Omega)$. Это следует из предложения 5.

Пример 5. Если выполняется условие A_1), то последовательность $\{W_m^k(\Omega_s)\}$ $\mathcal{H}$ сходится к $W_m^k(\Omega)$.

Пример 6. Если выполняются условия A_1) и A_2), то последовательность $\{V_s\}$, определенная формулой (2), $\mathcal{H}$ сходится к множеству V, определенному формулой (3), а последовательность $\{V_s\}$, определенная формулой (4), $\mathcal{H}$ сходится к множеству, определенному формулой (5).

$\mathcal{H}$-сходимость множеств имеет свойства, аналогичные свойствам компактной связанности, сформулированным в предложениях 3 и 4.

О понятии $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости функционалов.

Определение 6. Пусть для любого s I_s — функционал на $W_m^k(\Omega_s)$, V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, I — функционал на $W_m^k(\Omega)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I, если:

1) для любой функции $u \in V$ существует последовательность $\{w_s\} \in \{V_s\}$ такая, что справедливы равенства

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s - q_s u \|_{W^{k-1}_m(\Omega_s)} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u);$$

2) для любой функции $u \in V$ и любой последовательности $\{u_s\} \in \{V_s\}$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W^{k-1}_m(\Omega_s)} = 0$, справедливо неравенство $\varliminf\limits_{s\to\infty} I_s(u_s) \geqslant I(u)$.

Замечание 3. Пусть для любого s I_s — функционал на $W^k_m(\Omega_s)$, I — функционал на $W^k_m(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ сходится к функционалу I, если последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{W^k_m(\Omega_s)\}, W^k_m(\Omega))$ сходится к функционалу I.

Пример 7. Пусть выполняется условие A_2). И пусть для любого s φ_s — функционал на $W^k_m(\Omega_s)$ такой, что для $u \in W^k_m(\Omega_s)$

$$\varphi_s(u) = \| u \|^m_{W^{k-1}_m(\Omega_s)},$$

φ — функционал на $W^k_m(\Omega)$ такой, что для $u \in W^k_m(\Omega)$

$$\varphi(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} \int_\Omega b \,| D^\alpha u |^m \, dx.$$

Тогда для любой функции $u \in W^k_m(\Omega)$ и любой последовательности $\{u_s\} \in \{W^k_m(\Omega_s)\}$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W^{k-1}_m(\Omega_s)} = 0$, справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} \varphi_s(u_s) = \varphi(u) \tag{6}$$

и, следовательно, последовательность $\{\varphi_s\}$ Γ сходится к функционалу φ.

Приведем ряд предложений, показывающих, что Γ-сходимость последовательности функционалов $I_s : W^k_m(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ к функционалу $I : W^k_m(\Omega) \to \mathbb{R}$ влечет $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимость этой последовательности к функционалу I для некоторых $\{V_s\}$ и V. Для простоты ограничимся одной модельной последовательностью интегральных функционалов I_s, хотя формулируемые результаты справедливы и в более общей ситуации.

Предложение 6. Пусть для любого s I_s — функционал на $W^k_m(\Omega_s)$ такой, что для $u \in W^k_m(\Omega_s)$

$$I_s(u) = \| u \|^m_{W^k_m(\Omega_s)}, \tag{7}$$

I — функционал на $W^k_m(\Omega)$, причем последовательность $\{I_s\}$ Γ сходится к функционалу I. И пусть для любого s V_s — непустое множество в $W^k_m(\Omega_s)$; V — непустое множество в $W^k_m(\Omega)$, причем выполняется условие:

B) для любой функции $u \in V$ существует последовательность $\{u_s\} \in \{V_s\}$ такая, что

а) $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W^k_m(\Omega_s)} = 0$;

б) если $s \in \mathbb{N}$, $w \in W^k_m(\Omega_s)$ и $\operatorname{supp} w \subset \Omega$, то $u_s + w \in V_s$. Тогда последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I.

Замечание 4. Пусть $f \in W^k_m(\Omega)$, $\{f_s\} \in \{W^k_m(\Omega_s)\}$, причем $\lim\limits_{s\to\infty} \| f_s - q_s f \|_{W^k_m(\Omega_s)} = 0$. И пусть для любого s $V_s = f_s + W^k_{m,0}(\Omega_s)$, $V = f + \overset{0}{W}{}^k_m(\Omega)$. Тогда выполняется условие B).

Предложение 7. Пусть для любого s I_s — функционал на $W^k_m(\Omega_s)$, определенный по формуле (7), I — функционал на $W^k_m(\Omega)$, причем последовательность $\{I_s\}$ Γ сходится к функционалу I. И пусть выполняется условие A_2), V — множество, определенное формулой (3), для любого s V_s — множество, определенное формулой (2). Тогда последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I.

Замечание 5. Результат, аналогичный предложению 7, имеет место и для множеств, определенных формулами (5) и (4).

В терминах Γ-сходимости функционалов можно исследовать вопрос об $\mathcal{H}$-сходимости множеств. Сформулируем один результат в этом направлении. Для этого введем следующие обозначения: если V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$, то $\sigma(V)$ — множество всех функционалов φ на $W_m^k(\Omega)$ таких, что $V=\{u\in W_m^k(\Omega):\varphi(u)\leqslant 0\}$; аналогично, если $s\in\mathbb{N}$ и V — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, то $\sigma_s(V)$ — множество всех функционалов φ на $W_m^k(\Omega_s)$ таких, что $V=\{u\in W_m^k(\Omega_s):\varphi(u)\leqslant 0\}$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{W_m^k(\Omega_s)\}$ компактно связана с пространством $W_m^k(\Omega)$. И пусть для любого s V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, $\varphi_s\in\sigma_s(V_s)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$, $\varphi\in\sigma(V)$, причем выполняются условия: последовательность $\{\varphi_s\}$ Γ сходится к функционалу φ; существует постоянная $a>0$ такая, что для любых $s\in\mathbb{N}$ и $u\in W_m^k(\Omega_s)$ $\varphi_s(u)\geqslant a^{-1}\|u\|^m_{W_m^k(\Omega_s)}-a$; если $u\in V$, то существует последовательность $\{u_j\}\subset W_m^k(\Omega)$ такая, что $\lim\limits_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{W_m^{k-1}(\Omega)}=0$ и $\forall : \varphi(u_j)<0$. Тогда последовательность $\{V_s\}$ $\mathcal{H}$ сходится к множеству V.

Опишем теперь связь понятий компактной связанности множеств и $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости функционалов с вопросом о сходимости решений вариационных задач.

Введем обозначение: если I — функционал, V — непустое множество из его области определения, то $\mathrm{Min}(I, V)$ — множество всех элементов V, минимизирующих I на V.

Теорема 3 Пусть для любого s I_s — функционал на $W_m^k(\Omega_s)$, V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, I — функционал на $W_m^k(\Omega)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. И пусть последовательность $\{V_s\}$ компактно связана с множеством V, последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ — сходится к функционалу I, а также выполняются условия: для любого s $\mathrm{Min}(I_s, V_s)\neq\varnothing$; $\{v_s\}\in\{\mathrm{Min}(I_s, V_s)\}$ и $\sup\limits_s\|v_s\|_{W_m^k(\Omega_s)}<\infty$. Тогда существуют возрастающая последовательности $\{s_t\}$ и функция $v\in\mathrm{Min}(I, V)$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty}\|v_{s_t}-q_{s_t}v\|_{W_m^{k-1}(\Omega_{s_t})}=0,\quad \lim_{t\to\infty}I_{s_t}(v_{s_t})=I(v). \tag{8}$$

Доказательство. В силу компактной связанности последовательности $\{V_s\}$ с множеством V существуют возрастающая последовательность $\{s_t\}$ и функция $v\in V$ такие, что справедливо первое из равенств (8). Тогда в силу $\Gamma(\{V_s\} V)$-сходимости последовательности $\{I_s\}$ к функционалу I

$$\varliminf_{t\to\infty}I_{s_t}(v_{s_t})\geqslant I(v). \tag{9}$$

Пусть теперь u — произвольная функция из V. В силу $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости $\{I_s\}$ к I существует последовательность $\{w_s\}\in\{V_s\}$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}I_s(w_s)=I(u)$. Отсюда и из того, что $\{v_s\}\in\{\mathrm{Min}(I_s, V_s)\}$, выводим неравенство

$$\varlimsup_{t\to\infty}I_{s_t}(v_{s_t})\leqslant I(u). \tag{10}$$

Из неравенств (9) и (10), учитывая произвольность u, заключаем, что $v\in\mathrm{Min}(I, V)$ и имеет место второе из равенств (8). Теорема доказана.

Приведем в заключение ряд общих свойств $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости функционалов.

Пусть для любого s I_s — функционал на $W_m^k(\Omega_s)$, V_s — непустое множество в $W_m^k(\Omega_s)$, I — функционал на $W_m^k(\Omega)$, V — непустое множество в $W_m^k(\Omega)$. Имеют место следующие свойства.

Свойство 1. Если последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I, то функционал I слабо полунепрерывен снизу на V.

Свойство 2. Пусть для любого s множество V_s выпуклое, функционал I_s выпуклый на V_s, множество V выпуклое. И пусть последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I. Тогда функционал I выпуклый на V.

Свойство 3. Пусть выполняется условие A_3), а также условия: последовательность $\{V_s\}$ сильно связана с пространством $W_m^k(\Omega)$; существует неубывающая полунепрерывная снизу функция $\Phi: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi(r) = \infty$ и для любых $s \in \mathbb{N}$, $u \in V_s$ $I_s(u) \geqslant \Phi(\| u \|_{W_m^k(\Omega_s)})$. И пусть последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ сходится к функционалу I. Тогда существует неубывающая полунепрерывная снизу функция $\Phi_0: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi_0(r) = \infty$ и для любой функции $u \in V$ $I(u) \geqslant \Phi_0(\| u \|_{W_m^k(\Omega)})$.

Свойство 4. Пусть последовательность $\{I_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$ — сходится к функционалу I. И пусть для любого s φ_s — функционал на $W_m^k(\Omega_s)$, φ — функционал на $W_m^k(\Omega)$, причем выполняется условие: для любой функции $u \in V$ и любой последовательности $\{u_s\} \in \{V_s\}$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W_m^{k-1}(\Omega_s)} = 0$, справедливо равенство (6). Тогда последовательность $\{I_s + \varphi_s\}$ $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходится к функционалу $I + \varphi$.

В заключение укажем на ряд публикаций, связанных с изложенным материалом. Прежде всего отметим работу [1], в которой по существу введено понятие сильной связанности последовательности $\{W_2^1(\Omega_s)\}$ с пространством $W_2^1(\Omega)$. Отметим некоторую связь введенного в настоящей статье понятия $\mathcal{H}$-сходимости множеств из, вообще говоря, различных соболевских пространств с понятием нижнего топологического предела подмножеств фиксированного метрического пространства [2]. Что касается понятия $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости функционалов $I_s: W_m^k(\Omega_s) \to R$, то оно является обобщением понятия $\Gamma(V)$-сходимости функционалов, имеющих единую область определения (см. [3]). Приведенные свойства $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости обобщают соответствующие свойства Г-сходимости функционалов с единой областью определения (см., напр., [4]). Отметим, что само понятие Г-сходимости функционалов с единой областью определения было введено в [5]. Там же впервые дано его приложение к вариационным задачам. Как видно из настоящей работы (теорема 3), при анализе вариационных задач в переменных областях наряду с понятием $\Gamma(\{V_s\}, V)$-сходимости функционалов весьма полезным оказывается и понятие компактной связанности подмножеств соболевских пространств. Отметим еще, что условия Г-сходимости интегральных функционалов $I_s: W_m^k(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ к интегральному функционалу, определенному на $W_m^k(\Omega)$, приведены в [6].

1. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб.— 1978.— **106**, № 4.— С. 604—621.
2. *Куратовский К.* Топология.— М. : Мир, 1966.— Т. 1. 594 с.
3. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 3.— С. 524—528.
4. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 5.— С. 961—998.
5. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.— 1975.— 58, N 6.— P. 842—850.
6. *Ковалевский А. А.* Вопросы сходимости и усреднения для интегральных функционалов, связанных с областями сложной структуры : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1985.— 16 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк

Получено 29.09.87