УДК 517.946

В. П. Щербина

ВОЗМУЩЕНИЕ НЕОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

С помощью топологических методов устанавливается разрешимость краевой задачи

$$Lu + b(x, u, \ldots, \mathscr{D}^{2m}u) = f,$$

$$B_j u = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

в ограниченной области Q с достаточно гладкой границей в пространствах $W_{2m,p}(Q)$ $(p > 1)$. Предполагается, что L — эллиптический оператор с ненулевым ядром.

Пусть X и Y — банаховы сепарабельные рефлексивные пространства.

Оператор $T : X \to Y$ называется деминепрерывным, если он сильно сходящуюся последовательность переводит в слабосходящуюся.

Сильную сходимость обозначим через $\to$, а слабую через $\rightharpoonup$.

Пусть $K : X \to Y^*$ —, вообще говоря, нелинейный оператор и X_n, Y_n^* n-мерные пространства в X и Y^* такие, что сужение K на X_n обладает следующими свойствами: $KX_n \subset Y_n^*$ и если

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \quad Ku = \sum_{i=1}^{n} d_i \psi_i,$$

где $\{\varphi_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — базис в X_n; $\{\psi_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — базис в Y_n^*, то $c_n d_n > 0$.

Построение подпространств X_n, Y_n и оператора K выполнено в [1].

Будем говорить, что оператор T удовлетворяет условию K_α, если для любой последовательности, слабо сходящейся к u_0 и такой, что

$$\lim_{n\to\infty} (Tu_n - Tu_0, K(u_n - u_0)) \leqslant 0$$

следует сильная сходимость u_n к u_0.

Линейный оператор L называется фредгольмовым, если область значений $R(L)$ замкнута и его индекс равен нулю.

Индексом линейного оператора $L : X \to Y$ называется целое число

$$\varkappa = \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Cocer} L,$$

где $\operatorname{Ker} L$ — ядро оператора L $\operatorname{Ker} L = L^{-1}(0)$.

В нашем случае считаем, что $\dim \operatorname{Ker} L$ и $\dim \operatorname{Cocer} L$ конечны и равны.

Согласно теории линейных операторов существуют подпространства $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, $R(L)^\perp \subset Y^*$, такие, что

$$X = X_1 + \operatorname{Ker} L, Y = R(L) + Y_2,$$

причем $\dim \operatorname{Ker} L = \dim Y_2 = \dim R(L)^\perp$ и для любых $y \in R(L)$, $l \in R(L)^\perp$ $(y, l) = 0$. Обозначим через M линейный оператор, устанавливающий взаимооднозначное соответствие между $\operatorname{Ker} L$ и Y_2. Пусть $B : \operatorname{Ker} L \to R(L)^\perp$ такой, что для любого $u \in \operatorname{Ker} L$ $(Mu, Bu) > 0$.

Лемма. Фредгольмовый оператор удовлетворяет условию K_α с соответственно подобранными подпространствами X_n, Y_n^* и оператором K.

Доказательство. Пусть $u_n \rightharpoonup u_0$. Так как L фредгольмовый, то $L + M$ определен и взаимооднозначен. Пусть X_n — n-мерное пространство в X. Обозначим $Y_n = (L + M) X_n$. Положим $K = I(L + M)$, где I — дуальный оператор. Из свойств операторов I, $L + M$ следует, что $c_n d_n > 0$. Кроме того, из свойств дуального оператора вытекает

$$(Lu_n - Lu_0, K(u_n - u_0)) = (Lu_n - Lu_0, IL(u_n - u_0)) = (L(u_n - u_0), IL(u_n - u_0)) = \|L(u_n - u_0)\|^2.$$

Из предположения $(Lu_n - Lu_0, K(u_n - u_0)) \leqslant 0$ получаем $Lu_n \to Lu_0$. В силу линейности и замкнутости L находим, что $u_n \to u_0$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu + Nu = f;$$

L — линейный оператор, рассмотренный выше; $N : X \to Y$ — нелинейный оператор, такой, что $L + N$ удовлетворяет условию K_α и

$$N(u_n) = 0(\|u_n\|) \quad (\|u_n\| \to \infty).$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. Уравнение $Lu + Nu = f$ разрешимо при выполнении одного из условий

$$1)\ \varliminf_{n\to\infty} (Nu_n, Bv) > (f, Bv)$$

или

$$2)\ \varlimsup_{n\to\infty} (Nu_n, Bv) < (f, Bv),$$

где $u_n/\|u_n\| = v_n \to v \in \operatorname{Ker} L$, если $\|u_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$, $f \in Y$.

Применим эту теорему к установлению разрешимости эллиптической краевой задачи

$$Lu + b(x, u, \ldots, \mathcal{D}^{2m} u) = f(x) \quad (x \in Q),$$

$$B_j u = 0 \quad (j = 1, \ldots, m; \quad x \in \partial Q$$

в ограниченной области Q с достаточно гладкой границей ∂Q.

Здесь

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) \mathcal{D}^\alpha u;$$

$$a_\alpha(x) \in L_\infty(Q), \ \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqslant \mu |\xi|^{2m};$$

$$B_j u = \sum_{|\beta| \leqslant m_j} b_\beta(x) \mathcal{D}^\beta u;$$

$$b_\beta(x) \in L_\infty(Q), \quad m_j \leqslant 2m - 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Будем предполагать, что краевая задача

$$Lu = 0,$$

$$B_j u|_{\partial Q} = 0$$

является фредгольмовой нулевого индекса, причем $\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$.

Относительно функции b предположим, что выполнены следующие условия:

$$1)\ |b(x, \xi)| < c\left(\sum_{|\beta| \leqslant 2m} |\xi_\beta|^\sigma + k(x)\right),$$

где $\sigma \in [0; 1]$, $k(x) \in L_p(Q)$, $(p > 1)$;

2) существует предел

$$\lim_{\|u_n\| \to \infty} \frac{b(x, \xi(u_n))}{|\xi(u_n)|^\sigma} = h(x, \xi(v));$$

$$u_n/\|u_n\| = v_n \to v \in N(L), \ \xi \in S^1;$$

$$|h(x, \xi(v))| \leqslant h(x) \in L^{\frac{p}{p-1}}(Q).$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $W_{2m,p}(Q)$.

Из свойств 1,2 следует, что на функциях $v \in \operatorname{Ker} L$ определен функционал

$$g(v) = \int_Q h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right) |\xi(v)|^\sigma Bv dx.$$

В терминах функционала $g(v)$ сформулируем теорему разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

Теорема. Если оператор $Lu + b(x, u, \ldots, \mathcal{D}^{2m} u)$ удовлетворяет условию K_α и выполнено одно из условий:

1) $\sigma \in (0; 1]$, $f = 0$, $g(v) > 0$

или

2) $\sigma \in (0;1)$, $g(v) > 0$

или

3) $\sigma = 0$, $g(v) > (\bar{f}, Bv)$,

то задача $Lu + b(x, u, \ldots, \mathcal{D}^{2m}u) = \bar{f}$ разрешима в $\mathbb{W}_{2m,p}(Q)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(b(x, u_n, \ldots, \mathcal{D}^{2m}u_n), Bv) > 0$$

для $\|u_n\| \to \infty$, $u_n/\|u_n\| \to v \in \operatorname{Ker} L$. Предположим противное. Пусть существует последовательность u_n

$$\|u_n\| \to \infty, \quad u_n/\|u_n\| \to v \in \operatorname{Ker} L,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(b(x, u_n, \ldots, \mathcal{D}^{2m}u_n), Bv) \leqslant 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int_Q b(x, \xi(u_n))\, Bvdx \leqslant \varepsilon$$

или что то же

$$\int_Q \frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx \leqslant \frac{\varepsilon}{\|u_n\|^\sigma}.$$

Преобразуем левую часть

$$\int_Q \frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx = \int_Q \frac{b\left(x, |\xi(u_n)|\dfrac{\xi(u_n)}{|\xi(u_n)|}\right)}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx =$$

$$= \int_Q \frac{b\left(x, \|u_n\|\,|\xi(v_n)|\dfrac{\xi(v_n)}{|\xi(v_n)|}\right)}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx = \int_Q \frac{b\left(x, \|u_n\|\,|\xi(v_n)|\dfrac{\xi(v_n)}{|\xi(v_n)|}\right)}{\|u_n\|^\sigma\,|\xi(v_n)|^\sigma} \times$$

$$\times |\xi(v_n)|^\sigma Bvdx.$$

Так как $\mathcal{D}^\alpha v_n \to \mathcal{D}^\alpha v$ при $|\alpha| \leqslant 2m$ в $L_p(Q)$, то $\mathcal{D}^\alpha v_n \to \mathcal{D}^\alpha v$ почти всюду в Q. Причем $\xi(v_n) \to \xi(v)$ почти всюду в Q и $|\xi(v)| \neq 0$ почти всюду. Поэтому

$$\|u_n\| \cdot |\xi(v_n)| \to \infty.$$

Отсюда при почти всех $x \in Q$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} = h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right)|\xi(v)|^\sigma.$$

Кроме того, в силу условий, наложенных на b, имеем

$$\frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} \leqslant \frac{c_0}{\|u_n\|^\sigma}(\|u_n\|^\sigma |\xi(v_n)|^\sigma + h(x)).$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\int_Q \left(\frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} - h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right)|\xi(v)|^\sigma\right) Bvdx = \int_E \left(\frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} -\right.$$

$$\left.- h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right)|\xi(v)|^\sigma Bvdx + \int_{Q-E} \left(\frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} - h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right)|\xi(v)|^\sigma\right) \times\right.$$

$$\times Bvdx \leqslant C \operatorname{mes} E + \operatorname{mes}(Q-E)\,\delta.$$

Здесь E — множество, вне которого выражение под интегралом менее любого наперед заданного числа δ при больших n.

Отсюда следует, что

$$\int_Q \frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx \to \int_Q h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right) |\xi(v)|^\sigma Bvdx.$$

Поэтому, переходя к пределу, получаем

$$\int_Q h\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right) |\xi(v)|^\sigma Bvdx \leqslant 0.$$

Но это противоречит предположениям.

2) В этом случае мы должны показать, что

$$\lim_{n\to\infty} (b(x, \xi(u_n)), Bv) > (f, Bv)$$

для $\|u_n\| \to \infty$, $u_n/\|u_n\| = v_n \to v \in \operatorname{Ker} L$. Если это не так, то снова существует последовательность u_n, такая, что $\|u_n\| \to \infty$, $u_n/\|u_n\| = v_n \to$ $\to v \in \operatorname{Ker} L$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N_ε такой, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int_Q \frac{b(x, \xi(u_n))}{\|u_n\|^\sigma} Bvdx \leqslant \frac{\varepsilon + (f, Bv)}{\|u_n\|^\sigma}.$$

Как и в предыдущем случае, переходя к пределу получаем $g(v) \leqslant 0$, что противоречит предположению $g(v) > 0$.

3) Если $\sigma = 0$ и $g(v) > (f, Bv)$. Тогда, как и во втором случае, по аналогии с первым получаем

$$\int_Q b\left(x, \frac{\xi(v)}{|\xi(v)|}\right) Bvdx \leqslant \varepsilon + (f, Bv)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда получаем

$$g(v) \leqslant (f, Bv),$$

что противоречит предположению теоремы.

Укажем теперь некоторые условия, при которых выполняется условие K_α.

Оно будет выполняться, если функция b не зависит от старших производных.

Также будет выполняться условие K_α, если функция $b(x, u, \ldots, D^{2m}u)$ имеет вид

$$b = b(x, u, \ldots, \mathcal{D}^{2m-1}u, Lu)$$

и функция $b(x, r, s)$ удовлетворяет неравенству

$$(b(x, r, s_2) - b(x, r, s_1))(s_2 - s_1) \geqslant -\mu |s_2 - s_1|^2$$

с достаточно малым определяемым μ. Можно наложить и некоторые другие условия на b, чтобы выполнялось условие K_α.

1. *Скрыпник И. В., Щербина В. И.* О бифуркации решений граничных задач для недивергентных уравнений // Мат. физика.— 1976.— Вып. 19.— С. 99—103.
2. *Petryshyn W. V.* Variational solvability of quasilinear elliptic boundary value problems at resonance // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.— 1981.— 5, N 10.— P. 1095—1108.

Донецк. политехн. ин-т

Получено 17.11.89