

УДК 539.3:534.1

©2019. В.Е. Болнокин, С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, Зыонг Минь Хай

АЛГОРИТМ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ГРАФЕНОВЫХ НАНОПЛАСТИН

Представлена разработка теоретической численно-аналитической методики нечеткого оценивания значений собственных частот поперечных колебаний шарнирно-опертых по краям прямоугольных многослойных графеновых нанопластин, перспективных для использования в качестве нанорезонаторов в современных конструкциях электромеханических систем. Методика базируется на применении аппарата теории нечетких вычислений и учитывает влияние разбросов в исходных экспериментальных данных о физико-механических и геометрических параметрах нанопластин, допускающих нечетко-интервальную интерпретацию. При реализации алгоритма исследования с использованием модифицированной формы эвристического принципа расширения выполняется переход к нечетко-множественным аргументам в получаемых на основе детерминистической модели аналитических представлениях для анализируемых собственных частот. Дается пример применения описываемой методики.

Ключевые слова: многослойные графеновые нанопластины; шарнирное опирание краев; поперечные колебания; соотношения детерминистической модели; резонансные частоты; нечеткие оценки; разброс исходных параметров; нечетко-интервальная интерпретация; эвристический принцип обобщения.

Введение. К числу современных актуальных проблем компьютерно-математического моделирования в механике деформируемого твердого тела и физической мезомеханике относится изучение характеристик поперечных колебаний тонких пластинок из модифицированных углеродных материалов, которые находят сегодня ряд высокотехнологичных применений [1–3]. В частности, это представленные в [4–6] исследования и разработки в области конструирования нанoeлектромеханических систем, касающиеся вопросов создания нанорезонаторов на базе углеродных наноструктур, в том числе с использованием графена – монослоя графита, представляющего собой самый тонкий из известных материалов с одним атомным слоем [7–11]. К числу исследований по данной проблематике [12–14] относятся, в частности, и работы [15–17], в которых исследование изгибного деформирования и поперечных колебаний тонких пластин из кристаллического графита базируется на уточненной теории Тимошенко–Рейсснера и реализуется в рамках эквивалентной модели пакета из чередующихся графеновых нанослоев и фиктивных изотропных слоев с пониженной жесткостью, имитирующих межслойные промежутки. Практическое применение этой модели для предпроектных расчетов требует оценивания погрешностей, обусловленных как непосредственно приемом введения эквивалентной многослойной графеновой нанопластины, так и существенными разбросами [2, 3, 8–12, 14] экзогенных параметров физико-механических и геометрических свойств составляющих рассматриваемого пакета.

Целью настоящей работы является построение теоретического алгоритма оценивания степени влияния разбросов значений исходных параметров при определении собственных частот поперечных колебаний тонкой трансверсально-изотропной нанопластинки из кристаллического графита в рамках модели многослойного пакета, включающего графеновые слои и промежутки между ними в виде фиктивных изотропных слоев малой жесткости [17]. Представляемая методика основана на применении методов теории нечетких вычислений [18–22] с менее строгими требованиями к характеру неопределенной исходной информации в сравнении с методами вероятностного стохастического анализа [23, 24].

1. Соотношения детерминистического варианта модели. Согласно [17], объектом рассмотрения, в связи с анализом проблемы поперечных колебаний тонкой пластинки кристаллического графита, является симметричный по толщине пакет, включающий $n + 1$ слой пренебрежимо малой толщины из графена с удельной плотностью на единицу площади ρ_0 и модулями упругости E_{ij} , G_{ij} , а также n межслойных промежутков толщины h_0 , заполненных изотропной средой с податливостью $G_{13}^{(0)}$ и исчезающе малыми плотностью и жесткостью. Срединная плоскость пакета лежит в координатной плоскости Ox_1x_2 , связываемой с пластиной системы координат $Ox_1x_2x_3$.

При определении интегральных параметров изгибной жесткости D и жесткости на поперечный сдвиг Γ для шарнирно опертой по краям нанопластины-пакета толщины $h = nh_0$ со сторонами l_1 , l_2 и с занимающей область $S = \{x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$ срединной плоскостью, учитывается изгибная жесткость D_0 и жесткость на растяжение K_0 отдельных графеновых слоев, в результате чего для D , Γ получены [17] представления

$$\begin{aligned} D &= (n + 1) D_0 + \alpha_n h_0^2 K_0 = \alpha_n h_0^2 K_0 (1 + \xi_n), \\ \alpha_n &= n(n + 1)(n + 2)/12, \quad \xi_n = (n + 1) D_0 / (\alpha_n h_0^2 K_0), \\ \Gamma &= 5h_0 G_{13}^{(0)} / (6\gamma_n), \quad K_0 = E_0 h_0, \quad E_0 = E_{11} - E_{13}^2 E_{33}^{-1}, \\ \gamma_n &= (n^2 + 2n + 2) / (n(n + 1)(n + 2)). \end{aligned} \quad (1)$$

Применительно к случаям колебаний с параметрами изменяемости p , q для амплитудных форм поперечных смещений

$$w_{pq}(x_1, x_2) = w_0 \sin(pr_1 x_1) \sin(qr_2 x_2) \quad (2)$$

вводится также безразмерный сдвиговой параметр

$$g_{npq} = Dr_{pq}^2 / \Gamma = \delta_n K_0 \mu_{0pq}^2 / G, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} r_{pq} &= \pi(p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2})^{1/2}, \quad r_j = \pi/l_j, \quad \mu_{0pq} = r_{pq} h_0, \\ G &= G_{13}^{(0)} h_0, \quad \delta_n = (n^2 + 2n + 2) / 10; \end{aligned} \quad (4)$$

G – жесткость нанопластины на поперечный сдвиг [17].

Как отмечается в работе [17], величиной ξ_n в представлении (1), ввиду малости изгибной жесткости отдельных графеновых слоев, можно пренебречь и, таким образом, использовать для расчета D выражение

$$D = \alpha_n h_0^2 K_0. \quad (5)$$

В рамках описанной модели, приближенные значения технических собственных частот f_{npq} поперечных колебаний с формами (p, q) для шарнирно-опертой по краям прямоугольной $(n + 1)$ -слойной графеновой нанопластины со сторонами l_1, l_2 и с массой единицы площади $q_{0n} = (n + 1) \rho_0$ определяются соотношением [17]

$$f_{npq} = (2\pi)^{-1} r_{pq}^2 (D / (q_{0n} (1 + g_{npq})))^{1/2}, \quad (6)$$

которое в случае использования представления (4) принимает вид

$$f_{npq} = \mu_{0pq}^2 \nu_*(n(n + 2) / (1 + g_{npq}))^{1/2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_* &= (2\pi)^{-1} (K_0 / (h_0^2 \rho_0))^{1/2}, \\ g_{npq} &= (n^2 + 2n + 2) \mu_{0pq}^2 g_*, \quad g_* = K_0 / \left(10 h_0 G_{13}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

С использованием соотношений (1), (3) – (8) величина f_{npq} может быть выражена через исходные параметры модели в форме

$$\begin{aligned} f_{npq} &= F_{npq} \left(l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}, n, p, q \right) = \\ &= \left(h_0^{3/2} / (2\pi) \right) (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}) \rho_0^{-1/2} (n(n + 2) / 12)^{1/2} (E_{11} - E_{13} / E_{33})^{1/2} \times \\ &\times \left(1 + \delta_n (E_{11} - E_{13} / E_{33}) \pi^2 h_0^2 (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}) / G_{13}^{(0)} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Представление (9) является соотношением детерминистического варианта модели, подлежащим, в принципе, использованию в алгоритме формирования нечетких оценок $\tilde{f}_{npq}$ для частотных характеристик f_{npq} при учете разбросов в значениях экзогенных параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$. При последующем переходе к модели нечеткого оценивания соотношение (9) целесообразно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} f_{npq} &= \Phi_{npq} \left(\rho_0, G_{13}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q \right) = \\ &= (4\pi^2 \rho_0)^{-1/2} K_0^{1/2} R_{pq} (n(n + 2) / 12)^{1/2} \left(1 + \delta_n K_0 R_{pq} / G_{13}^{(0)} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$K_0 = (E_{11} - E_{13} / E_{33}) h_0, \quad R_{pq} = h_0 \pi^2 (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}),$$

для оптимизации рассматриваемого ниже расчетного алгоритма.

2. Получение нечетких оценок для собственных частот колебаний нанопластины. Разрабатываемая нечетко-множественная процедура получения оценок для неопределенных собственных частот $\tilde{f}_{npq}$ поперечных колебаний рассматриваемой шарнирно-опертой по краям прямоугольной нанопластины при учете возможных технологических разбросов в значениях ее экзогенных геометрически и физико-механических параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$ базируется на применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения [25–28] к четким аналитическим функциональным соотношениям (10). В рамках данного подхода вводится предположение о возможности эффективного описания неконтрастных величин экзогенных параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$ рассматриваемой модели нормальными трапециевидальными нечеткими интервалами $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{h}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{E}_{11}, \tilde{E}_{13}, \tilde{E}_{33}, \tilde{G}_{13}^{(0)}$, задаваемыми при помощи кортежей реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= (l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}), \quad \tilde{l}_2 = (l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}), \\ \tilde{h}_0 &= (h_{01}, h_{02}, h_{03}, h_{04}), \quad \tilde{\rho}_0 = (\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}), \\ \tilde{E}_{11} &= (E_{111}, E_{112}, E_{113}, E_{114}), \quad \tilde{E}_{13} = (E_{131}, E_{132}, E_{133}, E_{134}), \\ \tilde{E}_{33} &= (E_{331}, E_{332}, E_{333}, E_{334}), \quad \tilde{G}_{13}^{(0)} = (G_{131}, G_{132}, G_{133}, G_{134}), \end{aligned} \quad (11)$$

с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{l}_1}(l_1), \mu_{\tilde{l}_2}(l_2), \mu_{\tilde{h}_0}(h_0), \mu_{\tilde{\rho}_0}(\rho_0), \mu_{\tilde{E}_{11}}(E_{11}), \mu_{\tilde{E}_{13}}(E_{13}), \mu_{\tilde{E}_{33}}(E_{33}), \mu_{\tilde{G}_{13}^{(0)}}(G_{13}^{(0)})$. При этом для нечетко-множественных величин $\tilde{K}_0, \tilde{R}_{pq}$ при переходе в соответствующих соотношениях (10) к нечетким аргументам и использовании арифметики нечетких интервалов [29, 30] можно также получить нечетко-интервальные представления

$$\tilde{K}_0 = (K_1, K_2, K_3, K_4), \quad \tilde{R}_{pq} = (R_{pq1}, R_{pq2}, R_{pq3}, R_{pq4}), \quad (12)$$

в которых

$$\begin{aligned} K_1 &= (E_{111} - E_{134}/E_{331}) h_{01}, \quad K_2 = (E_{112} - E_{133}/E_{332}) h_{02}, \\ K_3 &= (E_{113} - E_{132}/E_{333}) h_{03}, \quad K_4 = (E_{114} - E_{131}/E_{334}) h_{04}, \\ R_{pq1} &= \pi^2 h_{01} (p^2 l_{14}^{-2} + q^2 l_{24}^{-2}), \quad R_{pq2} = \pi^2 h_{02} (p^2 l_{13}^{-2} + q^2 l_{23}^{-2}), \\ R_{pq3} &= \pi^2 h_{03} (p^2 l_{12}^{-2} + q^2 l_{22}^{-2}), \quad R_{pq4} = \pi^2 h_{04} (p^2 l_{11}^{-2} + q^2 l_{21}^{-2}). \end{aligned} \quad (13)$$

Каждый из описывающих неопределенные экзогенные параметры нечетких интервалов в распространяемом на нечеткие аргументы соотношении

(10) для f_{npq} представляется в форме разложения по множествам α -срезов:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0\alpha}, \overline{\rho}_{0\alpha}], \quad \tilde{G}_{13}^{(0)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{13\alpha}, \overline{G}_{13\alpha}], \\
 \tilde{K}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{K}_{0\alpha}, \overline{K}_{0\alpha}], \quad \tilde{R}_{pq} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{pq\alpha}, \overline{R}_{pq\alpha}], \\
 \underline{\rho}_{0\alpha} &= (1 - \alpha) \rho_{01} + \alpha \rho_{02}, \quad \overline{\rho}_{0\alpha} = \alpha \rho_{03} + (1 - \alpha) \rho_{04}, \\
 \underline{G}_{13\alpha} &= (1 - \alpha) G_{131} + \alpha G_{132}, \quad \overline{G}_{13\alpha} = \alpha G_{133} + (1 - \alpha) G_{134}, \\
 \overline{K}_{0\alpha} &= \alpha K_3 + (1 - \alpha) K_4, \quad \underline{K}_{0\alpha} = (1 - \alpha) K_1 + \alpha K_2, \\
 \underline{R}_{pq\alpha} &= (1 - \alpha) R_{pq1} + \alpha R_{pq2}, \quad \overline{R}_{pq\alpha} = \alpha R_{pq3} + (1 - \alpha) R_{pq4}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

При этом, в соответствии с концепцией эвристического принципа расширения, на основе его модифицированной α -уровневой формы для нечеткой оценки $\tilde{f}_{npq}$ собственных частот поперечных колебаний рассматриваемой шарнирно-опертой по краям прямоугольной графеновой нанопластины с учетом свойств

$$\partial \Phi_{npq} / \partial \rho_0 < 0, \quad \partial \Phi_{npq} / \partial G_{13}^{(0)} > 0,$$

справедливых во всей области определения аргументов функции

$$\Phi_{npq} \left(\rho_0, G_{13}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q \right),$$

может быть записано представление

$$\tilde{f}_{npq} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{f}_{npq\alpha}, \overline{f}_{npq\alpha}], \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_{npq\alpha} &= \inf_{K_0 \in [\underline{K}_{0\alpha}, \overline{K}_{0\alpha}], R_{pq} \in [\underline{R}_{pq\alpha}, \overline{R}_{pq\alpha}]} \Phi_{npq} \left(\overline{\rho}_{0\alpha}, \underline{G}_{13\alpha}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q \right), \\
 \overline{f}_{npq\alpha} &= \sup_{K_0 \in [\underline{K}_{0\alpha}, \overline{K}_{0\alpha}], R_{pq} \in [\underline{R}_{pq\alpha}, \overline{R}_{pq\alpha}]} \Phi_{npq} \left(\underline{\rho}_{0\alpha}, \overline{G}_{13\alpha}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q \right).
 \end{aligned} \tag{16}$$

3. Результаты вычислительных экспериментов. Представленный алгоритм получения нечетких оценок для технических собственных частот поперечных колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин с учетом факторов неопределенности их физико-механических и геометрических параметров [2–3, 8–12, 14] в качестве примера реализован применительно к случаю определения характеристик $\tilde{f}_{n11}$ при $n = 4$, $n = 10$ и задании следующих нечетко-интервальных экзогенных параметров с размерностями в

системе СИ:

$$\tilde{l}_1 = (3.25; 3.39; 3.42; 3.45) \text{ [нм]}, \quad \tilde{l}_2 = (3.125; 3.180; 3.190; 3.245) \text{ [нм]},$$

$$\tilde{l}_1 = (3.25; 3.39; 3.42; 3.45) \text{ [нм]}, \quad \tilde{l}_2 = (3.125; 3.180; 3.190; 3.245) \text{ [нм]},$$

$$\tilde{h}_0 = (0.310; 0.325; 0.335; 0.345) \text{ [нм]},$$

$$\tilde{\rho}_0 = (7.580; 7.608; 7.610; 7.625) \text{ [кг/м}^2\text{]},$$

$$\tilde{E}_{11} = (1030; 1050; 1110; 1170) \text{ [ГПа]}, \quad \tilde{E}_{13} = (6.5; 8.9; 10.0; 17.5) \text{ [ГПа]},$$

$$\tilde{E}_{33} = (36.5; 36.9; 37.6; 38.9) \text{ [ГПа]}, \quad \tilde{G}_{13}^{(0)} = (3.9; 4.7; 4.95; 5.35) \text{ [ГПа]}.$$

Вид функций принадлежности для исходных нечетко-интервальных характеристик $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{G}_{13}^{(0)}$, а также для нечетко-интервальных характеристик $\tilde{K}_0$, $\tilde{R}_{11}$ представлен на рис. 1–4. Результаты расчетов функций соответствующих функций принадлежности для $\tilde{f}_{411}$ и $\tilde{f}_{10,11}$ даны на рис. 5 и рис. 6.

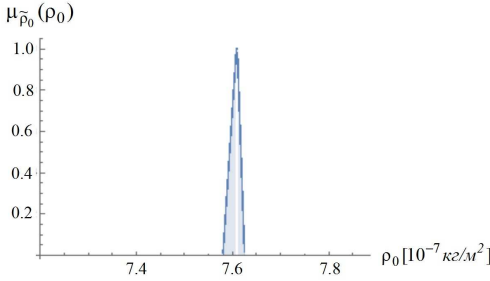


Рис. 1. Функция принадлежности для $\tilde{\rho}_0$.

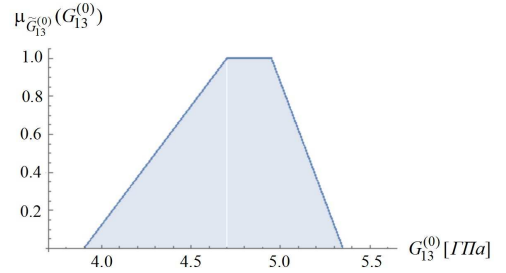


Рис. 2. Функция принадлежности для $\tilde{G}_{13}^{(0)}$.

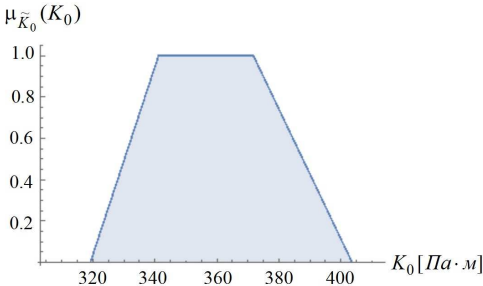


Рис. 3. Функция принадлежности для $\tilde{K}_0$.

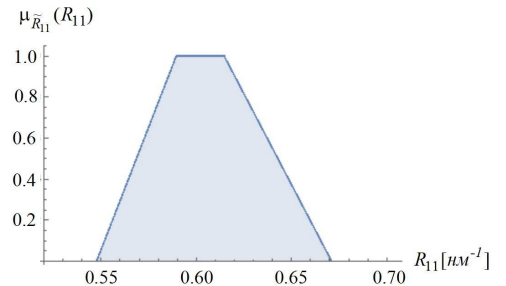


Рис. 4. Функция принадлежности для $\tilde{R}_{11}$.

При расчетах приведенных на рисунках графиков функций принадлежности использовалось разбиение на α -срезы с равномерным шагом $\Delta\alpha = 0.01$ варьирования параметра α .

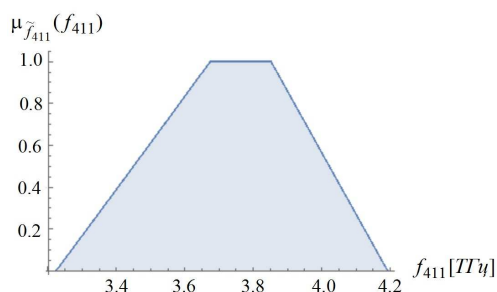


Рис. 5. Функция принадлежности для $\tilde{f}_{411}$.

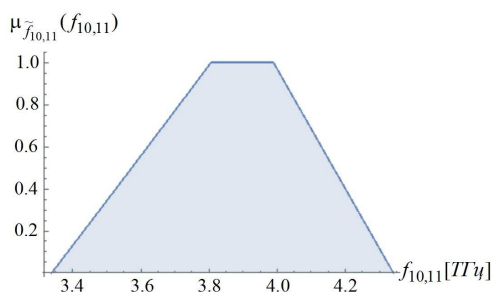


Рис. 6. Функция принадлежности для $\tilde{f}_{10,11}$.

Представленные оценки описывают относительные показатели степени уверенности в том, что технические собственные частоты поперечных колебаний рассматриваемых тонких четырехслойных и десятислойных графеновых нанопластин будут принимать соответствующие значения с учетом заданных ошибок рассеяния в значениях экзогенных параметров рассматриваемой модели. Они позволяют, в частности, сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных значений собственных частот, а также о границах предельно возможных разбросов для данных характеристик, и, тем самым, повысить достоверность расчетных результатов предпроектного моделирования конструкций графеновых нанорезонаторов. Результаты расчетов иллюстрируют также степень увеличения значений низшей собственной частоты для нанопластины фиксированных поперечных размеров при рассматриваемых вариантах наращивания численности слоев в пакете.

Закключение. Результатом представленных исследований является разработка численно-аналитической методики получения нечетко-множественных оценок для значений собственных частот поперечных колебаний шарнирно-опертых по краям прямоугольных многослойных графеновых нанопластин, перспективных для использования в качестве нанорезонаторов в современных конструкциях миниатюризированных электромеханических систем. Представленный теоретический алгоритм анализа рассматриваемой проблемы позволяет учитывать факторы неопределенности исходных параметров модели в виде разбросов экспериментальных данных о физико-механических характеристиках материалов нанопластин и технологических разбросов, свойственных процессам их изготовления. Методика основана на использовании полученных в рамках детерминистической версии модели представлениях для анализируемых собственных частот и последующем переходе в этих представлениях к нечетко-множественным аргументам с использованием модифицированной формы эвристического принципа расширения. Дано описание этапов реализации методики для случая, когда неопределенные экзогенные параметры модели допускают нечетко-интервальную интерпретацию, и представлены примеры расчетов с ее использованием.

1. Харрис П. Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. – М.: Техносфера, 2003. – 336 с.
2. Poot M., van der Zant H.S. Nanomechanical properties of few-layer grapheme membranes // Appl. Phys. Lett. – 2008. – **92**. – P. 063111.
3. Gupta S.S., Batra R.C. Elastic properties and frequencies of free vibrations of single-layer grapheme sheet // J. Comput. Theor. Nanoscience. – 2010. – **7**. – № 10. – P. 2151–2164.
4. Atalaya J., Isacsson A., Kinaret J.M. Continuum elastic modeling of grapheme resonators // Nano Lett. – 2008. – **8**. – № 12. – P. 4196–4200.
5. Lindahl N. Determination of the bending rigidity of grapheme via electrostatic actuation of buckled membranes // Nano Lett. – 2012. – **12**. – P. 3526–3531.
6. Bunch S.J., Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L. Electromechanical resonators from grapheme sheets // Science. – 2007. – № 315. – P. 490–493.
7. Lu Q., Arroyo M., Huang R. Elastic bending monolayer grapheme // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2009. – **42**. – P. 102002.
8. Chen C., Rosenblatt S., Bolotin K.I., Kalb W., Kim P., Kymis I. Performance of monolayer grapheme // Nature Nanotechnology. – 2009. – **4**. – P. 861–867.
9. Lee C., Wei X., Kusar J.W., Honel J. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer grapheme // Science. – 2008. – **321**. – № 5887. – P. 385–388.
10. Reddy C.D., Rajendran S., Liew K.M. Equilibrium configuration and continuum elastic properties of finite sized grapheme // Nanotechnology. – 2006. – **17**. – № 3. – P. 864–870.
11. Zhang D.B., Akatyeva E., Dumitric T. Bending ultrathin grapheme at the margins of continuum mechanics // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106**. – P. 255503.
12. Беринский И.Е., Кривцов А.М., Кударова А.М. Определение изгибной жесткости графенового листа // Физ. мезомех. – 2014. – **17**. – № 1. – С. 57–65.
13. Алехин В.В., Аннин Б.А., Бабичев А.В., Коробейников С.Н. Собственные колебания и выпучивание графеновых листов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 34–38.
14. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Континуальная модель деформации графена // Вестник СПбГУ. Сер.1. – 2014. – **1**. – № 1. – С. 134–143.
15. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Уравнения изгиба пластины второго порядка точности // Докл. РАН. – 2014. – **457**. – № 6. – С. 660–663.
16. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // Докл. РАН. – 2016. – **462**. – С. 562–566.
17. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Континуальная модель изгиба и колебаний многослойной нанопластины // Физ. мезомех. – 2016. – **19**. – № 6. – С. 27–33.
18. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
19. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
20. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
21. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Изд-во Машиностроение–1, 2004. – 397 с.
22. Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
23. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
24. Исмаилов А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.
25. Сторожев В.И., Сторожев С.В. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.

26. *Storozhev S.V.* Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O.Ja. Kravets. – City place Yelm, State WA, country-region USA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
27. *Storozhev S.V.* Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium // Nonlinear Dynamics. – 2016. Proc. of 5-th International Conference (September 27–30, 2016). – Kharkov: National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», 2016. – P. 509–514.
28. *Vyskub V.G., Mutina E.I., Storozhev S.V., Storozhev V.I.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – **537**. – 022013 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013.
29. *Grzegorzewski P., Mrowka E.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – **153**. – P. 115–135.
30. *Ban A.I., Coroianu L.C., Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximation and Aggregation // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – **177**. – P. 45–59.

V.E. Bolnokin, S.V. Storozhev, Nguyen Kuok Shi, Tran Ba Le Hoang, Duong Minh Hai

Algorithm for accounting factors of uncertainty of exogenous parameters in the model of vibrations of thin multi-layered graphene nanoplates

The development of a theoretical numerical-analytical technique for fuzzy estimation of the eigenfrequencies of the transverse vibrations of hinge-clamped at the edges rectangular multilayer graphene nanoplates promising for use as nanoresonators in modern designs of electromechanical systems is presented. The technique is based on the use of the apparatus of the theory of fuzzy calculations and takes into account of scatter errors of the initial experimental physical-mechanical and geometric parameters of nanoplates that allow interpretation in form of a fuzzy-intervals. When implementing the research algorithm using a modified form of the heuristic extension principle, the transition to fuzzy-multiple arguments is performed in the analytical representations obtained on the basis of the deterministic model for the natural frequencies being analyzed. An example of the application of the described technique is given.

Keywords: *multilayer graphene nanoplates; hinge-clamped edges; transverse vibrations; relations of deterministic model; resonant frequencies; fuzzy estimates; scatter errors of initial parameters; fuzzy-interval interpretation; heuristic principle of generalization.*

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва;
 ГОУ ВПО «Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры», Макеевка;
 ФГБОУ ВО «Национальный исслед. ун-т «МЭИ» МОН РФ, Москва;
 Центральный научно-исслед. ин-т Военно-морских сил Вьетнама,
 Хайфон
 stvistvi@mail.ru

Получено 29.08.19