УДК 517.988

Ю. И. Сапронов

УГЛОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Описывается схема редукции гладкого потенциального фредгольмова уравнения к задаче о ветвлении критических точек функции конечного числа переменных. В случае эквивалентности уравнения относительно набора коммутирующих инволюций редукция приводит к задаче о ветвлении условных экстремалей гладкой функции в угле (симплициальном конусе). Сформулировано несколько теорем о бифуркации точек условного минимума и их распределении по граням угла.

Если потенциальная энергия динамической системы инвариантна относительно набора коммутирующих инволюций, то исследование стационарных состояний системы может быть сведено к анализу экстремалей функции, четной по некоторым переменным. Анализ критических точек функции вида $g(\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2, y), y \in \mathbb{R}^m$, равнозначен анализу условно критических (у. к.) точек функции $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ в угле $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \geqslant 0, \forall j\}$.

Угловые особенности введены и изучены Д. Сирсмой [1] как обобщение краевых особенностей, определенных В. И. Арнольдом [2]. Возможность отождествления угловых особенностей с $Z_2 \times \ldots \times Z_2$-инвариантными позволяет использовать известные результаты по теории эквивариантных особенностей [3, 4]. Однако в некоторых прикладных задачах (например, в задачах о закритическом поведении упругих систем) удобнее обращаться к непосредственному анализу угловых особенностей.

Конечномерные редукции. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства; E непрерывно вложено в F. Гладкое фредгольмово нулевого индекса [5] отображение f из E в F называется потенциальным, если $f(x) = \operatorname{grad}_{\mathscr{H}} V(x)$, $\forall x \in E$, где $\mathscr{H}$ — некоторое гильбертово пространство, в которое плотно и непрерывно вложены E и F, а V — гладкий функционал (потенциал) на E. Будем предполагать, что $f(x)$ включено в гладкое семейство гладких потенциальных фредгольмовых отображений $f(x, q)$, $f(x, 0) = f(x)$ с потенциалом $V(x, q)$, $q \in \mathbb{R}^m$. Уравнение $f(x, q)$ является абстрактным аналогом уравнения Эйлера — Лагранжа экстремалей функционала действия.

Пусть $f(0, q) = 0$ и пусть на некоторой окрестности $\mathscr{U}$ нуля в $\mathbb{R}^m$ определен набор таких гладких, нормированных в $\mathscr{H}$ функций (ведущих мод бифуркации) $\{e_j(q)\}_{j=1}^n, q \in \mathscr{U}$, что $\frac{\partial f}{\partial x}(0, q) e_j(q) = \alpha_j(q) e_j(q)$ и $\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x, q) \times u, u \rangle_{\mathscr{H}} > 0$ для $\forall \mathscr{U} \neq 0$, $u \perp e_j(q)$, $i = 1, \ldots, n$, $q \in \mathscr{U}$ и $x \in \mathscr{O}$ (здесь $\{\alpha_j(q)\}$ — гладкие функции; $\mathscr{O}$ — некоторая окрестность нуля в E). Если $\mathscr{O}$ достаточно мала, то функция

$$W(\xi, q) = \inf_{\mathscr{U}} V\Big(\sum_j \xi_j e_j(q) + u, q\Big), \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathscr{O}, u \perp e_j(q), \tag{1}$$

определена и является гладкой при достаточно малых ξ и q. Более того, существует такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, q)$ со значениями в ортогональном дополнении (по метрике $\mathscr{H}$) к линейной оболочке L векторов $\{e_j(q)\}$, что $\Phi(0, q) = 0$ и

$$W(\xi, q) = V\Big(\sum_j \xi_j e_j(q) + \Phi(\xi, q), q\Big). \tag{2}$$

Назовем $W(\xi, q)$ ключевой функцией. В форме (2) ключевая функция была ранее введена в [6] (другое определение см. в [7]). Легко увидеть, что

$\Phi(\xi, q) = o(|\xi|)$ (если $V(x, q)$ является четным по x, то $\Phi(\xi, q) = o(|\xi|^2)$). Точка $a \in \mathcal{O}$ является решением уравнения $f(x, \bar{q}) = o$, $\bar{q} \in \mathcal{U}$, тогда и только тогда, когда $a = \Sigma \bar{\xi}_j e_j(q) + \Phi(\bar{\xi}, \bar{q})$, где $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ — критическая точка функции $W(\cdot, q)$.

Пусть $\mathcal{E}_a(E)$ — алгебра ростков в точке $a \in E$ гладких функционалов, определенных на произвольных окрестностях точки a в E; $\mathfrak{A}$ — идеал в $\mathcal{E}_a(E)$, порожденный ростками вида $\varphi(f(x, \bar{q}))$, где φ—произвольный гладкий функционал на произвольной окрестности нуля в F, и пусть J — якобиев идеал в $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)$, порожденный ростками функций $\frac{\partial w}{\partial \xi_1}(\xi, \bar{q}), \dots$ $\dots, \frac{\partial w}{\partial \xi_n}(\xi, \bar{q})$.

Теорема 1. Факторалгебры $\mathcal{E}_a(E)/\mathfrak{A}$ и $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)J$ изоморфны.

Доказательство проводится стандартными методами [8, 9], легко переносящимися на фредгольмов бесконечномерный случай.

Из определения $W(\xi, q)$ следует, что точкам минимума $W, (\cdot, q)$ соответствуют точки минимума $V(\cdot, q)$. Регулярной точке a (для уравнения $f(x, q) = 0$) соответствует регулярная критическая точка ξ для $W(\cdot \bar{q})$. Естественно определить индекс Морса $V(\cdot, \bar{q})$ в a как индекс Морса $W(\cdot, \bar{q})$ в ξ.

Если $V(\cdot, \bar{q})$ инвариантен относительно группового действия $G \times E \to$ $\to E$, переводящего L в L, то функция $W(\cdot, q)$ будет инвариантной относительно действия $G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, индуцированного ограничением действия $G \times E \to E$ на L (см. [10,7]). В частности, если на E задан набор иволюций $\{J_k\}$, таких, что

$$V(J_k x, q) \equiv V(x, q),\ J_k e_k(q) = -e_k(q),\ J_k e_r(q) = e_r(q),\ r \neq k, \tag{3}$$

то $W(\xi, q) = g(\eta, q)$; $\eta = (\xi_1^2, \dots, \xi_n^2)$, где g — некоторая гладкая функция. Критической точке $\xi \in \mathbb{R}^n_+$ функции $W(\cdot, q)$ взаимно однозначно соответствует у.к. (относительно $\mathbb{R}^n_+$) точка $\eta \in \mathbb{R}^n_+$ функции $g(\cdot, \eta)$ точка, в которой $\mathrm{grad}_{\mathbb{R}^n} g(\eta, q)$ ортогонален наименьшей грани конуса $\mathbb{R}^n_+$, содержащей η. Через $\mathrm{supp}(a)$ обозначим носитель точки, т.е. множесто $\{k \mid a_k \neq 0\}$. Число элементов носителя назовем порядком точки. Точка $a \in \mathbb{R}^n_+$ будет у.к. для g тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(a) \cap \mathrm{supp}(\mathrm{grad}_{\mathbb{R}^n} g(a, q)) = \varnothing$. У.к. точка a называется регулярной, если $\mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(\mathrm{grad}_{\mathbb{R}^n} g(a, q)) =$ $= \{1, \dots, n\}$ и a является (обычной) регулярной критической точкой ограничения $g\,\mathbb{R}^n_K$, $K = \mathrm{supp}(a)$, $\mathbb{R}^n_K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{supp}(x) \subset K\}$. В противном случае точка называется вырожденной. Индексом Морса регулярной у.к. точки $a \in \mathbb{R}^n_+$ называется число, равное обычному индексу Морса ограничения $g\,\mathbb{R}^n_K$, $K = \mathrm{supp}(a)$, сложенному с количеством отрицательных чисел в наборе $\left\{\frac{\partial g}{\partial \eta_j}(a, q)\right\}$. Обозначим его $\mathrm{Ind}(g(\cdot, q), a)$. Регулярная у.к. точка a будет точкой условного минимума тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ind}(g(\cdot, q), a) = 0$.

Теорема 2. Пусть выполняется (3) и $V(x, q) = \mathrm{const} + V_q^{(2)}(x) +$ $+ V_q^{(3)}(x) + V_q^{(4)}(x) + 0(\|x\|_E)$, $V_a^{(k)}(x) = \mathcal{V}_q^{(k)}(x, \dots, x)$, где $\mathcal{V}_q^{(k)}$ — симметричная форма порядка k. Пусть $< \mathrm{grad}_{\mathscr{H}} V_0^{(3)}(u), v >_{\mathscr{H}} = 0$, $u \in L$, $v \in E$, $v \perp L$. Тогда $W(\xi, q) = g(\eta, q)$, $\eta_j = \xi_j^2$, где

$$g(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j(q) \eta_j + (H\eta, \eta)_{\mathbb{R}^n} + o(|\eta|^2) + (|O\,q|)\, o(|\eta|), \tag{4}$$

$H = (h_{ij})$, $h_{ii} = V_0^{(4)'}(e_i(0))$, $h_{ij} = 3\mathcal{V}_0^{(4)'}(e_i(0), e_i(0), e_j(0), e_j(0))$.

Доказательство. Из (3) следует четность $W(\cdot, q)$ по каждой переменной ξ_j, а из условия $\operatorname{grad}_{\mathscr{H}} V_0^{(3)}(u) \perp v$, $u \in L$, $v \perp L$ следует, что $W(\xi, 0) = V(\Sigma \xi_j e_j(0), 0) + o(|\xi|^5)$, откуда вытекает (4).

Замечание 1. Соотношение (4) означает, что члены тейлоровского разложения W до четвертого порядка включительно определяются ритцевским приближением функционала $V(\cdot, q)$, построенным по $\{e_j(q)\}$.

Замечание 2. Если подгруппа обратимых операторов, порожденная инволюциями $\{J_k\}$, содержит преобразование $x \to -x$, то условие ортогональности выполняется автоматически, так как $V_q^{(3)} = 0$.

Бифуркации точек условного минимума. К изучению бифуркации условных экстремалей в $\mathbb{R}^n_+$, вызванной возмущением функции вида $(H\eta, \eta)_{\mathbb{R}^n} + o(|\eta|^2)$ (см. (4)), где H — симметричная матрица с невырожденными главными (диагональными) минорами, приводят некоторые задачи из механики упругих конструкций (см., например, [11—14]). Наибольший прикладной интерес представляют случаи малой размерности. Случай $n = 1$ тривиален, а $n = 2$ достаточно хорошо изучен (см., например, [11, 12]). Обратимся к случаю $n = 3$. Предварительно сформулируем две общие теоремы для любого n.

Теорема 3. Если H положительно определена, то в любой достаточно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n_+$ при достаточно малом q существует не более одной точки условного минимума функции $g(\cdot, q)$. Если выполняется условие (трансверсальности)

$$\operatorname{rank} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta \partial q}(0, 0) = n, \tag{5}$$

то при соответствующем подборе q точка условного минимума приобретает любой заранее заданный носитель.

Доказательство. Существование точки минимума вытекает из положительной определенности формы (Hx, x) в $\mathbb{R}^n_+$, а единственность и реализуемость любого носителя — из следующих соображений. С произвольным открытым подмножеством $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$ свяжем бифуркационную диаграмму [8, 9, 12] $\sigma(\mathscr{O})$, определяемую как совокупность тех q, для которых $g(\cdot, q)$ имеет в $\mathscr{O} \cap \mathbb{R}^n_+$ у.к. вырожденную точку. Через $\omega_k(\mathscr{O})$ обозначим множество тех q, для которых $g(\cdot, q)$ имеет регулярную точку условного минимума в $\mathscr{O} \cap \mathbb{R}^n_+$ с носителем K, а через $\tilde{\omega}_K$ — росток этого множества в нуле при достаточно малом $\mathscr{O}$, содержащем ноль. Переход параметра через регулярную компоненту бифуркационной диаграммы либо сохраняет носитель рассматриваемой точки условного минимума, либо изменяет порядок носителя на единицу. В последнем случае у. к. точка с прежним носителем приобретает положительный индекс.

Пусть $\operatorname{Ind} H$ — индекс Морса формы (Hx, x) в нуле, а H_K — подматрица, составленная из элементов $h_{i,j}$ с $(i, j) \in K \times K$.

Следствие. Если $\tilde{\omega}_K \cap \tilde{\omega}_L \neq \varnothing$, то $\operatorname{Ind} H_{K \cup L} > 0$.

Теорема 4. Пусть $h_{i,i} h_{j,j} < h_{i,j}$ для $\forall (i, j) \in K \times K$, $i \neq j$, $K \subset \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{card} K \geqslant 2$. Тогда $\left(\bigcap\limits_{k \in K} \tilde{\omega}_k\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{j \notin K} \tilde{\omega}_j\right) \neq \varnothing$.

Доказательство основано на рассмотрении развертки $V(x, \gamma t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, где ν — решение уравнения $\frac{\partial}{\partial q} \operatorname{grad}_{\mathbb{R}^n} g(0, 0)\, \nu = p$, в котором $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_j = -1$ для $j \in K$ и $p_j = 1$ для $j \notin K$. Эта развертка дает искомую бифуркацию.

Пусть $n = 3$. Положим $h_{j,j} = 1$, $\forall j$, $h_{1,2} = a_3$, $h_{1,3} = a_2$, $h_{2,3} = a_1$. Трехмерные условно положительные матрицы с невырожденными главными минорами делятся на шесть типов (см. [15]):

положительные матрицы ($\operatorname{Ind} H = 0$), определяемые соотношениями

$$\det H > 0, \quad |a_1| < 1, \tag{6}$$

матрицы индекса два, для которых

$$\det H > 0, \quad a_1 > 1, \tag{7}$$

и четыре типа матриц индекса единица, каждый из которых определяется неравенством $\det H < 0$ и одной из следующих групп соотношений (с точностью до перестановки координат в $\mathbb{R}^3$):

$$\min\{a_j\} > 1, \tag{8}$$

$$\min\{a_1, a_2\} > 1, \quad |a_3| < 1, \tag{9}$$

$$a_1 > 1, \max\{|a_2|, \ |a_3|\} < 1, \tag{10}$$

$$\max\{|a_j|\} < 1, \ a_1 > a_2 a_3. \tag{11}$$

Соотношения (6)—(11) характеризуют тип квадрики $\{(Hx, x) = 0\}$ и ее расположение в $\mathbb{R}^3$ по отношению к $\mathbb{R}^3_+$. Ветвление минимумов в случаях (6)—(8) полностью описывается теоремами 3 и 4. В случае (6) допускается существование единственной точки локального минимума с любым наперед заданным носителем. В случаях (7), (8) возможно существование точек минимума в начале координат и на ребрах конуса $\mathbb{R}^3_+$. Допускается также сосуществование двух или трех (но не больше) точек минимума первого порядка (т. е. на ребрах $\mathbb{R}^3_+$). В случаях (7)—(11) не допускается существование точек минимума максимального порядка (внутри $\mathbb{R}^3_+$). В случае (9) допускается точка минимума с носителем $\{1, 2\}$ (т. е. на грани $x_3 = 0$) и сосуществование двух (но не больше) точек минимума, расположенных на первом и третьем или на втором и третьем ребрах.

Теорема 5. В случаях (9), (10) при $a_2 > a_1 a_3$ или $a_2 < a_1 a_3$ и $a_3 < a_1 a_2$, а также в случае (11) при $a_1 > a_2 a_3$ и $a_2 > a_1 a_3$ имеет место соотношение $\tilde{\omega}_3 \cap \tilde{\omega}_{1,2} \neq \varnothing$.

Теорема 6. В случаях (10) и (11) имеем $\tilde{\omega}_{1,2} \cap \tilde{\omega}_{1,3} \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $b_j = \frac{\partial g}{\partial \eta_j}(0, q)$. Множество $\omega_3(\mathscr{O}) \cap \omega_{1,2}(\mathscr{O})$ задается системой неравенств следующего вида:

$$\begin{gathered} b_3 < 0, \ b_1 - a_2 b_3 + o(|q|) > 0, \\ b_2 - a_1 b_3 + o(|q|) > 0, \\ b_1 - a_3 b_2 + o(|q|) < 0, \ b_2 - a_3 b_1 + o(|q|) < 0, \\ (1 - a_3^2) b_3 - (a_1 - a_2 a_3) b_2 - (a_2 - a_1 a_3) b_1 + o(|q|) > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Этой системе в случае (9) удовлетворяет точка q, для которой $b_1 = b_2 = b_3 = -\delta^2$ (такая точка существует вследствие (5)). В случае (10) эта точка не удовлетворяет данной системе. Если положить $b_3 = -\delta^2$, $b_2 = (\varepsilon - a_1)\delta^2$, $b_1 = (\varepsilon - a_2)\delta^2$, $\varepsilon > 0$, то при $a_2 > a_1 a_3$ и

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{a_1 - a_2 a_3}{1 - a_3}, \ \frac{a_2 - a_1 a_3}{1 - a_3}, \ \frac{-\det H}{(a_1 + a_2)(1 - a_3)}\right\}$$

вновь получим решение системы (12). Аналогичный вывод справедлив и в случае (11) при $a_i > a_j a_3$. В случае (10) при $a_2 < a_1 a_3$ и $a_3 < a_1 a_2$, положив $t_1 = b_1 - a_2 b_3$, $t_2 = b_2 - a_1 b_3$, $t_j \geqslant 0$, получим систему неравенств, эквивалентную (12):

$$\begin{gathered} t_1 - a_3 t_2 < -(a_2 - a_1 a_3) b_3 + o(|q|), \\ t_2 - a_3 t_1 < -(a_1 - a_2 a_3) b_3 + o(|q|), \\ (a_2 - a_1 a_3) t_1 + (a_1 - a_2 a_3) t_2 < |(\det H) b_3| + o(|q|), \end{gathered}$$

или, что равносильно, систему неравенств

$$\frac{t_1 + (a_2 - a_1 a_3) b_3}{a_3} < t_2 + o(|q|) < a_3 t_1 - (a_1 - a_2 a_3) b_3,$$

$$(a_2 - a_1 a_3) t_1 + (a_1 - a_2 a_3) t_2 < |(\det H) b_3| + o(|q|),$$

разрешимость которой вытекает из $a_2 < a_1 a_3$ и $a_3 < a_1 a_2$.

Доказательство соотношения $\tilde{\omega}_{1,2} \cap \omega_{1,3} \neq \varnothing$ сводится к проверке разрешимости следующей системы неравенств:

$$b_1 - a_3 b_2 < 0, \quad b_2 - a_3 b_1 < 0,$$

$$(1 - a_3^2) b_3 - (a_1 - a_2 a_3) b_2 - (a_2 - a_1 a_3) b_1 > 0,$$

$$b_1 - a_2 b_3 < 0, \quad b_3 - a_2 b_1 < 0,$$

$$(1 - a_2^2) b_2 - (a_1 - a_2 a_3) b_3 - (a_3 - a_1 a_2) b_1 > 0.$$

Положив $b_1 = -\delta^2$, $b_2 = -(a_3 + \varepsilon_1)\delta^2$, $b_3 = -(a_2 + \varepsilon_2)\delta^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, получим систему, которая удовлетворяется, если $\varepsilon_1 < \frac{1 - a_3^2}{|a_3|}$, $\varepsilon_2 < \frac{1 - a_2}{|a_2|}$ и $\frac{1 - a_2^2}{a_1 - a_2 a_3} < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < \frac{a_1 - a_2 a_3}{1 - a_3^2}$. Последнее неравенство можно удовлетворить вследствие того, что

$$\frac{a_1 - a_2 a_3}{1 - a_3^2} - \frac{1 - a_2^2}{a_1 - a_2 a_3} = \frac{-\det H}{(1 - a_3^2)(a_1 - a_2 a_3)} > 0.$$

Замечание 3. Нетрудно вычислить формулы асимптотического представления координат бифурцирующих точек условного минимума. Для точек первого, второго и третьего порядков эти формулы выглядят соответственно следующим образом:

$$-b_k(q) + o(|q|), \quad \frac{-b_k(q) - a_j b_i(q)}{1 - a_j^2} + o(|q|),$$

$$-\frac{(1 - a_k^2) b_k(q) - (a_j - a_i a_k) b_i(q) - (a_i - a_j a_k) b_j(q)}{1 + 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} + o(|q|)$$

(здесь $i \neq j \neq k$, $i \neq k$).

1. *Siersma D.* Singularities of functions on boundaries, corners, etc. // Quart. J. Math.— 1981.— 32, N 125.— P. 119—127.
2. *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_k и особенности эволют // Успехи мат. наук.— 1978.— 33, вып. 5.— С. 91—105.
3. *Poénary V.* Singularites C∞ en prèsence de symètrie // Lecture Notes in Math.— 1976.— 510.— P. 61—89.
4. *Wall C. T. C.* A note on symmetry of singularities // Bull. London. Math. Soc.— 1980.— 12, N 3.— P. 169—175.
5. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере — Шаудера // Успехи мат. наук.— 1977.— 32, вып. 4.— С. 3—54.
6. *Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // Докл. АН СССР.— 1978.— 240, № 3.— С. 530—533.
7. *Сапронов Ю. И.* Разрушение сферической симметрии в нелинейных вариационных задачах // Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения.— Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1986.— С. 88—111.
8. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений : Монодромия и асимптотика интегралов.— М. : Наука, 1984.— 336 с.
9. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М. : Мир, 1977.— 208 с.
10. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
11. *Срубщик Л. С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек.— Ростов-на-Дону : Изд-во Ростов. ун-та, 1981.— 96 с.
12. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф.— М. : Мир,— 1984. Кн. 2.— 350 с.

13. *Заваровский Ю. Н., Сапронов Ю. И.* Двумерные вырождения в задаче о критических нагрузках упругих стержней.— Воронеж, 1980.— 17 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2602-81. Деп.
14. *Сапронов Ю. И.* Угловые особенности в анализе закритического поведения упругих систем // Оптимальное управление, геометрия и анализ.— Кемерово, 1986.— С. 111.
15. *Рапопорт Л. Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // Прикл. математика и механика.— 1986.— **50**, вып. 4.— С. 674—679.

Воронеж. гос. ун-т им. Ленинского комсомола Получено 29.09.87