УДК 517.95

Ю. Г. Борисович

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В ТЕОРИИ СТЕПЕНИ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Излагается современная трактовка теории топологических характеристик нелинейных операторов и ее связи с нелинейными краевыми задачами; основное внимание мы сосредоточиваем на первой части и даем полные формулировки новых результатов; примеры краевых задач, к которым можно применять наши результаты, рассматривались в [1].

Нелинейные краевые задачи и операторные уравнения. Теория нелинейных краевых задач

$$Lu = \theta, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\mathcal{G}u|_{\Gamma} = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega \tag{2}$$

с дифференциальным и граничным операторами L и $\mathcal{G}$, как хорошо известно, тесно связана с исследованием нелинейных операторных уравнений (в подходящим образом подобранных функциональных пространствах). Традиционно рассматриваются варианты

$$A(u) = (Lu, \mathcal{G}u|_{\Gamma}), \quad A: E \to F \times F_1, \tag{3}$$

$$A(u) = Lu, \quad A: E \cap (\mathcal{G}u|_{\Gamma} = \theta) \to F, \tag{4}$$

где E, F — функциональные пространства на области $\Omega \subset R^n$, F_1 — на ее границе Γ. При этом задача (1)—(2) превращается в задачу о существовании нуля в E:

$$A(u) = \theta \tag{5}$$

с нелинейным оператором A.

В случае (3) получаем всегда задачу на линейном пространстве E, в случае (4) при нелинейности граничного оператора оператор A рассматривается на бесконечномерном «многообразии» X пространства E. При этом весьма важен вопрос о свойствах этого «многообразия», в частности вопрос о его дифференциальной структуре. Многообразие X может возникать и более сложным образом: например, задача о минимальных поверхностях [10] в R^3, затягивающих заданный контур γ (гомеоморфный S^1), в классе дисков $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ сводится к краевой задаче

$$\Delta\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r}_u^2 - \mathbf{r}_v^2 = 0, \quad (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0,$$

$$\mathbf{r}|_{\Gamma} = \gamma,$$

т. е. к исследованию граничной задачи для векторного уравнения Лапласа на нелинейном многообразии X конформно параметризованных поверхностей.

Дифференциальный оператор L часто полезно разложить на «главную часть» L_0 и «подчиненную часть» L_1 (не только по порядку производных): $L = L_0 - L_1$, тогда задача (5) переписывается в виде

$$A_0(u) = A_1(u), \tag{6}$$

где $A = A_0 - A_1$ — соответствующее разложение оператора A, причем A_1 не всегда компактный оператор. Задача (6) может трактоваться как задача о «совпадениях» пары отображений (A_0, A_1). Ей формально близка задача на обобщенные собственные значения

$$A_0(u) = \lambda A_1(u). \tag{7}$$

Наконец, отметим многозначный вариант задачи (5), когда оператор A не является однозначным отображением (например, содержит субдифференциал или другой многозначный оператор A_1); тогда уравнения (5), (6) естественно записываются в виде «включения»

$$\theta \in A(u), \quad A_0(u) \in A_1(u). \tag{8}$$

Для задач оптимального управления динамическими системами важен случай «дифференциального включения» (см., напр., [2])

$$\theta \in \frac{du}{dt} - A_1(t, u), \tag{9}$$

где $A_1 : R^1 \times E \to K_v(E)$ полунепрерывный сверху с компактными выпуклыми образами оператор; возможно рассматривать и дифференциальное включение с производными высшего порядка.

Общетопологический аспект задачи (8) с некомпактным оператором. Определения всех употребляемых ниже понятий из глобального анализа и теории многозначных отображений, как и используемые основные предложения, можно найти, например, в обзорах [3—5].

Пусть X — бесконечномерное многообразие с краем ∂X, моделируемое банаховым пространством E; F — другое банахово пространство или метризуемое полное ЛВП. Пусть $f = (A, g)$, где $A, g : X \to E$, A — однозначное отображение; g — однозначное или многозначное, не обязательно компактное. Мы интересуемся задачей о существовании «совпадения» $x_* \in X$ пары (A, g):

$$A(x_*) \in g(x_*). \tag{10}$$

Лемма 1. Существование совпадения (10) эквивалентно существованию неподвижной точки у многозначного отображения

$$G = g \circ A^{-1} : Y = AX \to F. \tag{11}$$

Этот простой факт позволяет реализовать первый принцип, необходимый для конструкции топологической характеристики множества решений (10) — найти инвариантное выпуклое, компактное, фундаментальное множество отображения G. Пусть $\psi : P(F) \to R^1_+$ — мера некомпактности Куратовского или Хаусдорфа (можно рассматривать и более общие меры некомпактности, см., напр., [4, 5]). Оператор $G : Y \to P(F)$ называется уплотняющим по мере ψ, если

$$\psi(G(M)) < \psi(M) \text{ при } M \subset Y, \quad \psi(M) > 0.$$

Теорема 1. Если $G = g \circ A^{-1}$ — уплотняющее по мере некомпактности ψ отображение, удовлетворяющее c)-свойству (т. е. отображает всякое компактное в подпространстве $Y \subset F$ множество в предкомпактное в F), то для G существует инвариантное, выпуклое, компактное, фундаментальное множество Φ.

В частности, отсюда следует

$$G|_{Y \cap \Phi} : Y \cap \Phi \to \Phi, \tag{12}$$

$$\operatorname{Fix} G \subset \Phi. \tag{13}$$

Переходя к паре (A, g), получаем из (12) — (13):

$$A, g : \tilde{\Phi} \to \Phi, \tag{14}$$

$$S(A, g) \subset \tilde{\Phi}, \tag{15}$$

где $\tilde{\Phi} = A^{-1}\Phi \subset X$, $S(A, g)$ — множество совпадений пары (A, g) на X.

Таким образом, реализуя первый принцип (теорема 1), сводим задачу о совпадениях в компактные пространства $(\tilde{\Phi}, \Phi)$ (при условии собственности отображения A).

Полезно следующее предложение, вытекающее из теоремы 1:

Теорема 2. Пусть отображение (11) имеет компактные образы, т. е. $G: Y \to K(F)$, и пусть G полунепрерывно сверху и уплотняющее относительно аддитивной меры некомпактности ψ. Тогда G имеет инвариантное выпуклое компактное фундаментальное множество Φ.

Определение 1. Если пара (A, g) порождает отображение $G = g \circ A^{-1}$: $Y \to F$, удовлетворяющее c)-свойству, то будем называть ее допустимой, а векторное поле $f = A - g: X \to F$ допустимым. Если G — уплотняющее отображение, то пару (A, g), векторное поле f, отображение g будем называть A-уплотняющими.

Задачу (10) рассматриваем в дальнейшем для A-уплотняющей допустимой пары (A, g). Эквивалентно она переформулируется как задача о «нулях» A-уплотняющего векторного поля f:

$$\theta \in A(x_*) - g(x_*), \quad x_* \in X. \tag{16}$$

Построение топологических характеристик. Второй принцип конструирования топологической характеристики — построение «компактной ε-аппроксимации на Φ» $\tilde{g}: X \to \Phi$—уплотняющего отображения g, $\tilde{g} = g + \Delta\varepsilon$, где

$$\rho(\Delta_\varepsilon(x), \theta) \leqslant \varepsilon, \quad x \in \tilde{\Phi}. \tag{17}$$

На этом этапе важно обеспечить тот же топологический тип образов отображения $\tilde{g}$ как для g.

Например, если $g: X \to K_v(F)$ — отображение с компактными выпуклыми образами, то

$$\tilde{g}(x) = \overline{\mathrm{co}}\, \pi_\Phi(g(x)), \quad x \in X, \tag{18}$$

где $\pi_\Phi: F \to \Phi$ — ретракция Дугунджи; в случае обобщенно ациклических образов отображения g при условии гомеоморфизма $A: X \to Y$ можно положить

$$\tilde{g}(x) = g(\tilde{\pi}(x)), \quad \tilde{\pi}(x) = A^{-1} \circ \pi \circ A(x), \quad x \in X. \tag{19}$$

В обоих случаях можно считать $\varepsilon = 0$ в неравенстве (17).

Третьим принципом является принцип биективного соответствия. На этом этапе необходимо определить гомотопические классы рассматриваемых векторных полей

$$f(x) = A(x) - g(x) \tag{20}$$

и их «компактных аппроксимаций на $\tilde{\Phi}$»

$$\tilde{f}(x) = A(x) - \tilde{g}(x).$$

Обозначим $D_\psi[X, \partial X]$ совокупность A-уплотняющих допустимых отображений f, удовлетворяющих требованиям: III_1) «θ-отделимость» или «выпуклая θ-отделимость» на ∂X:

$$(A - \bar{g})(\partial X) \cap \{\theta\} = \varnothing, \quad (A - \overline{\mathrm{co}}\, g)(\partial X) \cap \{\theta\} = \varnothing$$

соответственно; здесь $\bar{g}$ — замыкание; $\overline{\mathrm{co}}\, g$ — выпуклое замыкание образов g; III_2) $g: X \to K(F)$ полунепрерывное сверху с компактными образами отображение; III_3 — выполнение некоторого условия (α), сохраняющегося при аппроксимациях $\tilde{g}$ и линейных гомотопиях отображения g к $\tilde{g}$.

Прокомментируем условие III_3. Условие (α) является обычно топологическим требованием на g или на $A - g$, в частности на образы отображения g. Для гомотопий $f_t = A - g(\cdot, t)$, $g: X \times I \to K(F)$, будем требовать не только свойство полунепрерывности сверху g, c)-свойство для $g \circ A^{-1}: Y \otimes I \to F$, уплотняемость отображения $g \circ A^{-1}: Y \otimes I \to F$, $(y, t) \mapsto g(A^{-1}y, t)$, но и дополнительно свойство (α).

Пусть $D_{\psi}^{\alpha}[X, \partial X]$ — часть $D_{\psi}[X, \partial X]$, состоящая из отображений, удовлетворяющих условию (α). Естественным образом $D_{\psi}^{\alpha}[X, \partial X]$ разбивается на классы $[A-g]_{\psi}^{\alpha}$ гомотопных между собой отображений $f = A - g$.

Пусть $D_c^{\alpha}[X, \partial X]$ — совокупность отображений $A - k$ с полунепрерывным сверху компактным отображением $k: X \to K(F)$, удовлетворяющим условию (α); $[A-k]_c^{\alpha}$ — классы гомотопии в D_c^{α}.

Теорема 3 (принцип биективного соответствия). Пусть выполнены условия III_1—III_3. Тогда вложение $i: D_c^{\alpha} \to D_{\psi}^{\alpha}$ индуцирует биективное соответствие классов гомотопии

$$\{[A-k]_c^{\alpha}\} \xrightarrow{i_*} \{[A-g]_{\psi}^{\alpha}\}. \tag{21}$$

В случае $X \subset F$, $A = I$, $X \setminus \partial X$ открыто в F; g — однозначно и непрерывно; принцип биекции установлен Ю. И. Сапроновым, а в случае выпуклозначного g обобщен В. В. Обуховским и автором (см. [4, 5]). Для однозначных A, $g: X \subset E \to F$, $X \setminus \partial X$ открыто в E; E — банахово, он установлен в [7]. Условие (α) в этих работах отсутствует. Однако оно существенно для многозначных отображений и выбора класса $\{A - g\}$.

Если для класса $[A-k]_c^{\alpha}$ построен топологический инвариант $\deg(A-k, X, \theta)$ («топологическая характеристика»), то в силу (21) он определяется для класса $[A-g]_{\psi}^{\alpha}$ равенством

$$\deg(A-g, X, \theta) = \deg(A-k, X, \theta), \tag{22}$$

где $(A-g) \in i_*[A-k]_c^{\alpha}$ — четвертый принцип построения топологической характеристики).

Рассмотрим ряд конкретных вариантов для $f = A - g$ A-уплотняющего векторного поля.

1) A, $g: X \to F$; $g: X \to K_v(F)$ полунепрерывно сверху; $A \in \Phi_{n \geq 0} C^1$ — собственное; $f = A - g$ удовлетворяет условно «θ-отделимости» на ∂X. Тогда определена «степень» $\deg(A - g, X, \theta)$ со значениями в GL_c-оснащенных бордизмах $\mathscr{T}_n(X)$. При этом используется конструкция $\deg(A - k, X, \theta)$, построенная в [3, 8].

2) A, $g: X \to F$, g — полунепрерывное сверху обобщенно ациклическое, $A \in \Phi_0 C^1$ собственное, гомеоморфизм на свой образ. При условии «выпуклой θ-отделимости» определена «многозначная степень» $\deg(A - g, X, \theta)$ со значениями в Z_+, основанная на результатах [6] для случая компактного g.

3) Пусть $F = E^*$ сопряженное к E, $X \subset E$, $X \setminus \partial X$ открыто в E, A, $g: X \to E^*$, A — деминепрерывный, ограниченный, удовлетворяющий α)-условию И. В. Скрыпника [9], $g: X \to K_v(E^*)$ полунепрерывный сверху (в топологии нормы), для $A - g$ выполнено условие «θ-отделимости» в нормированной топологии. Тогда определена целочисленная степень $\deg(A - g, X, \theta)$. При этом степень, построенная в [9] для векторных полей $A - k$ с однозначным g расширяется на случай выпуклозначного k.

4) Если в варианте 1) $A \in \Phi_n C'$ с $n < 0$, то необходимо задать m-мерное замкнутое многообразие Z^m и непрерывное отображение $S: Z^m \to F$ так, чтобы вместо условия «θ-отделимости» выполнялось условие $(A-g) \times \times (\partial X) \cap S(Z^m) = \varnothing$, $q = m + n$; тогда определяется «индекс пересечения» $\gamma(f, S)$, где $f = A - g$, со значениями в группе $\mathscr{F}_q(X \times Z^m)$. Условие $\gamma(f, S) \neq 0$ является достаточным для существования «совпадения» (x_*, z_*): $S(z_*) \in f(x_*)$. Аналогично справедлива

Теорема 4. Если $\deg(A - g, X, \theta) \neq \{0\}$, то в $X \setminus \partial X$ имеется по крайней мере один нуль x_* включения (16).

Это предположение используется для получения теорем существования.

1. *Борисович Ю. Г.* Глобальный анализ и разрешимость нелинейных краевых задач // Тр. IX советско-чехословацкого совещ.— Донецк : 1986 (в печати).
2. *Благодатских В. И.* Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1984.— **166**.— С. 23—43.

3. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере — Шаудера // Успехи мат. наук.— 1977.— **32**, № 4.— С. 3—54.
4. *Борисович Ю. Г., Гальман Б. Д., Мышкис Л. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Там же.— 1980.— **35**, № 1.— С. 59—126.
5. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначный анализ и операторные включения // Итоги науки и техники ВИНИТИ // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.— 1986.— **29**.— С. 151—211.
6. *Бенкафадар Н., Гельман Б. Д.* О локальной степени многозначных векторных полей с фредгольмовой главной частью.— Воронеж. ун-т, 1982.— 28 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3422—82.
7. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // Мат. заметки.— 1982.— **31**, № 5.— С. 801—812.
8. *Ратинер Н. М.* К теории степени фредгольмовых отображений неотрицательного индекса.— Воронеж. ун-т, 1981.— 31 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1493—81.
9. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев : Наук. думка, 1973.— 219 с.
10. *Tromba A. J.* On the number of simply connected minimal surfaces spanning a curve // Mem. Amer. Math. Soc.— 1977.— **12**, N 194.

Воронеж. гос. ун-т

Получено 28.09.87