

УДК 539.3:534.1

©2016. Вит.В. Волчков, Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛН СДВИГА НА ВНУТРЕННИХ ТУННЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В ВИДЕ ПОЛОСТИ И ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

С использованием метода изображений построены численно-аналитические решения двумерных краевых задач о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на протяженной туннельной цилиндрической полости кругового сечения, а также на внутреннем круговом цилиндрическом изотропном упругом включении с осями, лежащими в срединной плоскости плоскопараллельного изотропного деформируемого слоя со свободными от напряжений плоскими гранями. Рассмотрены случаи нормального падения на неоднородности волн из произвольной моды дисперсионного спектра. Решение задач сведено к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по соответствующим базисным частным решениям волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований, характеризующие ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса полости, относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны из низшей моды дисперсионного спектра, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения.

**Ключевые слова:** *изотропный упругий слой; свободные плоские грани; центрально расположенная внутренняя туннельная неоднородность; цилиндрическая полость; цилиндрическое включение; дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига; метод изображений; ряды по базисным решениям волновых уравнений; варьирование геометрических и механических параметров; закономерности распределений волновых перемещений.*

**Введение и постановка задачи.** Проблемы теоретического анализа процессов рассеяния стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде цилиндрических полостей и включений в упругих телах, несмотря на длительный период обширных исследований, отраженных в монографиях [1–4], сохраняют ряд открытых, актуальных в фундаментальном и прикладном отношении аспектов. К ним относятся вопросы о структуре двумерных дифракционных полей, формирующихся при рассеянии нормальных сдвиговых волн на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полостей и жестких либо деформируемых включений, расположенных в толще слоя параллельно его граням. Задачи данного типа рассматривались лишь в ограниченном числе работ, к которым, в частности, относятся публикация [5], содержащая теоретические результаты по методике построения дисперсионных соотношений для волн сдвига вдоль изотропного слоя с периодическим рядом перпендикулярных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных цилиндрических полостей; публикации [6–10], в которых рассмотрены задачи о дифракционных полях сдвиговых магнитоупругих волн в приграничном градиентно-неоднородном слое изотропного полупространства с внутренней туннельной

цилиндрической полостью; работа [11], посвященная исследованию эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе. В работах [12–14] задача о дифракционном рассеянии волн продольного сдвига на туннельных цилиндрических полостях и включениях в изотропном и анизотропном слое с жестко закрепленными плоскими гранями рассматривалась на основе численно-аналитической методики, базирующейся на концепции зеркального отражения (методе изображений [15]), на точном аналитическом интегрировании уравнений движения в полярных координатах и введении представлений для искомых полей в виде рядов с неопределенными коэффициентами по множествам базисных частных решений волновых уравнений.

В настоящей работе подобный подход распространяется на случай дифракционного рассеяния волн продольного сдвига на туннельных цилиндрических полостях и включениях в слое со свободными от напряжений плоскими гранями. Рассматривается изотропный упругий слой (рис. 1) толщины  $2h$ , занимающий в прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$  область  $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$ . Грани слоя  $x_2 = \pm h$  свободны от напряжений, а внутри слоя имеется занимающая область  $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$  туннельная неоднородность в виде цилиндрической полости либо цилиндрического жесткого или упругого включения. Материалы слоя и включения соответственно характеризуются параметрами плотности  $\rho_1, \rho_2$  и модулями сдвига  $\mu_1, \mu_2$ . Полагается, что в слое вдоль положительного координатного направления  $Ox_1$  распространяется нормальная симметричная по координате  $x_2$  поляризованная вдоль  $Ox_3$  волна продольного сдвига с круговой частотой  $\omega$  из произвольной моды дисперсионного спектра, характеризующаяся функцией упругих волновых перемещений  $U^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t)$ .

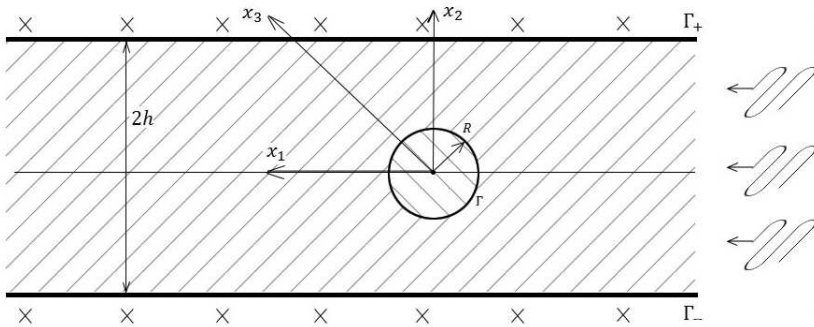


Рис. 1. Сечение слоя с туннельной цилиндрической неоднородностью.

В случае слоя с неоднородностью в виде упругого включения искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений  $U^{(\text{отр})}(x_1, x_2, t)$  в отраженных волнах и волновых перемещений  $U^{(\text{прел})}(x_1, x_2, t)$  в преломленных во включении волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнений стационарных сдвиговых упругих колебаний материалов слоя

и включения, которые после отнесения всех характеристик к линейной размерностью к нормирующему параметру  $h$  принимают вид

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \Omega_j^2) U^{(j)} &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \Omega_1 &= (\rho_1 \omega^2 / \mu_1)^{1/2}, \quad \Omega_2^2 = \Omega_1^2 \mu_1 \rho_2 / (\mu_2 \rho_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$U^{(1)} = U^{(\text{пад})} + U^{(\text{отр})}, \quad U^{(2)} = U^{(\text{прел})}. \quad (2)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи в случае неоднородности в виде упругого включения имеют вид

$$(\sigma_{23}^{(1)})_{x_2=\pm h} = 0, \quad (U^{(1)})_\Gamma = (U^{(2)})_\Gamma, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_\Gamma = (\sigma_{r3}^{(2)})_\Gamma, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  – цилиндрическая граница контакта материалов слоя и включения;  $(\sigma_{r3}^{(j)})_\Gamma$  – отнесенные к нормирующему параметру  $\mu_* = \mu_1$  амплитудные характеристики касательных напряжений на поверхности  $\Gamma$  в материалах слоя и включения.

В случае неоднородности в виде абсолютно жесткого фиксированного включения подлежащая анализу краевая задача имеет вид

$$(\nabla^2 + \Omega_1^2) U^{(1)} = 0, \quad (\sigma_{23}^{(1)})_{x_2=\pm h} = 0, \quad (U^{(1)})_\Gamma = 0, \quad (4)$$

а для неоднородности в виде цилиндрической полости со свободной границей – вид

$$(\nabla^2 + \Omega_1^2) U^{(1)} = 0, \quad (\sigma_{23}^{(1)})_{x_2=\pm h} = 0, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_\Gamma = 0. \quad (5)$$

**1. Построение численно-аналитических решений рассматриваемых вариантов задачи.** На исходном этапе построения решения применительно ко всем рассматриваемым вариантам задачи для функции волновых упругих перемещений в падающей нормальной упругой  $SH$ -волне вводится исходное представление

$$U_3^{(\text{пад})}(x_1, x_2) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) e^{-i(\omega t - k_n x_1)}, \quad (6)$$

в котором  $\alpha_n = n\pi/h$ ,  $k_n = (\Omega_1^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$ ,  $n$  – номер моды нормальных бегущих симметричных  $SH$ -волн в свободном по плоским граням слое. Представление (6) априори удовлетворяет первому из соотношений в группах краевых условий (3)–(5).

Для записи поля волн, отраженных от неоднородности и удовлетворяющих краевому условию на свободных от напряжений гранях слоя, согласно концепции метода изображений, вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами  $O_k$ , имеющими в  $Ox_1x_2$  координаты  $x_{1,k} = 0$ ,  $x_{2,k} = 2kh$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Соответственно записывается представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_n(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (7)$$

После применения теорем сложения цилиндрических функций оно преобразуется к виду

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} [H_{p-n}^{(1)}(2\Omega h k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega h k)] \right] \cos(n\theta), \quad (8)$$

и при использовании обозначения  $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} H_{p-n}^{(1)}(2\Omega h k)$  приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром включения,

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (9)$$

Контурное представление на  $\Gamma$  для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad Q_p = J_p \left( -i r (\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2} \right) \left( \frac{(i\nu_1 + \nu_2)}{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2}} \right)^p \quad (10)$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(\text{отр})} = \\ = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left( r \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \\ \delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

При рассмотрении варианта задачи о рассеянии нормальных волн на неоднородности в виде цилиндрического упругого включения для преломленных во включении волн вводится представление вида

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r) \cos(n\theta), \quad (12)$$

в котором  $B_n$  – подлежащие определению коэффициенты в разложении поля преломленных во включении волн рядом по базисным цилиндрическим стоячим волнам;  $J_n(\Omega_2 r)$  – цилиндрические функции Бесселя первого рода индекса  $n$ ;  $(r, \theta)$  – полярные координаты с полюсом в центре сечения включения.

При использовании представлений (9), (11), (12) для записи функциональных уравнений, следующих из краевых условий (3) на контактной поверхности  $\Gamma$ , и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получена бесконечная система из двух групп линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & B_n J_n(\Omega_2 R) - A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 R) \times \\
 & \quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 h k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right), \\
 & \quad B_n \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R) \right) - \\
 & \quad - A_n \left( \frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R) \right) - \\
 & \quad - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \left( \frac{n}{R} J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R) \right) \times \\
 & \quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 h k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \\
 & \quad \times i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right) \quad (n = \overline{0, \infty}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

После исключения в указанных группах коэффициента  $B_n$  система (13) преобразуется к следующему, используемому при редукции и численных исследованиях, виду:

$$\begin{aligned}
 & A_n \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R)}{\frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R)} - \frac{H_n^{(1)}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) + \\
 & \quad + \delta_n^0 \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\frac{n}{R} J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R)}{\frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R)} - \frac{J_n(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) \times \\
 & \quad \times \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \left[ H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 h k) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{J_n (\Omega_2 R)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{\frac{n}{R} J_n (\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1} (\Omega_2 R)} \right) \times \\
 &\quad \times i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right) \quad (n = \overline{0, \infty}). \quad (14)
 \end{aligned}$$

В случае варианта задачи о рассеянии нормальной волны на абсолютно жестком фиксированном туннельном цилиндрическом включении в слое со свободными от напряжений плоскими гранями получаемая аналогичным образом система алгебраических уравнений, к которой сводится краевая задача (4), имеет вид

$$\begin{aligned}
 &A_n H_n^{(1)} (\Omega_1 R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n (\Omega_1 R) \times \\
 &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ H_{p-n}^{(1)} (2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)} (2\Omega_1 h k) \right] = \\
 &= -U_{30} \delta_n^0 J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right) \\
 &\quad (n = \overline{0, \infty}). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Наконец, в случае рассеяния нормальной волны на неоднородности в виде туннельной цилиндрической полости со свободной границей соответствующая алгебраическая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 &A_n \left( \frac{n}{R} H_n^{(1)} (\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)} (\Omega_1 R) \right) + \\
 &+ \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \left( \frac{n}{R} J_n (\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1} (\Omega_1 R) \right) \times \\
 &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ H_{p-n}^{(1)} (2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)} (2\Omega_1 h k) \right] = \\
 &= -U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) i^n \times \\
 &\quad \times \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right) \quad (n = \overline{0, \infty}). \quad (16)
 \end{aligned}$$

В результате определения из приведенных алгебраических систем (13)–(16) искомых коэффициентов может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных исследуемым волновым полям.

**2. Результаты численных исследований.** С использованием построенных теоретических решений осуществлен анализ ряда эффектов в распределениях дифракционных полей волновых перемещений для моментов времени, соответствующих началу периодов волновых колебаний, при падении симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной  $\lambda = (2\pi/k_n) h^{-1}$  из низшей моды  $n = 0$  дисперсионного спектра на включения и полости с различными относительными радиусами. В первую очередь исследовалось влияние рассматриваемого типа краевых условий на плоских гранях слоя в сравнении с ранее изучавшимся в работах [12,13] случаем жесткого закрепления граней. Результаты расчетов представлены в виде тонированных изображений на рис. 2 (а, б) – 10 (а, б), на которых переход от темных тонов к светлым отвечает нарастанию интенсивности характеризуемого поля. Представлены картины распределения уровней волновых перемещений внутри включений различных относительных радиусов  $R$  и в подобласти продольного сечения слоя  $x_1 \in [-4h; 8h]$ ,  $x_2 \in [-h; h]$  вне включений либо полостей. Варьируемыми параметрами являлись также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения. Фрагменты а) представленных рисунков характеризуют распределения интенсивностей дифракционных полей для слоя с жестким закреплением граней, а фрагменты б) относятся к случаю слоя со свободными от напряжений гранями. При анализе эффектов рассеяния на неоднородности в виде упругого цилиндрического включения полагалось, что материал включения имеет большую, либо меньшую, по сравнению с материалом слоя, сдвиговую жесткость, а плотности указанных материалов равны. Приведенные на рисунках картины рассеяния волн на включениях отвечают случаям  $\mu_1 = 2\mu_2$  (рис. 2, 4, 5) и  $\mu_1 = 0.5\mu_2$  (рис. 3, 6, 7, 8).

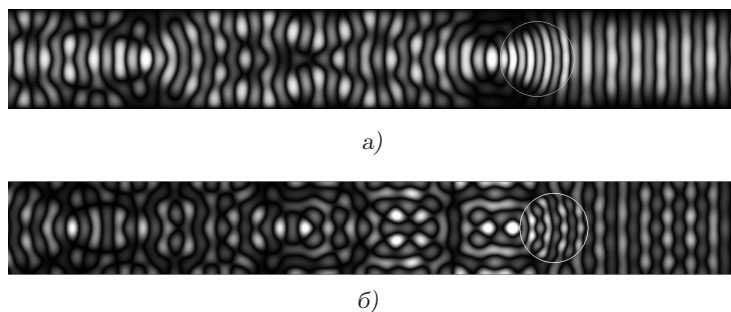
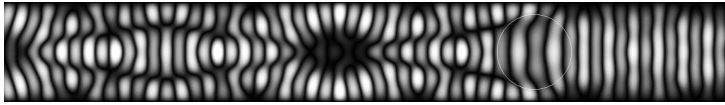


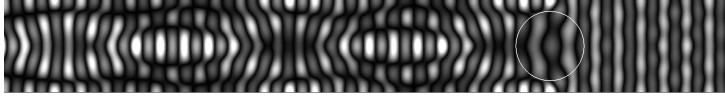
Рис. 2. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.5h$ ;  $\mu_1 = 2\mu_*$ ;  $\mu_2 = \mu_*$ .

Приведенные картины распределений интенсивностей дифракционных полей обнаруживают значительное качественное влияние на их структуру типа граничных условий на плоских гранях слоя. Это заключение в равной степени относится к случаям включений с повышенной и пониженной сдвиговой жесткостью. Степень различий в структурах анализируемых полей возрастает по мере увеличения относительной длины рассеиваемых волн. В большей мере это влияние относится к картинам полей в тыльной зоне за



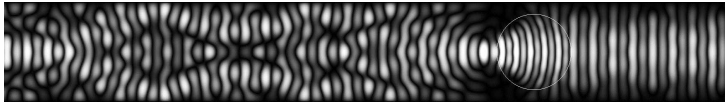


а)

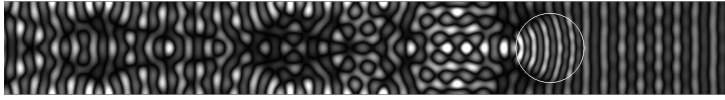


б)

Рис. 3. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.5h$ ;  $\mu_1 = \mu_*$ ;  $\mu_2 = 2\mu_*$ .

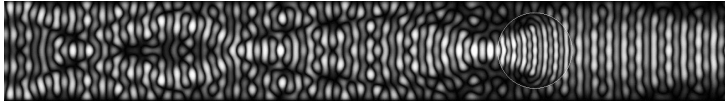


а)

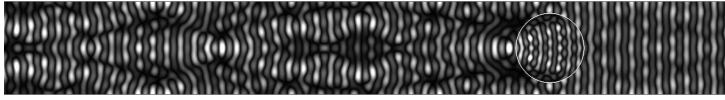


б)

Рис. 4. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.4h$ ;  $\mu_1 = 2\mu_*$ ;  $\mu_2 = \mu_*$ .



а)

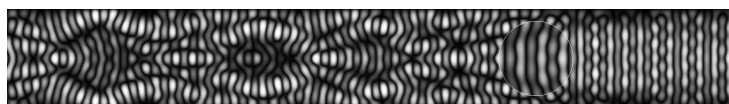


б)

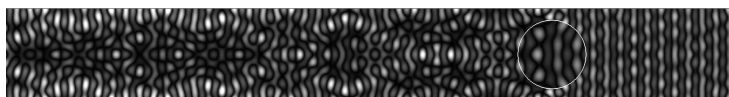
Рис. 5. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.3h$ ;  $\mu_1 = 2\mu_*$ ;  $\mu_2 = \mu_*$ .

рассеивающей неоднородностью. Можно также констатировать, что в случае слоя со свободными гранями снижается относительная интенсивность волн, отражаемых от включений с обоими рассматриваемыми показателями относительной жесткости, и уменьшается их вклад в искажение картины распределения интенсивности падающей волны в лицевой области взаимодействия. Можно также указать на эффекты наличия зон более высокой интенсивности рассеянных волн в тыльной зоне взаимодействия в случае жесткого закрепления граней слоя по сравнению со случаем свободных граней.



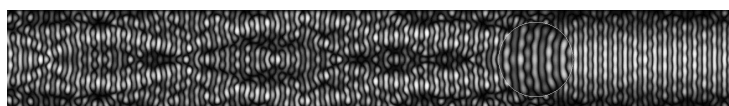


а)

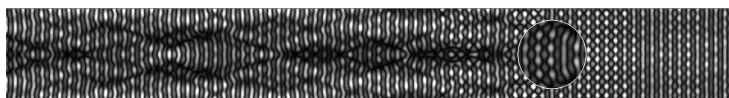


б)

Рис. 6. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.3h$ ;  $\mu_1 = \mu_*$ ;  $\mu_2 = 2\mu_*$ .

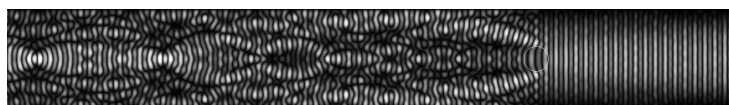


а)

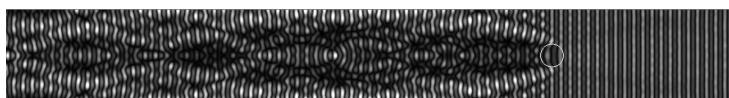


б)

Рис. 7. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.75h$ ;  $\lambda = 0.2h$ ;  $\mu_1 = \mu_*$ ;  $\mu_2 = 2\mu_*$ .



а)



б)

Рис. 8. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.25h$ ;  $\lambda = 0.2h$ ;  $\mu_1 = \mu_*$ ;  $\mu_2 = 2\mu_*$ .

В рассеянном поле за полостью в слое со свободными плоскими границами также выделяются явно выраженные интенсивные огибающие потоки и наблюдается специфический эффект возникновения зон фокусировки волн в теневой области на очень больших расстояниях от включения.

На рис. 9–16 в аналогичной форме представлены некоторые результаты расчетов дифракционных полей, формирующихся при рассеянии нормальных волн на расположенных в слое со свободными граничными поверхностями неоднородностях в виде цилиндрических полостей с жесткозакрепленной

граничной поверхностью (полостей с фиксированными абсолютно жесткими включениями) либо полостей со свободной границей. Здесь также приведены сходные распределения для случая слоя с закрепленными плоскими гранями, содержащиеся в работе [13]. Фрагменты *а)* этих рисунков характеризуют дифракционные поля вне полости со свободной границей для жесткозакрепленного по граням слоя, а фрагменты *б)* соответствуют случаю закрепленной границы полости для случая жесткозакрепленного слоя. Фрагменты *в)* и *г)*, соответственно, аналогичны фрагментам *а)* и *б)* по характеру условия на границе полости, но относятся к случаю слоя со свободными от напряжений гранями.

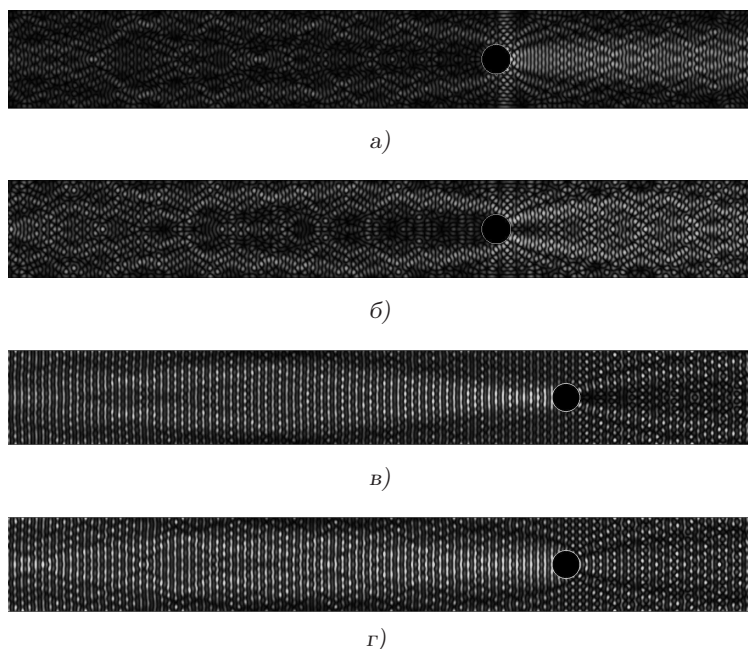
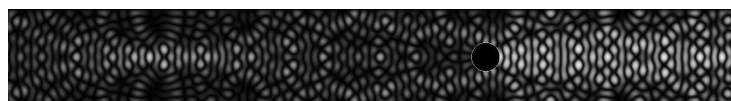


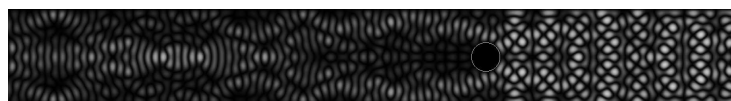
Рис. 9. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.3h$ ;  $\lambda = 0.5R$ .

Для данного типа рассеивающих неоднородностей влияние типа краевых условий на гранях слоя также носит качественный характер. Для рассеивающих полостей малого размера при варьируемой относительной длине падающей нормальной волны, как показывают рис. 9–11, картины распределений для слоя с закрепленными и со свободными гранями качественно различаются, однако влияние характера краевых условий на контуре полости в случае свободного по граням слоя является весьма малым.

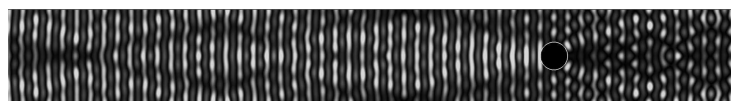
Специфический эффект в структуре дифракционного поля для слоя со свободными гранями характеризуют распределения, представленные на рис. 12–14. Он заключается в том, что при рассеянии волн рассматриваемых длин на закрепленных либо свободных по границе полостях с  $R > 0.5h$  поля рассеиваемых волн в тыльной зоне за неоднородностью приобретают



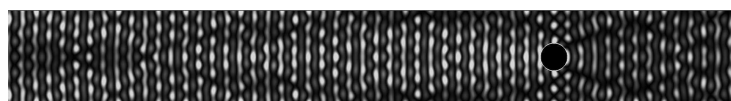
а)



б)

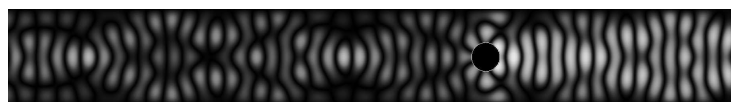


в)



г)

Рис. 10. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.3h$ ;  $\lambda = R$ .



а)



б)



в)



г)

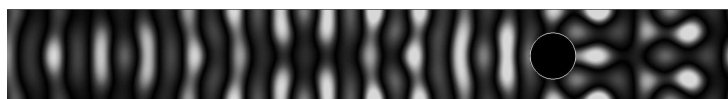
Рис. 11. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.3h$ ;  $\lambda = 2R$ .



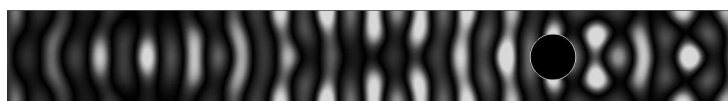
а)



б)



в)



г)

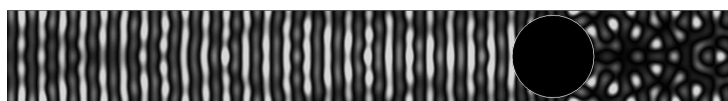
Рис. 12. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.5h$ ;  $\lambda = 2R$ .



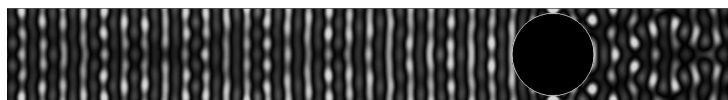
а)



б)



в)



г)

Рис. 13. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.9h$ ;  $\lambda = 0.5R$ .



а)



б)



в)



г)

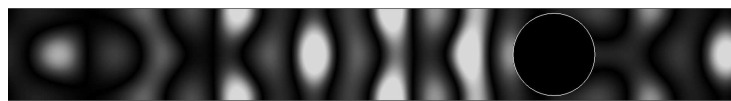
Рис. 14. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.9h$ ;  $\lambda = R$ .



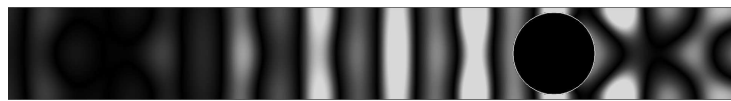
а)



б)



в)



г)

Рис. 15. Картина распределения волновых перемещений для случая  $R = 0.9h$ ;  $\lambda = 2R$ .

регулярный характер, отвечающий картинам распределения интенсивностей падающих волн, в то время как в лицевой области взаимодействия возникают интенсивные искажения, генерируемые отражаемыми волнами. Это объясняется высокой отражающей способностью полостей в указываемых случаях и низкой интенсивностью огибающих рассеиваемых волн, почти не вносящих искажений в картины распределения интенсивности исходной падающей нормальной волны. В то же время полость с  $R = 0.9h$  в слое с закрепленными гранями независимо от краевых условий на ее поверхности, как свидетельствуют рис. 13–15, создает эффект практически полного затенения в тыльной области взаимодействия за неоднородностью, в то время, как в слое со свободными гранями в этом случае эффекты огибания волнами полостей и со свободной, и с закрепленной поверхностями являются гораздо более интенсивными.

**Выводы.** В итоге проведенных теоретических исследований с использованием метода изображений получены численно-аналитические решения двумерных краевых задач о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига в плоскопараллельном деформируемом слое на внутренних цилиндрических туннельных неоднородностях в виде цилиндрического изотропного упругого включения кругового сечения, туннельной цилиндрической полости со свободной либо закрепленной граничной поверхностью. Рассматриваемые задачи сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований для случаев рассеяния на неоднородностях волн низшей моды дисперсионного спектра с варьируемыми относительными длинами. В результате исследований описан ряд закономерностей и различий в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса включений и полостей, относительной длины падающей волны, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения применительно к случаям задания на гранях однородных условий в динамических напряжениях либо перемещениях.

1. Pao Y.-H., Mow C.C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. – New York: Crane Russak, 1973. – 308 p.
2. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – Киев: Наук. думка, 1985. – 176 с.
5. Golovchan V.T., Guz A.N. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities // Soviet Appl. Mech. – 1976. – **12**, Iss. 9. – P. 888–892.
6. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 5716–5729.



7. Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H. et al. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // Compos. Sci. Technol. – 2009. – **69**. – P. 1115–1123.
8. Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H., Zhang L.-L. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // Phil. Mag. Lett. – 2010. – **90**. – P. 361–380.
9. Fang X.-Q., Liu J.-X., Zhang L.-L., Kong Y.-P. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves // Mater. Struct. – 2011. – **44**. – P. 67–75.
10. Yang Y.-H., Wu L.-Z., Fang X.-Q. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // J. Nondestructive Eval. – 2010. – **29**. – P. 233–240.
11. Itou S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – **22**, No. 4. – P. 475–490.
12. Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на туннельном цилиндрическом включении в упругом слое с закрепленными гранями // Вестн. Донецк. национального ун-та. Сер. А. Естествен. науки. – 2014. – № 1. – С. 14–21.
13. Вуколов Д.С. Дифракция сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости со свободной либо закрепленной границей в упругом слое // Теорет. и прикл. механика. – 2014. – № 8 (54). – С. 123–132.
14. Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на внутреннем цилиндрическом ортотропном включении эллиптического сечения в ортотропном упругом слое с закрепленными гранями // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 109–121.
15. Taraldsen G. The complex image method // Wave Motion. – 2005. – **43**. – P. 91–97.

Vit.V. Volchkov, D.S. Vukolov, V.I. Storozhev

### Diffraction of shear waves on internal tunnel cylindrical inhomogeneities in the form of a cavity and inclusion in the elastic layer with free face

Numerical-analytical solutions of two-dimensional boundary problems of diffraction scattering of symmetric normal shear waves on cylindrical cavity or on isotropic elastic inclusion in plane-parallel deformable layer with free faces are obtained using the method of images. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of representations of wave fields in the areas of cross-section of layer and inclusion in rows by the basic set of particular solutions of wave equations in cylindrical functions. The results of numerical investigation are presented, which characterize a number of leading effects in the distribution of the wave motion in the near- and far- field diffraction under varying the relative radius of cavities and inclusions, the relative length of the incident wave from the lowest mode of dispersion spectrum, and the ratio of the shear modulus for the material layer and inclusion.

**Keywords:** *isotropic elastic layer with free faces; centrally located inner cylindrical cavity or inclusion; diffractive scattering of normal shear waves; numerical-analytical study; the method of images; the series of basic solutions of wave equations; variation of geometrical and mechanical parameters; effects of distribution of wave motion fields.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный ун-т”  
stvi@i.ua

Получено 15.08.16