Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 292 – 313

Обращение локального преобразования Помпейю на римановых симметрических пространствах ранга один

Валерий В. Волчков, Виталий В. Волчков

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Изучается проблема обращения локального преобразования Помпейю на римановых симметрических пространствах ранга один. Найдена явная формула восстановления функции через ее средние по шарам и сферам одного фиксированного радиуса.

2010 MSC. 26B15, 43A85, 44A15, 53C65, 53C35.

Ключевые слова и фразы. Симметрические пространства, локальное преобразование Помпейю, операторы среднего значения, формулы обращения.

Введение

Пусть X — многообразие, $\mathcal{M}$ — некоторое семейство подмногообразий многообразия X. Интегрально-геометрические преобразования устанавливают соответствие между функциями f на X и функциями на $\mathcal{M}$, сопоставляя f их интегралы по подмногообразиям из $\mathcal{M}$. Основные задачи при изучении таких преобразований состоят в описании их образов и ядер, а также в построении формул обращения, восстанавливающих исходные объекты по их образам. Вопросы указанного типа часто встречаются в различных областях математики (дифференциальные уравнения, математическая физика, теория представлений и т.д.) и формируют одну из ветвей современного анализа, называемую интегральной геометрией (см. [1–3]).

Классическая интегральная геометрия возникла из работ Г. Лоренца, Г. Минковского, П. Функа и И. Радона (1906–1917 г.). Эти авторы изучали оператор интегрирования по гиперплоскостям в евклидовом пространстве (преобразование Радона), а также некоторые его

Статья поступила в редакцию 11.01.2011

проективные аналоги (преобразование Минковского–Функа на сфере). Основное внимание в их работах уделялось нахождению явных формул обращения. Последующие исследования в этом направлении были связаны с различными обобщениями и модификациями классического преобразования Радона (лучевое (рентгеновское) преобразование, преобразование Радона по геодезическим, орисферическая версия преобразования Радона и др.). В настоящее время в этой области получено много глубоких и красивых результатов (см. [3] и библиографию в этой работе).

В 1928 г. румынский математик Д. Помпейю рассмотрел преобразования, сопоставляющие функции ее интегралы по всем множествам, конгруэнтным данному [4–6]. Тем самым было положено начало новому направлению в интегральной геометрии, называемому, следуя Л. Зальцману, нетрадиционной интегральной геометрией. Результаты о свойствах указанного преобразования, названного впоследствии преобразованием Помпейю, значительно менее полны. Особенно много нерешенных проблем остается в задачах об обращении преобразования Помпейю. Все известные здесь результаты относились к случаю глобального преобразования Помпейю, а для локального преобразования Помпейю были известны лишь некоторые достаточно громоздкие процедуры восстановления [7–13]. Таким образом, до настоящего времени фактически не было ни одного нетривиального результата, дающего явную формулу обращения для локального преобразования Помпейю. В данной работе впервые приводится явная формула для восстановления функции в шаре B_R на симметрическом пространстве ранга один через ее интегралы по шарам и сферам одного фиксированного радиуса из B_R.

1. Обозначения и предварительные конструкции

В работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение к числу $\lambda \in \mathbb{C}$; $\delta_{A,B}$ — символ Кронекера; $(\lambda)_l$ — символ Похгаммера ($(\lambda)_0 = 1$ и $(\lambda)_l = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+l-1)$ при $l \in \mathbb{N}$); Γ — гамма-функция; $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса;

$$R_\mu^{(\alpha,\beta)}(t) = F(-\mu, \mu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-t)/2) \text{ —}$$

функции Якоби первого рода; $P_l^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби; $C_l^\gamma(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

Пусть T — распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^1$. Его преобразование Фурье определяется равенством

$$\widehat{T}(\lambda) = \left\langle T(x), e^{-ix\lambda} \right\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Символом $r(T)$ обозначается радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^1$, содержащего носитель T.

Пусть $a \in [0,1]$, $\psi \in [0,\pi]$. Для $\alpha > \beta > -1/2$, $p \geqslant q$, $p,q \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\xi^{\alpha,\beta}_{p,q}(a,\psi) = P_q^{(\alpha-\beta-1,\beta+p-q)}(2a^2-1)a^{p-q}\mathcal{C}^{\beta}_{p-q}(\psi), \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{C}^{\beta}_{p-q}(\psi) = (\beta+p-q)\Gamma(\beta)C^{\beta}_{p-q}(\cos\psi), \quad \text{если} \quad \beta \neq 0,$$

$$\mathcal{C}^{0}_{p-q}(\psi) = \begin{cases} 2\cos((p-q)\psi), & p \neq q \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

Соотношения ортогональности для многочленов Якоби [14, п. 10.8, формула (4)] влекут равенство

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^1 \xi^{\alpha,\beta}_{p,q}(a,\psi)\xi^{\alpha,\beta}_{p',q'}(a,\psi)\,dm_{\alpha,\beta}(a,\psi) = \eta^{\alpha,\beta}_{p,q}\,\delta_{(p,q),(p',q')}, \tag{1.2}$$

где

$$\eta^{\alpha,\beta}_{p,q} = \frac{\pi(\beta+p-q)\Gamma(2\beta+p-q)\Gamma(\beta+p+1)\Gamma(\alpha-\beta+q)}{2^{2\beta}(\alpha+p+q)q!(p-q)!\Gamma(\alpha+p)},$$

$$dm_{\alpha,\beta}(a,\psi) = a^{2\beta+1}(1-a^2)^{\alpha-\beta-1}(\sin\psi)^{2\beta}\,da\,d\psi.$$

Следующее утверждение (см. [15, раздел 8.1]) содержит некоторую информацию о сходимости рядов по системе $\xi^{\alpha,\beta}_{p,q}(a,\psi)$.

Лемма 1.1. *Пусть h — бесконечно дифференцируемая функция на полукруге $U_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и*

$$h_{p,q} = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^1 h(ae^{i\psi})\xi^{\alpha,\beta}_{p,q}(a,\psi)\,dm_{\alpha,\beta}(a,\psi), \quad p \geqslant q,\ p,q \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда:

(i) *для любого* $\varkappa > 0$ *при* $p \to \infty$ *имеет место равномерная по* q *оценка*

$$h_{p,q} = O(p^{-\varkappa});$$

(ii) *справедливо разложение*

$$h(ae^{i\psi}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{h_{p,q}}{\eta_{p,q}^{\alpha,\beta}} \, \xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a,\psi), \tag{1.3}$$

где ряд в (1.3) *сходится абсолютно и равномерно на* U_+*;*

(iii) *если* h *зависит от дополнительного параметра* s*, меняющегося на множестве* $\mathcal{S}$*, и все частные производные* h *относительно* $a\cos\psi$*,* $a\sin\psi$ *равномерно ограничены по* $(ae^{i\psi}, s)$*, то сходимость ряда в* (1.3) *будет также равномерной и на* $\mathcal{S}$*.*

Если $\alpha = \beta$ или $\beta = -1/2$, то вместо (1.1) ниже используется система $\mathcal{C}_p^\alpha(\psi)$. Соотношения ортогональности в данном случае имеют вид

$$\int_0^\pi \mathcal{C}_p^\alpha(\psi)\mathcal{C}_{p'}^\alpha(\psi)\, dm_\alpha(\psi) = \frac{\pi(\alpha+p)\Gamma(2\alpha+p)}{2^{2\alpha-1}p!}\, \delta_{p,p'}, \tag{1.4}$$

где

$$dm_\alpha(\psi) = (\sin\psi)^{2\alpha}\, d\psi.$$

Относительно аналога леммы 1.1 для $\mathcal{C}_p^\alpha(\psi)$ см. [16, гл. 7, теорема 7.6]. Для единства записи разложений по указанным системам далее полагается

$$\xi_{p,q}^{\alpha,\alpha}(1,\psi) = \delta_{q,0}\, \mathcal{C}_p^\alpha(\psi),$$

$$\xi_{p,q}^{\alpha,-1/2}(a,0) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)_{p-q}}{(p-q)!}(1-2p+2q)P_q^{(\alpha-1/2,p-q-1/2)}(2a^2-1)a^{p-q},$$

$$a \in [-1,1].$$

Пусть X — риманово симметрическое пространство ранга один, $d(\cdot,\cdot)$ — функция расстояния на X, o — фиксированная точка (начало) в X. Ниже будут встречаться следующие множества в X:

$$B_R = \{x \in X : d(x,o) < R\}, \quad \overline{B_R} = \{x \in X : d(x,o) \leqslant R\},$$

$$S_R = \{x \in X : d(x,o) = R\}.$$

Буквой $\mathcal{O}$ будет обозначаться открытое множество в X.

Далее, нам потребуются следующие классы функций и распределений: $C^s(\mathcal{O})$ ($s \in \mathbb{Z}_+$ или $s = \infty$) — пространство s раз непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{O}$ функций; $\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$; $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций; $\mathrm{RA}(\mathcal{O})$ — класс вещественно-аналитических функций; $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ — класс локально интегрируемых на $\mathcal{O}$ функций по римановой мере $d\mu$; если E — произвольное множество функций на $\mathcal{O}$, то $\mathcal{L}inE$ — совокупность всех конечных линейных комбинаций функций из E; $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ — соответственно пространства распределений и распределений с компактным носителем на $\mathcal{O}$. Носитель распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ будет обозначаться $\operatorname{supp} f$. Символ $\times$ используется для свертки распределений на областях в X в тех случаях, когда она существует [2, гл. 2, § 5]. Для свертки распределений на $\mathbb{R}^n$ сохраняется обычный значок “$*$”.

Дальнейшие построения опираются на классификацию римановых симметрических пространств ранга один и их реализации. Как известно (см. [2, гл. 1, § 4, п. 2,3]), все такие пространства состоят из: 1) гиперболических пространств $\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ обозначает поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{Q}$); 2) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$; 3) евклидовых сфер $\mathbb{S}^n$; 4) проективных пространств $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; 6) проективной плоскости Кэли $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ — класс некомпактных пространств X, а $\mathfrak{X}_2$ — класс компактных X. Если $X \in \mathfrak{X}_1$, условимся, что максимум секционной кривизны X равен -1, а в случае $X \in \mathfrak{X}_2$ предположим, что минимум секционной кривизны X равен 1. Обозначим через a_X вещественную размерность пространства X и будем использовать реализации для X, описанные в [8, часть 1, гл. 2, 3], [17]. В частности, из [8, часть 1, гл. 2, 3] видно, что расстояние на X в указанных выше моделях определяется равенством

$$d(0,x) = \begin{cases} \operatorname{arth}|x|, & X \in \mathfrak{X}_1 \\ \operatorname{arctg}|x|, & X \in \mathfrak{X}_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

и условием инвариантности d относительно группы изометрий G пространства X. Соотношение (1.5) показывает, что геодезический шар B_R совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и соответствующим радиусом. Здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что $0 < R \leqslant \operatorname{diam} X$, где

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} d(x,y).$$

Положим $\alpha_X = -1 + a_X/2$, а $\beta_X = n/2 - 1$, $-1/2$, 0, 1, 3 соответственно в каждом из следующих пяти случаев: 1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $X = \mathbb{S}^n$;

2) $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$; 3) $X=\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$; 4) $X=\mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$, $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$; 5) $X=\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$, $X=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Риманова мера на X имеет вид

$$d\mu(x)=(1+\varepsilon_X|x|^2)^{-\rho_X-1}dx, \tag{1.6}$$

где dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^{a_X}$,

$$\rho_X=\alpha_X+\beta_X+1,\quad \varepsilon_X=\begin{cases}-1, & X\in\mathfrak{X}_1\\ 1, & X\in\mathfrak{X}_2.\end{cases}$$

Площадь сферы радиуса r в X равна

$$A_X(r)=b_X\frac{(\Omega(r))^{2\alpha_X+1}}{(1+\varepsilon_X\Omega^2(r))^{\rho_X}},\quad \text{где}\quad b_X=\frac{2\pi^{a_X/2}}{\Gamma(a_X/2)},$$

Ω – обратная функция к функции

$$\Omega^{-1}(r)=d\,(0,r\mathbf{e}),\quad \mathbf{e}=(1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{a_X}. \tag{1.7}$$

Пусть $\mathfrak{X}_3$ — класс пространств X постоянной кривизны, т.е. $\mathfrak{X}_3=\{\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}},\mathbb{S}^n,\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\}$. Возьмём $k\in\mathbb{Z}_+$ и $m\in\big\{0,\dots,M_X(k)\big\}$, где

$$M_X(k)=\begin{cases}0, & X\in\mathfrak{X}_3\\ [k/2]\,, & X\notin\mathfrak{X}_3.\end{cases}$$

Определим $\mathcal{H}^{k,m}_X=\mathcal{H}^k_{a_X}$ в случае $X\in\mathfrak{X}_3$ и

$$\mathcal{H}^{k,m}_X=\big\{f\in\mathcal{H}^k_{a_X}:(Lf)(x)=4\varepsilon_X(m-\beta_X)(k-m)(1+\varepsilon_X|x|^2)f(x)\big\}$$

в случае $X\notin\mathfrak{X}_3$, где $\mathcal{H}^k_{a_X}$ — пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$, L — оператор Лапласа–Бельтрами на X. Обозначим через $\mathrm{O}(a_X)$ ортогональную группу в $\mathbb{R}^{a_X}$. После отождествления $\mathcal{H}^{k,m}_X$ с пространством сужений его элементов на сферу

$$\mathbb{S}^{a_X-1}=\{x\in\mathbb{R}^{a_X}:|x|=1\},$$

$\mathcal{H}^{k,m}_X$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}(\tau)$ группы $K=G\cap\mathrm{O}(a_X)$ на $L^2\left(\mathbb{S}^{a_X-1}\right)$. Если $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ — сужение $\mathfrak{T}(\tau)$ на $\mathcal{H}^{k,m}_X$, то $\mathfrak{T}(\tau)$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\big\{0,\dots,M_X(k)\big\}$ (см. [8, часть 1, гл. 4]).

Произвольная точка $x\in\mathbb{R}^{a_X}\setminus\{0\}$ представима в виде

$$x=\varrho\sigma,\qquad \text{где}\quad \varrho=|x|,\ \sigma=x/|x|.$$

Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma), \tag{1.8}$$

где $d_X^{k,m}$ — размерность $\mathcal{H}_X^{k,m}$, $\{Y_j^{k,m}\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_X^{k,m}$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int\limits_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma)\overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} d\omega(\sigma).$$

Далее будем считать, что

$$Y_1^{0,0} = \frac{1}{\sqrt{b_X}}.$$

Если $f \in \mathcal{E}(B_R)$, то ряд (1.8) сходится к f в пространстве $\mathcal{E}(B_R)$ (см. [18, § 2]).

Пусть $\{t_{i,j}^{k,m}(\tau)\}$, $i, j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$, — матрица представления $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ в базисе $\{Y_j^{k,m}\}$, $d\tau$ — мера Хаара на K общей массы 1. Разложение (1.8) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ следующим образом:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f^{k,m,j}, \tag{1.9}$$

где ряд (1.9) сходится к f в $\mathcal{D}'(B_R)$ и распределение $f^{k,m,j}$ действует на пространстве основных функций $\mathcal{D}(B_R)$ по правилу

$$\begin{aligned} \langle f^{k,m,j}, \psi \rangle &= \left\langle f, d_X^{k,m} \int\limits_K \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^{k,m}(\tau)\, d\tau \right\rangle \\ &= \langle f, \overline{\left(\overline{\psi}\right)_{k,m,j}(\varrho)}\, \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для всякого множества $\mathfrak{W}(B_R) \subset \mathcal{D}'(B_R)$ положим

$$\mathfrak{W}_{k,m,j}(B_R) = \left\{ f \in \mathfrak{W}(B_R) : f = f^{k,m,j} \right\},$$

$$\mathfrak{W}_\natural(B_R) = \mathfrak{W}_{0,0,1}(B_R) \tag{1.11}$$

Отметим, что аналогом класса (1.11) в одномерном случае является совокупность $\mathfrak{W}_\natural(-R,R)$ всех чётных распределений из заданного множества $\mathfrak{W}(-R,R)$ в $D'(-R,R)$. Нетрудно видеть, что носитель распределения $f\in\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ является K-инвариантным. Если $f\in\mathcal{E}'_{k,m,j}(B_R)$, определим

$$r(f)=\inf\{r>0:\operatorname{supp}f\subset\overline{B_r}\}.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{N}_X(k)=\begin{cases}(k+1)/2, & X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\\ k, & X\neq\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},\end{cases}$$

$$\nu_X(\lambda)=\begin{cases}(\rho_X+i\lambda)/2, & X\in\mathfrak{X}_1\\ (\rho_X+\lambda)/2, & X\in\mathfrak{X}_2,\end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

$$\alpha(k)=\alpha_X+k,\quad \beta(k,m)=\beta_X+2\mathcal{N}_X(k+1)-k-2m-2.$$

Определяя $\mathcal{X}$ равенством $\mathcal{X}=\{x\in X:d(0,x)<\operatorname{diam}X\}$, введем функции $\Phi^{k,m,j}_\lambda$ на $\mathcal{X}\backslash\{0\}$ по формуле

$$\Phi^{k,m,j}_\lambda(x)=\sqrt{b_X}\,\Phi^{k,m}_\lambda(\varrho)Y^{k,m}_j(\sigma),\tag{1.12}$$

где

$$\Phi^{k,m}_\lambda(\varrho)=\varrho^k(1+\varepsilon_X\varrho^2)^{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)}R^{(\alpha(k),\,\beta(k,m))}_{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)-\nu_X(-\lambda)}\left(\frac{1-\varepsilon_X\varrho^2}{1+\varepsilon_X\varrho^2}\right).\tag{1.13}$$

Нетрудно видеть, что $\Phi^{k,m,j}_\lambda$ допускают непрерывное продолжение в точку $x=0$. Доопределенные по непрерывности в нуле, функции $\Phi^{k,m,j}_\lambda$ становятся вещественно аналитическими на $\mathcal{X}$ и

$$(L+\lambda^2-\varepsilon_X\rho_X^2)\Phi^{k,m,j}_\lambda=0\tag{1.14}$$

(см. [19, доказательство формулы (41)]).

Для $f\in\mathcal{E}'_{k,m,j}(\mathcal{X})$ положим

$$\mathcal{F}^{k,m}_j(f)(\lambda)=\left\langle f,\overline{\Phi^{k,m,j}_{\overline{\lambda}}}\right\rangle,\quad \lambda\in\mathbb{C}.\tag{1.15}$$

Функция $\mathcal{F}^{k,m}_j(f)$ является четной целой функцией переменной λ. Если $f\in\mathcal{E}'_\natural(\mathcal{X})$, то будем писать $\widetilde{f}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}^{0,0}_1(f)(\lambda)$, т.е.

$$\widetilde{f}(\lambda)=\left\langle f,\Phi^{0,0,1}_\lambda\right\rangle.\tag{1.16}$$

Для гиперболических пространств X преобразование $\widetilde{f}$ совпадает со сферическим преобразованием распределения f [2, гл. 4]. Если X — компактно, то $\widetilde{f}$ является аналитическим продолжением дискретного преобразования Фурье–Якоби (см. [17, § 5]).

Пусть

$$\mathfrak{S}_X(k,m) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_1 \\ \alpha(k) + \beta(k,m) + 1 + 2\mathbb{Z}_+, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_2 \end{cases},$$
$$\mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_X(0,0).$$

Из теоремы Хана–Банаха следует (см. (1.15), (1.10) и [17, предложение 5.6 и замечание 5.2]), что $\mathcal{L}in\,\{\Phi_\lambda^{k,m,j},\ \lambda \in \mathfrak{S}_X(k,m)\}$ является плотным множеством в пространстве $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ с топологией, индуцируемой $\mathcal{E}(B_R)$. Равенство

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(\Phi_\lambda^{k,m,j})(t) = \cos(\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

корректно определяет оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j} : \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R) \to \mathcal{D}'_\natural(-R,R)$ со следующими свойствами:

1) отображение $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ является гомеоморфизмом между $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ и $\mathcal{D}'_\natural(-R,R)$, а также между $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ и $\mathcal{E}_\natural(-R,R)$;

2) если $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, $r \in (0,R]$, то $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,m,j}(f) = 0$ на $(-r,r)$;

3) для любого $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R)$ на интервале $(r(T)-R, R-r(T))$ имеет место обобщенное трансмутационное свойство

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(f \times T) = \mathfrak{A}_{k,m,j}(f) * \Lambda(T), \quad f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R),$$

где распределение $\Lambda(T) \in \mathcal{E}'_\natural(-R,R)$ задано соотношением

$$\widehat{\Lambda(T)}(\lambda) = \widetilde{T}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Явный вид оператора $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ и обратного к нему оператора $\mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1}$ имеется в [17, п. 5.2], [18, § 2].

Полагая

$$\mathcal{A}_j^{k,m} = \mathfrak{A}_{0,0,1}^{-1}\mathfrak{A}_{k,m,j},$$

получаем отображение из $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_\natural(B_R)$ со свойствами:

1) имеет место равенство

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(\Phi_\lambda^{k,m,j}) = \Phi_\lambda^{0,0,1};$$

2) если $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R)$, $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, то

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f \times T) = \mathcal{A}_j^{k,m}(f) \times T \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}. \tag{1.17}$$

Обратное отображение $(\mathcal{A}_j^{k,m})^{-1}$ будет обозначаться $\mathcal{B}_j^{k,m}$. Операторы $\mathcal{A}_j^{k,m}$ играют важную роль при изучении проблем (i)–(iii) из § 1 и их обобщений.

2. Формулировка основного результата

Пусть $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i=1}^s$ — заданное семейство распределений с компактным носителем в X. При фиксированном $g \in G$ рассмотрим распределение gT_i, действующее на $C^\infty(X)$ по правилу

$$\langle gT_i, f\rangle = \langle T_i, f \circ g^{-1}\rangle, \quad f \in C^\infty(X).$$

Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ такого, что каждое из множеств

$$\Lambda(\mathcal{U}, T_i) = \{g \in G\colon \operatorname{supp} gT_i \subset \mathcal{U}\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ отображает $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_1)) \times \dots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_s))$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}(f) = (f_1, \dots, f_s),$$

где

$$f_i(g) = \langle gT_i, f\rangle, \quad g \in \Lambda(\mathcal{U}, T_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

В частности, если χ_r — индикатор шара B_r, а σ_r — поверхностная дельта-функция сферы S_r, то преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_r,\sigma_r\},B_R}$ сопоставляет функции $f \in C^\infty(B_R)$ ее интегралы по шарам и сферам радиуса r из B_R.

Для $t_1, t_2 > 0$ таких, что $t_1 + t_2 < \operatorname{diam} X$ введём функцию Ξ_{t_1,t_2} по формуле

$$\Xi_{t_1,t_2}(a, \psi) = \Omega\left(d(\Omega(t_1)\eta, \Omega(t_2)\mathbf{e})\right), \quad (a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}), \tag{2.1}$$

где множество $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2})$ и точка $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{a_X}) \in \mathbb{S}^{a_X-1}$ определяются для каждого X следующим образом:

1) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(a, \psi) : a \in [0, 1],\ \psi \in [0, \pi]\}$,

$$\eta_1 = \varepsilon_X a \cos\psi, \quad \eta_2 = \sqrt{1 - a^2}, \quad \eta_{a_X/2+1} = \varepsilon_X a \sin\psi;$$

2) если $X \in \mathfrak{X}_3$ и $X \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(1,\psi) : \psi \in [0,\pi]\}$, $\eta_1 = \varepsilon_X \cos\psi$, $\eta_2 = \sin\psi$;

3) если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(a,0) : a \in [-1,1]\}$, $\eta_1 = a$, $\eta_2 = \sqrt{1-a^2}$.

Определим операторы $D(\alpha,\beta)$ и $\mathfrak{D}(\alpha,\beta)$ равенствами

$$(D(\alpha,\beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^{\beta+1}}{\varrho^\alpha}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho^\alpha}{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^\beta}\varphi(\varrho)\right), \tag{2.2}$$

$$(\mathfrak{D}(\alpha,\beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^{\beta}}{\varrho^\alpha}\int\limits_0^\varrho \frac{\xi^\alpha}{(1+\varepsilon_X\xi^2)^{\beta+1}}\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{2.3}$$

Для краткости обозначим

$$\zeta_{p,q} = \frac{\Gamma(\beta_X+p+1)}{(\alpha_X+p+q)\Gamma(\alpha_X+p)},$$

$$\mathbf{D}_{p,q,1} = \frac{\zeta_{p-1,q}}{\zeta_{p+1,q}}\,\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1,\rho_X+p)D(1-p-q,1-p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,2} = \frac{2\zeta_{p,q}}{\zeta_{p+1,q}}\,\frac{p+q+\alpha_X-\varepsilon_X\Omega^2(r)(\beta_X+p-q)}{\Omega(r)} \times \mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1,\rho_X+p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,3} = \frac{(\alpha_X+p-1)(\alpha_X+p+q+1)}{(\alpha_X+p+q-1)(\beta_X+p)} \times \mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1,\alpha_X+q+1)D(1-p-q,1-p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,4} = \frac{2(\alpha_X+p+q+1)}{\Omega(r)}\,\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1,\alpha_X+p+1),$$

$$\mathbf{D}_{p,1} = \mathfrak{D}(n+p-1,(n+p-1)/2)D(1-p,(1-p)/2),$$

$$\mathbf{D}_{p,2} = \frac{n+2p-2}{\Omega(r)}\,\mathfrak{D}(n+p-1,(n+p-1)/2).$$

Известно (см. [8, часть 4]), что преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_r,\sigma_r\},B_R}$ инъективно лишь при условии $R \geqslant 2r$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in \mathcal{E}(B_R)$, $R \geqslant 2r$. Тогда*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} \mathcal{B}_j^{k,m} h,$$

где ряд сходится к f в пространстве $\mathcal{E}(B_R)$ и радиальная функция h однозначно восстанавливается по известному $\mathcal{P}_{\{\chi_r,\sigma_r\},B_R}(f)$ с помощью разложения

$$h\bigl(\Xi_{t,r}(a,\psi)\,\mathbf{e}\bigr) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} d_{p,q}(h,t,r)\,\xi_{p,q}^{\alpha_X,\beta_X}(a,\psi),$$
$$t \in (0, R-r),\ (a,\psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{r,t}) \quad (2.4)$$

в котором

$$d_{0,0}(h,t,r) = \frac{\mathcal{A}_j^{k,m}\bigl((f \times \sigma_r)^{k,m,j}\bigr)\bigl(\Omega(t)\mathbf{e}\bigr)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X+1)}, \quad (2.5)$$

$$d_{1,0}(h,t,r) = -\varepsilon_X \frac{(\alpha_X+1)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X+2)} D(0,0)$$
$$\times \Bigl(\mathcal{A}_j^{k,m}\bigl((f \times \chi_r)^{k,m,j}\bigr)(\varrho\mathbf{e})\Bigr)\bigl(\Omega(t)\bigr) \quad (2.6)$$

и для каждого пространства X справедливы следующие рекуррентные соотношения:

(i) *если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то при $p-1 \geqslant q \geqslant 0$*

$$d_{p+1,q}(h,\Omega^{-1}(t),r) = \mathbf{D}_{p,q,1}\bigl(d_{p-1,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r)\bigr)(t)$$
$$+\,\varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,2}\bigl(d_{p,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r)\bigr)(t), \quad (2.7)$$

$$d_{p,q+1}(h,\Omega^{-1}(t),r) = \mathbf{D}_{p,q,3}\bigl(d_{p-1,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r)\bigr)(t)$$
$$+\,\varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,4}\bigl(d_{p,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r)\bigr)(t); \quad (2.8)$$

(ii) *если $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ или $X = \mathbb{S}^n$, то имеет место соотношение* (2.7) *при $q = 0$;*

(iii) *если* $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, *то*

$$d_{p+1}(h, \Omega^{-1}(t), r) = \mathbf{D}_{p,1}\big(d_{p-1}(h, \Omega^{-1}(\varrho), r)\big)(t) + \mathbf{D}_{p,2}\big(d_p(h, \Omega^{-1}(\varrho), r)\big)(t), \quad p \geqslant 1, \quad (2.9)$$

где

$$d_p(h,t,r) = \frac{\Gamma(1/2 + [(p+1)/2])}{(\alpha_X + p)\Gamma(\alpha_X + [(p+1)/2])}\, d_{[(p+1)/2],[p/2]}(h,t,r), \quad p \in \mathbb{Z}_+; \quad (2.10)$$

Сделаем несколько замечаний. Аналог теоремы 2.1 имеет место и в евклидовом случае, который исключен здесь лишь для удобства изложения. Явный вид операторов $\mathcal{B}_j^{k,m} = \mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1}\mathfrak{A}_{0,0,1}$ содержится в [17, п. 5.2], [18, § 2]. Если $X \in \mathfrak{X}_3$ и $X \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то двойная сумма в (2.4) вырождается и сводится к ряду по парам вида $(p, 0)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, h определяется коэффициентами $d_{p,0}(h,t,r)$, которые находятся из (2.5), (2.6) и соотношения (2.7) при $q = 0$. Аналогично, если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то суммирование в (2.4) происходит по парам (p,p) и $(p+1,p)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым равенства (2.9) и (2.10) восстанавливают h по известным сверткам $f \times \chi_r$ и $f \times \sigma_r$, которые являются шаровыми и сферическими средними функции f соответственно. Наконец, ввиду вышесказанного, леммы 1.1 и [16, гл. 7, теорема 7.6], сходимость в (2.4) является абсолютной и равномерной на $\mathcal{M}(\Xi_{r,t})$.

3. Вспомогательные утверждения

Пусть $t_1, t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 < \operatorname{diam} X$. Для $(a,\psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2})$ положим

$$\Theta(t_1,t_2,a,\psi) = \frac{\sqrt{|\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 + ae^{i\psi} \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2|^2 - 1}}{|\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 + ae^{i\psi} \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2|},$$

если $X \in \mathfrak{X}_1$, и

$$\Theta(t_1,t_2,a,\psi) = \frac{\sqrt{1 - |\cos t_1 \cos t_2 + ae^{i\psi} \sin t_1 \sin t_2|^2}}{|\cos t_1 \cos t_2 + ae^{i\psi} \sin t_1 \sin t_2|},$$

если $X \in \mathfrak{X}_2$. В следующем утверждении содержатся явные выражения для функции Ξ_{t_1,t_2}.

Лемма 3.1. *Имеет место равенство*

$$\Xi_{t_1,t_2}(a,\psi) = \Theta(t_1,t_2,a,\psi), \quad (a,\psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}). \quad (3.1)$$

Доказательство. Нам потребуется явный вид некоторых изометрий пространства X.

Пусть $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$) или $X=\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$). Положим

$$\sigma_w(z)=\big(1+\varepsilon_X\langle z,w\rangle_{\mathbb{K}}\big)^{-1}\bigg(-\sqrt{1+\varepsilon_X|w|^2}\,z + \bigg(1+\frac{\varepsilon_X\langle z,w\rangle_{\mathbb{K}}}{1+\sqrt{1+\varepsilon_X|w|^2}}\bigg)w\bigg), \quad (3.2)$$

где $\langle z,w\rangle_{\mathbb{K}}$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{K}^n$. Если $X=\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ или $X=\mathbb{S}^n$, определим

$$\sigma_w(z)=\frac{\big(1+2\varepsilon_X\langle z,w\rangle_{\mathbb{R}}-\varepsilon_X|z|^2\big)w-\big(1+\varepsilon_X|w|\big)^2z}{1+|w|^2|z|^2+2\varepsilon_X\langle z,w\rangle_{\mathbb{R}}}. \quad (3.3)$$

Наконец, в случае $X=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$ или $X=\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$ обозначим

$$\sigma_{(|w|,0)}(z_1,z_2) = \varepsilon_X\left(\big(|w|-z_1\big)\big(|w|z_1+\varepsilon_X\big)^{-1}, -\sqrt{1+\varepsilon_X|w|^2}\,\big(|w|\overline{z}_1+\varepsilon_X\big)^{-1}z_2\right). \quad (3.4)$$

Отображения (3.2)–(3.4) являются инволютивными изометриями соответствующего пространства X и $\sigma_v(v)=0$ (см. [19], [8, часть 1, гл. 2, 3]). Поэтому для $x=\Omega(t_1)\eta$, $y=\Omega(t_2)\mathbf{e}$ имеем (см. (2.1), (1.5), (1.7))

$$\Xi_{t_1,t_2}(a,\psi)=\Omega\big(d(x,y)\big)=\Omega\big(\,d(\sigma_y(x),0)\,\big)=|\sigma_y(x)|. \quad (3.5)$$

Из (3.2)–(3.5) получаем (3.1). □

Замечание 3.1. Простые вычисления показывают, что для $X=\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ и $X=\mathbb{S}^n$ равенство (3.1) можно переписать соответственно в виде

$$\Xi_{t_1,t_2}(1,\psi)=\left(\frac{\operatorname{ch}2t_1\operatorname{ch}2t_2+\operatorname{sh}2t_1\operatorname{sh}2t_2\cos\psi-1}{\operatorname{ch}2t_1\operatorname{ch}2t_2+\operatorname{sh}2t_1\operatorname{sh}2t_2\cos\psi+1}\right)^{1/2},$$

$$\Xi_{t_1,t_2}(1,\psi)=\left(\frac{1-\cos2t_1\cos2t_2-\sin2t_1\sin2t_2\cos\psi}{1+\cos2t_1\cos2t_2+\sin2t_1\sin2t_2\cos\psi}\right)^{1/2}.$$

Далее нам потребуются формулы дифференцирования функций $\Phi^{k,m}_\lambda$. Положим

$$c_1(k,m,\lambda) = \frac{2\varepsilon_X(\nu_X(\lambda)+\mathcal{N}_X(k+1)-m-1)(\nu_X(-\lambda)+\mathcal{N}_X(k+1)-m-1)}{k+\alpha_X+1},$$

$$c_2(k,m,\lambda)=\frac{2\varepsilon_X(\nu_X(\lambda)+m-\beta_X)(\nu_X(-\lambda)+m-\beta_X)}{k+\alpha_X+1},$$
$$c_3(k,m)=2(k+\alpha_X).$$

Лемма 3.2. *Пусть* $k\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\{0,\dots,M_X(k)\}$.

(i) *Имеет место равенство*

$$D(-k,m+1-\mathcal{N}_X(k+1))\Phi_\lambda^{k,m}=c_1(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m}. \tag{3.6}$$

(ii) *Если* $m\leqslant M_X(k+1)-1$, *то*

$$D(-k,\beta_X-m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_2(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m+1}. \tag{3.7}$$

(iii) *Если* $k\geqslant 1$ *и* $m\leqslant M_X(k-1)$, *то*

$$D(k+2\alpha_X,\mathcal{N}_X(k)+\rho_X-1-m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m}. \tag{3.8}$$

(iv) *Если* $m\geqslant 1$, *то*

$$D(k+2\alpha_X,\alpha_X+m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m-1}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Применяя формулы дифференцирования гипергеометрической функции [14, п. 2.8, формулы (20), (22), (24), (27)] и учитывая, что

$$F(\alpha,\beta;\gamma;t)=(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;t),$$

получаем (3.6)–(3.9) прямым вычислением. □

Следствие 3.1. (i) *Если* $k\geqslant 1$ *и* $m\leqslant M_X(k-1)$, *то*

$$\begin{aligned}c_1(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m}(\varrho)-c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m}(\varrho)\\=\frac{2\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)}{\varrho}\big(-k-\alpha_X+\varepsilon_X\varrho^2(\beta_X+\mathcal{N}_X(k)\\+\mathcal{N}_X(k+1)-k-2m-1)\big).\end{aligned} \tag{3.10}$$

(ii) *Если* $m\leqslant M_X(k+1)-1$, *то*

$$\begin{aligned}c_2(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m+1}(\varrho)-c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m}(\varrho)\\=\frac{2\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)}{\varrho}\big(-k-\alpha_X+\varepsilon_X\varrho^2(\mathcal{N}_X(k)-k)\big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Доказательство. Определение (2.2) влечет равенство

$$\big(D(\alpha,\beta)-D(\gamma,\delta)\big)\varphi(\varrho)=\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}\big(\alpha-\gamma+\varepsilon_X\varrho^2(\alpha-2\beta-\gamma+2\delta)\big). \quad (3.12)$$

Из (3.12), (3.6) и (3.8) получаем (3.10). Соотношение (3.11) доказывается аналогично (см. (3.7) и (3.8)). ☐

Следствие 3.2. *Имеют место равенства*

$$\widetilde{\chi_r}(\lambda)=\frac{A_X(r)}{2(\alpha_X+1)}\Phi_\lambda^{1,0}\big(\Omega(r)\big), \quad \widetilde{\sigma_r}(\lambda)=A_X(r)\Phi_\lambda^{0,0}\big(\Omega(r)\big). \quad (3.13)$$

Доказательство. Формула для $\widetilde{\sigma_r}$ непосредственно вытекает из (1.16). Далее (см. (3.8)),

$$D(1+2\alpha_X,\rho_X)\Phi_\lambda^{1,0}=c_3(1,0)\Phi_\lambda^{0,0}. \quad (3.14)$$

Используя (3.14), (1.16) и (1.6), получаем требуемое соотношение для $\widetilde{\chi_r}$. ☐

Обозначим

$$A_{p,q}(\lambda)=\frac{(\rho_X-\nu_X(-\lambda))_p(\beta_X-q+1-\nu_X(-\lambda))_q}{(\alpha_X+p)_q(\alpha_X+1)_{p+q}\Gamma(\beta_X+p+1)} \times(1-p-\nu_X(-\lambda))_p(\alpha_X+1-\nu_X(-\lambda))_q, \quad (3.15)$$

$$B_{p,q}(\lambda)=\eta_{p,q}^{\alpha_X,\beta_X}A_{p,q}(\lambda),$$

$$B_p(\lambda)=\begin{cases}\frac{\pi(\alpha_X+p)\Gamma(2\alpha_X+p)}{2^{2\alpha_X-1}p!}A_{p,0}(\lambda), & X=\mathbb{S}^n,\ \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}\\ \frac{\pi\Gamma(2\alpha_X+p)\Gamma(1/2+[(p+1)/2])}{2^{2\alpha_X-1}p!\,\Gamma(\alpha_X+[(p+1)/2])}A_{[(p+1)/2],[p/2]}(\lambda), & X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\end{cases}$$

$$N(p,q)=\mathcal{N}_X(p+q+1)-1-p, \quad \mathbf{\Phi}_\lambda^{p,q}(t_1,t_2)=\Phi_\lambda^{p,q}\big(\Omega(t_1)\big)\Phi_\lambda^{p,q}\big(\Omega(t_2)\big),$$

$$\Upsilon_{t_1,t_2}(\psi)=\begin{cases}\Xi_{t_1,t_2}(1,\psi), & X=\mathbb{S}^n,\ \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}\\ \Xi_{t_1,t_2}(\cos\psi,0), & X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}.\end{cases}$$

Лемма 3.3. *Пусть* $\lambda\in\mathfrak{S}_X$, $(a,\psi)\in\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2})$. *Тогда*

$$\Phi_\lambda^{0,0}\big(\Xi_{t_1,t_2}(a,\psi)\big)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}A_{p,q}(\lambda)\mathbf{\Phi}_\lambda^{p+q,N(p,q)}(t_1,t_2)\,\xi_{p,q}^{\alpha_X,\beta_X}(a,\psi). \quad (3.16)$$

Доказательство. Используя (1.13), замечание 3.1 и теоремы сложения для функций Якоби и Лежандра (см., например, [21, гл. 3, § 1, формулы (13), (14), (19), (20)]), получаем (3.16). □

Следствие 3.3. *Пусть* $\lambda \in \mathfrak{S}_X$. *Тогда*

$$\int_0^\pi \int_0^1 \Phi_\lambda^{0,0}\big(\Xi_{t_1,t_2}(a,\psi)\big)\xi_{p,q}^{\alpha_X,\beta_X}(a,\psi)\,dm_{\alpha_X,\beta_X}(a,\psi)$$

$$= B_{p,q}(\lambda)\mathbf{\Phi}_\lambda^{p+q,q}(t_1,t_2), \quad \textit{если } X \notin \mathfrak{X}_3,$$

и

$$\int_0^\pi \Phi_\lambda^{0,0}\big(\Upsilon_{t_1,t_2}(\psi)\big)\mathcal{C}_p^\alpha(\psi)\,dm_{\alpha_X}(\psi) = B_p(\lambda)\mathbf{\Phi}_\lambda^{p,0}(t_1,t_2), \quad \textit{если } X \in \mathfrak{X}_3.$$

Доказательство. Достаточно применить лемму 3.3 и соотношения ортогональности (1.2), (1.4). При этом, когда $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, нужно учесть равенство

$$\Phi_\lambda^{p,\,([p/2]-[(p+1)/2])/2}(\varrho) = \Phi_\lambda^{p,0}(\varrho),$$

которое следует из [14, п. 2.9, формула (2)]. □

Следующий результат является обобщением классической теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца.

Лемма 3.4. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathcal{X})$, $R \in (r(T), \operatorname{diam} X]$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ *и*

$$Lf = (\varepsilon_X \rho_X^2 - \lambda^2)f \tag{3.17}$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$f \times T = \widetilde{T}(\lambda)f \tag{3.18}$$

в шаре $B_{R-r(T)}$.

Доказательство. Поскольку L — эллиптический оператор, $f \in \mathrm{RA}(B_R)$ (см. [22, гл. 8.6]). Зафиксируем $g \in G$ такое, что $g\,\overline{B_{r(T)}} \subset B_R$. Для $x \in B_{r(T)+\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0 : g\,\overline{B_{r(T)}} \subset B_{R-\varepsilon}\}$, положим

$$f_g(x) = \int_K f(g\tau x)\,d\tau.$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g \in \mathrm{RA}_\natural(B_{r(T)+\varepsilon_0}) \quad \text{и} \quad f_g(0) = f(g0). \tag{3.19}$$

Кроме того, в силу (3.17)

$$(Lf_g)(x) = (\varepsilon_X \rho_X^2 - \lambda^2) f_g(x), \quad x \in B_{r(T)+\varepsilon_0}. \tag{3.20}$$

Действие оператора L на радиальную функцию $u(x) = u_0(\varrho)$ задается формулой

$$(Lu)(x) = \left(1 + \varepsilon_X \varrho^2\right)^2 u_0''(\varrho) + \frac{1 + \varepsilon_X \varrho^2}{\varrho} \left(2\alpha_X + 1 + \varepsilon_X (1 - 2\beta_X) \varrho^2\right) u_0'(\varrho) \tag{3.21}$$

(см., например, [2, гл. 2, § 5, предложение 5.26]). Из (3.19)–(3.21), (1.12) и дифференциального уравнения для гипергеометрической функции [14, п. 2.1, формула (1)] находим $f_g(x) = f(g0)\Phi_\lambda^{0,0,1}(x)$. Теперь имеем

$$\widetilde{T}(\lambda) f(g0) = \langle T, f_g \rangle = \left\langle T, \int_K f(g\tau x) d\tau \right\rangle = \big\langle T, f(gx) \big\rangle = (f \times T)(g0),$$

что доказывает (3.18). □

Лемма 3.5. *Пусть f — радиальная функция из $\mathcal{E}(B_R)$, $r \in (0, R)$, $t \in (0, R - r)$.*

(i) *Если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то*

$$\left(f \times \sigma_r\right)\left(\Omega(t)\mathbf{e}\right) = \frac{2\Gamma(\alpha_X + 1) A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_X - \beta_X)\Gamma(1/2 + \beta_X)} \times \int_0^\pi \int_0^1 f\left(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}\right) dm_{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi),$$

$$D(0,0)(f \times \chi_r)(\varrho\mathbf{e})\big(\Omega(t)\big) = -\varepsilon_X \frac{2\Gamma(\alpha_X + 1) A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_X - \beta_X)\Gamma(1/2 + \beta_X)} \times \int_0^\pi \int_0^1 f\left(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}\right) a \cos\psi \, dm_{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi).$$

(ii) *Если $X \in \mathfrak{X}_3$, то*

$$\left(f \times \sigma_r\right)\left(\Omega(t)\mathbf{e}\right) = \frac{\Gamma(\alpha_X + 1) A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 + \alpha_X)} \int_0^\pi f\left(\Upsilon_{t,r}(\psi)\mathbf{e}\right) dm_{\alpha_X}(\psi),$$

$$D(0,0)(f\times\chi_r)(\varrho\mathbf{e})\big(\Omega(t)\big)$$
$$=-\epsilon_X\frac{\Gamma(\alpha_X+1)A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\alpha_X)}\int\limits_0^\pi f\big(\Upsilon_{t,r}(\psi)\mathbf{e}\big)\cos\psi\,dm_{\alpha_X}(\psi).$$

Доказательство. Для $f=\Phi_\lambda^{0,0}$, $\lambda\in\mathfrak{S}_X$, утверждения (i), (ii) вытекают из (1.14), (3.18), (3.13), (3.6) и следствия 3.3. В силу произвольности $\lambda\in\mathfrak{S}_X$, отсюда получаем требуемые равенства в общем случае. □

4. Доказательство теоремы 2.1

Для любой функции $h\in\mathcal{E}_\natural(B_R)$, $r\in(0,R)$, $t\in(0,R-r)$ определим коэффициенты $d_{p,q}(h,t,r)$ с помощью разложения (2.4) (см. лемму 1.1 и [16, гл. 7, теорема 7.6]). Докажем, что имеют место равенства

$$d_{0,0}(h,t,r)=\frac{(h\times\sigma_r)\big(\Omega(t)\mathbf{e}\big)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X+1)},$$

$$d_{1,0}(h,t,r)=-\varepsilon_X\frac{(\alpha_X+1)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X+2)}D(0,0)\big((h\times\chi_r)(\varrho\mathbf{e})\big)\big(\Omega(t)\big),$$

а также рекуррентные соотношения из утверждений (i)–(iii) теоремы 2.1.

Формулы для коэффициентов $d_{0,0}(h,t,r)$ и $d_{1,0}(h,t,r)$ следуют из (1.2), (1.4) и леммы 3.5. Докажем (2.7) и (2.8). Пусть $\lambda\in\mathfrak{S}_X$. По лемме 3.3

$$d_{p,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)=A_{p,q}(\lambda)\Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho)\Phi_\lambda^{p+q,q}\big(\Omega(r)\big),\tag{4.1}$$

где $\varphi_\lambda(x)=\Phi_\lambda^{0,0}(|x|)$. Применяя к (4.1) дифференциальные операторы из (3.6), (3.8) и (3.9), имеем

$$D(1-p-q,1-p)d_{p-1,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)$$
$$=c_1(p+q-1,q,\lambda)A_{p-1,q}(\lambda)\Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho)\Phi_\lambda^{p+q-1,q}\big(\Omega(r)\big),\tag{4.2}$$

$$D(2\alpha_X+p+q+1,\rho_X+p)d_{p+1,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)$$
$$=c_3(p+q+1,q)A_{p+1,q}(\lambda)\Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho)\Phi_\lambda^{p+q+1,q}\big(\Omega(r)\big),\tag{4.3}$$

$$D(2\alpha_X+p+q+1,\alpha_X+q+1)d_{p,q+1}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)$$
$$=c_3(p+q+1,q+1)A_{p,q+1}(\lambda)\Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho)\Phi_\lambda^{p+q+1,q+1}\big(\Omega(r)\big).\tag{4.4}$$

Далее, формулы (3.10) и (3.11) при $k = p + q$, $m = q$ дают

$$c_1(p+q,q,\lambda)\Phi_\lambda^{p+q+1,q}\big(\Omega(r)\big) - c_3(p+q,q)\Phi_\lambda^{p+q-1,q}\big(\Omega(r)\big)$$
$$= -\frac{2\Phi_\lambda^{p+q,q}\big(\Omega(r)\big)}{\Omega(r)}\big(p+q+\alpha_X - \varepsilon_X\Omega^2(r)(\beta_X+p-q)\big), \quad (4.5)$$

$$c_2(p+q,q,\lambda)\Phi_\lambda^{p+q+1,q+1}\big(\Omega(r)\big) - c_3(p+q,q)\Phi_\lambda^{p+q-1,q}\big(\Omega(r)\big)$$
$$= -\frac{2\Phi_\lambda^{p+q,q}\big(\Omega(r)\big)}{\Omega(r)}(p+q+\alpha_X). \quad (4.6)$$

Из соотношений (4.5), (4.2), (4.3), (4.1) и (3.15) находим

$$2\varepsilon_X\zeta_{p,q}\,d_{p,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)\frac{\big(-p-q-\alpha_X+\varepsilon_X\Omega^2(r)(\beta_X+p-q)\big)}{\Omega(r)}$$
$$= \zeta_{p-1,q}D(1-p-q,1-p)\,d_{p-1,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)$$
$$-\zeta_{p+1,q}D(2\alpha_X+p+q+1,\rho_X+p)\,d_{p+1,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r). \quad (4.7)$$

Аналогично, из (4.6), (4.2), (4.4), (4.1) и (3.15) делаем вывод, что

$$\frac{2\varepsilon_X(\alpha_X+p+q+1)\,d_{p,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)}{\Omega(r)}$$
$$= D(2\alpha_X+p+q+1,\alpha_X+q+1)\,d_{p,q+1}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r)$$
$$-\frac{(\alpha_X+p-1)(\alpha_X+p+q+1)}{(\alpha_X+p+q-1)(\beta_X+p)}\,D(1-p-q,1-p)\,d_{p-1,q}(\varphi_\lambda,\Omega^{-1}(\varrho),r). \quad (4.8)$$

Ввиду произвольности $\lambda \in \mathfrak{S}_X$ равенства (4.7), (4.8) сохраняют силу для любой функции $h \in \mathcal{E}_\natural(B_R)$. Отсюда, учитывая (2.2) и (2.3), получаем (2.7) и (2.8). Рекуррентные соотношения из утверждений (ii), (iii) теоремы 2.1 доказываются тем же способом с использованием лемм 3.2, 3.3 и следствия 3.1. Теперь теорема 2.1 следует из (1.8) и (1.17).

Благодарности. Авторы благодарят профессора С. Хелгасона за экземпляр монографии.

Литература

[1] С. Хелгасон, *Преобразование Радона*, Мир, М., 1983.

[2] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987.

[3] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces, Second edition*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[4] К. А. Беренстейн, Д. Струппа, *Комплексный анализ и уравнения в свёртках* // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, ВИНИТИ, М., **54** (1989), 5–111.

[5] L. Zalcman, *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al), Kluwer, Dordrecht, (1992), 185–194.

[6] L. Zalcman, *Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"* // Contemp. Math. / Radon Transform and Tomography, **278** (2001), 69–74.

[7] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[8] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer–Verlag, London, 2009.

[9] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger, *Inversion of the local Pompeiu transform* // J. Analyse Math., **54** (1990), 259–287.

[10] M. El Harchaoui, *Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules)* // J. Analyse Math., **67** (1995), 1–37.

[11] M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay, *Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique – Cas des deux boules* // J. Complex Variables, **43** (2000), 29–57.

[12] Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова, *Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве* // Докл. РАН, **379** (2001), No. 5, 587–590.

[13] Вит. В. Волчков, *О функциях с заданными шаровыми средними на симметрических пространствах* // Укр. матем. вісник, **7** (2010), No. 4, 453–466.

[14] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* I, II, Наука, М., 1973.

[15] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups* // Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications (R. A. Askey et al. (eds.)), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1984), 1–85.

[16] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.

[17] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, *Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф. Йона* // Алгебра и анализ, **21** (2009), No. 5, 37–69.

[18] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, *Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга* // Матем. сб., **199:8** (2008), 29–60.

[19] Вит. В. Волчков, *О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах* // Матем. сб., **198:4** (2007), 21–46.

[20] В. В. Волчков, *Решение проблемы носителя для некоторых классов функций* // Матем. сб., **188:9** (1997), 13–30.

[21] Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, *Представления групп Ли и специальные функции* // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, ВИНИТИ, М., **59** (1990), 145–264.

[22] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* I, Мир, М., 1986.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Волчков, Виталий Владимирович Волчков

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: valeriyvolchkov@gmail.com