УДК 517.43

Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследование бесконечномерных дифференциальных операторов во многом стимулируется задачами приложений в математической физике и теории случайных процессов. Такие операторы естественным образом возникают в конструктивной теории поля, квантовой статистической физике, теории твердого тела, при построении диффузионных процессов с бесконечномерным фазовым пространством, описании систем популяционной генетики. Естественно стремление развить аппарат анализа (во всем его многообразии) на случай максимально общих пространств аргументов. В любом случае существенно сказывается влияние такой глубоко развитой теории, какой является теория дифференциальных операторов с частными производными. Это влияние часто оказывается настолько определяющим, что сами рассматриваемые задачи возникают в результате перенесения их с конечномерного случая. Не отрицая в целом законности такой точки зрения, в данной статье остановимся на некоторых типичных аспектах теории бесконечномерных дифференциальных операторов, показывающих ее недостаточность в ряде задач приложений, в частности на примерах модельных систем квантовой статистической физики мы опишем ряд специфических черт этой теории, которые не вытекают из конечномерной аналогии либо вообще ей противоречат.

1. Проблема построения операторной реализации. В статистической физике решеточных систем бесконечномерные дифференциальные операторы появляются в результате квантования соответствующих классических объектов. Общая схема здесь такова: с каждым узлом $k \in \mathbb{Z}^d$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ считается связанной классическая частица, ей отвечают значения координаты q_k и импульса p_k. Для простоты обозначений будем предполагать, что она обладает одной внутренней степенью свободы, поэтому, $q_k, p_k \in \mathbb{R}^1$. Механическая система, состоящая из бесконечного числа таких частиц, в гамильтоновом формализме описывается функцией Гамильтона

$$H(p, b) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} p_k^2 + V(q) \; (p = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \quad q = (q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}), \tag{1}$$

где вид потенциальной энергии $V(q)$ определяется характером взаимодействия между частицами системы. Например, в предположении парного характера взаимодействия, при котором потенциальная энергия взаимодействия частиц в узлах $k, j \in \mathbb{Z}^d$ описывается функцией $V_{kj}(q_k, q_j)$,

$$V(q) = \sum_{k, j \in \mathbb{Z}^d} V_{kj}(q_k, q_j). \tag{2}$$

Разумеется, такое описание имеет лишь феноменологическое значение, поскольку $H(p, q)$ определена на слишком «малом» множестве в фазовом пространстве. Процедура квантования предполагает переход в (1) от классического импульса p_k к оператору $-i\partial/\partial x_k$ и от q_k к оператору умножения на x_k, $k \in \mathbb{Z}^d$. Таким образом, мы приходим к формальному гамильтониану системы

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial^2/\partial x_k^2 + \sum_{k, j \in \mathbb{Z}^d} V_{kj}(x_k, x_j). \tag{3}$$

Для описания временной эволюции необходимо прежде всего построить реализацию H как самосопряженного оператора в некотором гильбертовом пространстве — физическом гильбертовом пространстве системы. Подобная проблема встречается и в конечномерной теории дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами, но сейчас она сопряжена с дополнительными трудностями, имеющими чисто бесконечномерное происхождение. Во-первых, во всех интересных случаях потенциал в (3) не имеет смысла измеримой функции — это осложнение возникает неизбежно как только накладывается естественное требование трансляционной инвариантности системы относительно сдвигов решетки. Во-вторых, на бесконечномерном пространстве отсутствует аналог меры Лебега, так что не ясно, в каком именно гильбертовом пространстве следует вводить операторную реализацию формального гамильтониана (3). Приведем, следуя [1, гл. 7, § 2], общую схему построения динамики системы, описываемой формальным гамильтонианом H, при этом наши рассмотрения будут относиться к случаю системы при нулевой температуре, т. е. в основном состоянии.

Для конечного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ определим гамильтониан H_Λ системы в области Λ как оператор

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} \partial^2/\partial x_k^2 + \sum_{k, j \in \Lambda} V_{kj}(x_k, x_j), \tag{4}$$

действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^\Lambda, dx_\Lambda)$ $(\mathbb{R}^\Lambda = \underset{k \in \Lambda}{\times} \mathbb{R}^1 \ni x_\Lambda = (x_k)_{k \in \Lambda})$. При известных предположениях относительно потенциалов V_{kj} оператор H_Λ определен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^\Lambda)$, в существенном самосопряжен и полуограничен снизу, причем $E_\Lambda = \inf \operatorname{sp}(H_\Lambda)$ — простое собственное значение и соответствующая ему собственная функция $\Phi_\Lambda > 0$ почти везде на $\mathbb{R}^\Lambda$. Введем вероятностную меру $d\mu_\Lambda(x_\Lambda) = \Phi_\Lambda^2(x_\Lambda)\,dx_\Lambda$ на $\mathbb{R}^\Lambda$, построенную по вакуумному вектору Φ_Λ (в этой связи мера μ_Λ называется вакуумной). При унитарном переходе от $L_2(\mathbb{R}^\Lambda, dx_\Lambda)$ к $L_2(\mathbb{R}^\Lambda, d\mu_\Lambda(x_\Lambda))$, даваемом оператором умножения на Φ_Λ^{-1}, оператор $H_\Lambda - E_\Lambda$ переходит в оператор $H_{\Lambda,\mathrm{ren}} = \Phi_\Lambda^{-1}(H_\Lambda - E_\Lambda)\Phi_\Lambda$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^\Lambda, \mu_\Lambda)$. Как просто непосредственно убедиться, перенормированному локальному гамильтониану $H_{\Lambda,\mathrm{ren}}$ отвечает билинейная форма

$$(H_{\Lambda,\mathrm{ren}}u, v)_{L_2(\mu_\Lambda)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^\Lambda} (\nabla u, \overline{\nabla v})_{\mathbb{R}^\Lambda} d\mu_\Lambda \quad (u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\Lambda)). \tag{5}$$

Пусть на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ борелевских подмножеств тихоновского произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} = \underset{k\in\mathbb{Z}^d}{\times}\mathbb{R}^1$ определена вероятностная мера μ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^\Lambda} f d\mu_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\to\mathbb{Z}^d]{} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} f d\mu$$

для каждой ограниченной цилиндрической гладкой функции $f \in C_{b,\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) = \bigcup_\Lambda C_b^\infty(\mathbb{R}^\Lambda)$. Из (5) вытекает, что в этом случае имеет место сходимость билинейных форм

$$(H_{\Lambda,\mathrm{ren}}u, v)_{L_2(\mu_\Lambda)} \xrightarrow[\Lambda\to\mathbb{Z}^d]{} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \langle \nabla u, \overline{\nabla v}\rangle\, d\mu \quad (u, v \in C_{b,\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})), \tag{6}$$

$\langle \nabla u, \overline{\nabla v}\rangle = (\nabla u, \overline{\nabla v})_{l_2(\mathbb{Z}^d)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_k}$. Предельная форма в (6) называется формой Дирихле (или энергетической формой) меры μ. Если эта форма замыкаема, то с ней ассоциирован самосопряженный оператор $H_{\mathrm{ren}} \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$ — перенормированный гамильтониан бесконечной квантовой системы, описываемой формальным гамильтонианом H. Простейшим условием замыкаемости формы Дирихле меры μ является ее квазиинвариантность относительно сдвигов на вектора $e_k = (\delta_{kj})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ и наличие логарифмических производных по направлениям e_k:

$$\beta_k(\cdot) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\mu(\cdot + te_k)}{d\mu(\cdot)}\right]\Bigg|_{t=0} \in L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu).$$

Тогда определен оператор Дирихле меры μ в $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$:

$$H_\mu u = -\frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\langle \beta(\cdot), \nabla u\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\beta_k\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$(u, v \in C_{b,\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}), \quad \beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d})$$

и $H_{\mathrm{ren}} \upharpoonright C_{b,\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) = H_\mu$.

Принципиальным моментом описанной схемы операторной реализации служит то обстоятельство, что каждый формальный гамильтониан порождает свое пространство состояний. Как правило (во всяком случае при наличии симметрий в системе), предельные вакуумные меры μ, отвечающие разным формальным гамильтонианам, взаимно ортогональны, так что нельзя обойтись одним универсальным гильбертовым пространством состояний — в этом состоит важнейшее отличие от обычной квантовой механики систем с конечным числом частиц. Разумеется, практическое осуществление процедуры построения перенормированного гамильтониана требует преодоления весьма существенных трудностей, связанных прежде всего с исследованием сходимости вакуумных мер μ_Λ при $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$. Наиболее удобна в этом отношении формулировка схемы операторной реализации в терминах функциональных интегралов, подробное изложение которой содержится в [1, гл. 7, § 1]. Такой подход позволяет свести вопрос о сходимости вакуумных мер и замыкаемости предельной формы Дирихле (6) к построению некоторой гиббсовской меры на пространстве траекторий со значениями в $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ и изучению ее свойств. На указанном пути удается построить динамику в ряде моделей квантовой статистической физики [2], но более подробно на этих приложениях мы здесь не останавливаемся.

2. Гармонические системы. Формальный гамильтониан гармонической системы имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \partial^2/\partial x_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} d_{kj}x_k x_j, \tag{7}$$

где $D = (d_{kj})_{k,j\in\mathbb{Z}^d}$ — матрица линейного оператора $D: l_2(\mathbb{Z}^d) \to l_2(\mathbb{Z}^d)$, $D > 0$ в естественном базисе пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Для гамильтониана (7) процедура операторной реализации приводит к следующему явному ответу [2].

Теорема 1. Пусть $\forall k \in \mathbb{Z}^d e_k \in \mathfrak{D}(D^{-1/4})$. Предельной вакуумной мерой для (7) служит гауссовская мера γ_S на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ с корреляционным оператором $S = D^{-1/2}$, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} e^{i(\varphi,x)} d\gamma_S(x) = e^{-1/4(S\varphi,\varphi)},$$

где $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d}$ ($\mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d}$ — подпространство финитных последовательностей из $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$). Перенормированный гамильтониан H_{γ_S} определен дифференциальным выражением

$$(H_{\gamma_S}u)(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} + \sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} r_{kj}x_k \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \quad (u \in C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}), \tag{8}$$

$(r_{kj})_{k,j\in\mathbb{Z}^d} = R = D^{1/2}$ как в существенном самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$.

Отметим, что заменой переменных $y = R^{1/2}x$ можно перейти от пространства $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ к $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_1)$ и получить там гамильтониан $H_{\gamma_1,R}$, порожденный формой

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \langle \nabla u, R\overline{\nabla v}\rangle \, d\gamma_1 \quad (u, v \in C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})). \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что оператор $H_{\gamma_1,R}$ унитарно эквивалентен вторично квантованному оператору $d\Gamma(R)$ в пространстве Фока $\mathcal{F}(l_2(\mathbb{Z}^d))$ (см. [1, гл. 2, § 2; гл. 6, § 1]). Переход от H_{γ_S} к $d\Gamma(R)$ соответствует квазичастичному описанию гармонической системы. При этом оператор R в $l_2(\mathbb{Z}^d)$ играет роль оператора энергии одной квазичастицы (фонона в физической терминологии), а $l_2(\mathbb{Z}^d)$ — ее пространства состояний.

В случае конечного числа переменных оператор H_{γ_S} всегда имеет дискретный спектр, как оператор энергии конечного числа связанных гармонических осцилляторов, но в бесконечномерном случае H_{γ_S} может иметь и непрерывный спектр. Например, при наличии трансляционной инвариантности системы относительно сдвигов по решетке, т. е. в случае $d_{kj} = d(k-$

$-j$), где $d(\cdot):\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}^1$ — четная функция, оператор D унитарно эквивалентен оператору умножения на неотрицательную функцию

$$\tilde{d}(p)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} d(k)\,e^{ikp}\,(p\in[-\pi,\pi)^d,\quad kp=(k,p)_{\mathbb{R}^d})$$

в $L_2([-\pi,\pi)^d)$, которая при известном убывании $d(k)$, $|k|\to\infty$ является непрерывной на $[-\pi,\pi)^d$. Спектр оператора D поэтому оказывается абсолютно непрерывным и выполняется равенство $\operatorname{sp} D=\operatorname{sp}_{ac} D=[m^2,M^2]$, где $m^2=\min\tilde{d}(\cdot)$, $M^2=\max\tilde{d}(\cdot)$. Из квазичастичного описания следует, что тогда

$$\operatorname{sp} H_{\gamma S}=\{0\}\,U\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}[nm,nM]\Big),\quad \operatorname{sp}_{ac} H_{\gamma S}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[nm,nM],$$

причем при $M\geqslant 2m$ $\operatorname{sp}_{ac} H_{\gamma S}=[m,+\infty)$. Возникновение непрерывного спектра в гармонической системе является чисто бесконечномерным эффектом и в разобранном случае связано с наличием симметрии в системе.

3. Самосопряженность перенормированных гамильтонианов. Как отмечено в п. 1, в нашем подходе к построению операторной реализации формальных гамильтонианов перенормированные гамильтонианы порождаются формами Дирихле вероятностных мер на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ вида

$$d_\mu(u,v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}\langle\nabla u,\overline{\nabla v}\rangle\,d\mu\quad (u,v\in C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})). \tag{10}$$

При условии существования логарифмической производной $\beta=(\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ меры μ форме (10) отвечает оператор Дирихле $H_\mu=-\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{2}\langle\beta,\nabla\cdot\rangle$, $\mathfrak{D}(H_\mu)=C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, $H_\mu\geqslant 0$, так что в качестве самосопряженного генератора динамики можно использовать фридриховское расширение H^F_μ оператора H_μ.

Вопрос единственности динамики, т. е. существенной самосопряженности H_μ, оказывается значительно более сложным. Достаточно полный ответ на него получается в случае продакт-мер — здесь используется общая теория операторов с бесконечным числом разделенных переменных [3]. Для гауссовских мер операторы Дирихле просто сводятся к гармоническим гамильтонианам, рассмотренным в п. 2. Следующая теорема устанавливает условия существенной самосопряженности оператора Дирихле H_μ в терминах логарифмической производной меры μ.

Теорема 2. Пусть существует такой вес $p=(p_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ $(p_k>0,\ k\in\mathbb{Z}^d)$, что гильбертово пространство $l_2(p)=\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\mid\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}p_kx_k^2<\infty\}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ имеет полную μ-меру, логарифмическая производная меры $\mu\beta(\cdot)=(\beta_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}^d}\in C^2\in(l_2(p),\ l_2(p))$ и локально ограничена на $l_2(p)$. Тогда H_μ в существенном самосопряжен на $C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$.

Доказательство этой теоремы содержится в [1, гл. 6, § 3]. Требование гладкости логарифмической производной может быть снижено до включения $\beta\in C^1(l_2(p),\ l_2(p))$ с помощью гиперболического критерия самосопряженности [3, гл. 2, § 6]. Для этого нужно предварительно установить факт конечности скорости распространения возмущений для гиперболического уравнения, связанного с оператором Дирихле H_μ. Такой подход к исследованию самосопряженности операторов Дирихле реализован в [4].

4. Потенциальные возмущения гармонических систем. Рассмотрим гармоническую систему с формальным гамильтонианом (7). Дополнительно к условиям п. 2 будем предполагать строгую положительность оператора D: $\inf\operatorname{sp} D=m^2>0$. Это условие назовем условием равномерной эллиптичности гамильтониана H_{γ_S}, отвечающего (7) по теореме 1. Такое название объясняется тем, что, согласно (9), оператор H_{γ_s} унитарно эквивалентен оператору $H_{\gamma_1,R}$ в $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_1)$ и при этом

$$(H_{\gamma_1,R}u)(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} r_{kj}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} r_{kj}x_k\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \quad (11)$$

так что оператор $R = D^{1/2}$ играет роль матрицы коэффициентов в дифференциальном выражении (11). При условно равномерной эллиптичности оператора H_{γ_S} нуль является изолированным собственным значением (ему отвечает собственная функция $\Phi_0(x) \equiv 1$) и на промежутке $(0, m)$ нет точек спектра оператора H_{γ_S} — это вытекает из унитарной эквивалентности H_{γ_S} и $d\Gamma(R)$ (см. п. 2).

Пусть $V = \bar{V}$ — измеримая функция на $R^{\mathbb{Z}^d}$. Опишем спектральные свойства возмущения H_{γ_S} потенциалом V. Изучение таких операторов с точки зрения приложений в моделях квантовой статистической физики интересно по нескольким причинам. С одной стороны, с помощью потенциальных возмущений можно описывать гармонические системы с локализованными неоднородностями, примесями и т. д., с другой — рассмотрение трансляционно инвариантных ангармонических возмущений, задаваемых на формальном уровне потенциалами типа (2), требует их аппроксимации более регулярными с последующим проведением предельного перехода в том или ином смысле. Прежде всего приведем условия на потенциал, обеспечивающие существенную самосопряженность $H_{\gamma_S} + V$. Близкие теоремы получены в [5 — 7] для случаев различных бесконечномерных пространств аргументов и гауссовских мер на них.

Теорема 3. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : V \in L_{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$, $\forall p \geqslant 1$, $e^{-V} \in L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$. Тогда $H_{\gamma_S} + V$ в существенном самосопряжен на $C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$.

Оператор H_{γ_S} обладает важным свойством: порожденная им полугруппа $\exp(-tH_{\gamma_S})$, гиперсжимающая (см., например, [8, гл. 10, § 9]), т. е. является сжатием из $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ в $L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ с некоторым $p = p(t) > 2$. Аналогичное свойство имеет место и для оператора $H_{\gamma_S} + V$, что позволяет установить следующую теорему (см. [7]).

Теорема 4. В предположениях теоремы 3 выполнено:

1. Оператор $H_{\gamma_S} + V$ полуограничен снизу, причем $E_V = \inf \operatorname{sp}(H_{\gamma_S} + V)$ — простое собственное значение.

2. Собственная функция Φ_V, отвечающая E_V, может быть выбрана строго положительной γ_S почти везде, причем $\forall p \geqslant 1$ $\Phi_V \in L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$.

3. Для E_V справедливо представление

$$-E_V = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(1, e^{-t(H_{\gamma_S}+V)} 1\right)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)}.$$

Таким образом, добавление потенциала приводит к двум существенным эффектам: изменению вакуумного вектора (вакуум $\Phi_0(x) \equiv 1$ для H_{γ_S} переходит в $\Phi_V(x)$ для $H_{\gamma_S} + V$, в физической литературе говорят о поляризации вакуума) и сдвигу нижней границы спектра на величину E_V. Произведем перенормировку оператора $H_{\gamma_S} + V$, аналогичную п. 1, которая восстанавливает эти изменения. Для этого введем вакуумную меру $\mu_V = \Phi_V^2\gamma_S$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ и перейдем от оператора $H_V = H_{\gamma_S} + V$ в $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ к оператору $H_{V,\mathrm{ren}} = \Phi_V^{-1}(H_{\gamma_S} + V - E_V)\Phi_V$ в новом пространстве состояний $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu_V)$. Прямым подсчетом легко проверить равенство

$$(H_{V,\mathrm{ren}}\, u, v)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu_V)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \langle \nabla u, \overline{\nabla v} \rangle \, d\mu_V \quad (u, v \in C^\infty_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})), \quad (12)$$

которое показывает, что после перенормировки информация о возмущении переходит в вакуумную меру — по ней восстанавливается билинейная форма перенормированного гамильтониана на плотном множестве. Эта форма есть форма Дирихле вакуумной меры и, более того, можно показать, что $H_{V,\mathrm{ren}} \upharpoonright C^{\infty}_{b,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) = H_{\mu_V}$. После перенормировки снова $\inf \operatorname{sp} H_{V,\mathrm{ren}} = 0$ и $H_{V,\mathrm{ren}} 1 = 0$.

Полезно отметить, что имеет место обратное соответствие: вероятностной мере $\mu = \Phi^2 \gamma_S$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ с достаточно гладкой плотностью $\Phi > 0$ отвечает потенциал V_Φ такой, что Φ — вакуумный вектор оператора $H_{\gamma_S} + V_\Phi$.

В следующем пункте мы остановимся на применении описанной процедуры перенормировки в задаче рассеяния, а сейчас укажем только на ее применения к построению динамики бесконечночастичных систем с сингулярным потенциалом взаимодействия. Это применение основано на равенстве (12) для последовательности регулярных потенциалов $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, аппроксимирующих данный сингулярный потенциал V, и исследовании сходимости вакуумных мер μ_{V_n}, $n \in N$. Подобный прием применим не только в случае квантовых решеточных систем, но и при построении двухмерных моделей конструктивной теории поля (см. [1, гл. 7, § 2] и литературные указания к этой книге).

5. Задача рассеяния для потенциальных возмущений гармонических систем. Будем рассматривать гармонические системы с условиями равномерной эллиптичности и трансляционной инвариантности: $d_{kj} = d\,(k - j)$ $(k, j \in \mathbb{Z}^d)$. В п. 2 отмечалось, что в этом случае спектр оператора H_{γ_S} абсолютно непрерывен (за исключением изолированного собственного значения). Один из способов изучения спектральных характеристик оператора $H_{\gamma_S} + V$, по аналогии с конечномерным случаем, можно надеяться получить с помощью построения волновых операторов нестационарной теории рассеяния. Эти операторы определяются соотношениями

$$W^{\pm}(H_{\gamma_S} + V, H_{\gamma_S}) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it(H_{\gamma_S} + V)} e^{itH_{\gamma_S}}, \tag{13}$$

точнее, нужно рассматривать сильные пределы на векторах $u \in L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$, $u \perp 1$. Но здесь нас ожидает существенное осложнение: можно убедиться, что для любого потенциала $V \in L_{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)\ (\varepsilon > 0)$, не равного нулю тождественно, пределы в (13) не существуют.

Разумеется, с точки зрения привычной квантовомеханической ситуации такой эффект является неожиданным. Его объяснение аппеляцией к конечномерному случаю невозможно, для конечного числа переменных оператор H_{γ_S} имеет чисто дискретный спектр и вообще нельзя говорить о построении волновых операторов. Подлинная причина несуществования волновых операторов (13) состоит в явлении поляризации вакуума, необходимо присутствующем при нетривиальном потенциальном возмущении оператора.

Вот здесь-то и полезна введенная в п. 4 процедура перенормировки: вместо сравнения исходной и возмущенной динамик будем сравнивать с невозмущенной перенормированную динамику. Для строгой постановки задачи рассеяния введем множество тригонометрических многочленов

$$\mathcal{T} = \text{л. о.}\{e^{i\langle\varphi, x\rangle} \mid \varphi \in l_2(\mathbb{Z}^d),\ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\},$$

плотное в каждом из гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ и $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu_V)$ $(\mu_V = \Phi_V^2 \gamma_S)$ (некоторая тонкость состоит в определении $\langle \varphi, x \rangle$ как линейного измеримого функционала относительно $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ при $\varphi \in l_2(\mathbb{Z}^d)$). Как можно непосредственно убедиться,

$$e^{itH_{\gamma_S}}(e^{i\langle\varphi, \cdot\rangle}) = e^{i\langle e^{itR}\varphi, \cdot\rangle},$$

поэтому $e^{itH_{\gamma_S}}\mathcal{T}\subset\mathcal{T}$ и при всех $t\in\mathbb{R}^1$ имеем отображения

$$L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)\supset\mathcal{T}\ni u\mapsto e^{-itH_{V,\mathrm{ren}}}e^{itH_{\gamma_S}}u\in L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu_V). \qquad (14)$$

Определим волновые операторы $W^{\pm}(H_{V,\mathrm{ren}},H_{\gamma_S})$ на области $\mathcal{T}$ как пределы при $t\to\pm\infty$ отображений (14) (в предположении их существования). Фактически имеем ситуацию задачи рассеяния в паре пространств с оператором отождествления $I:L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)\supset\mathcal{T}\in u\mapsto Iu=u\ni\mathcal{T}\subset L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu_V)$, который может быть неограниченным, следовательно, могут быть неограниченными и волновые операторы.

Заметим, что можно было бы ограничиться одним гильбертовым пространством состояний $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$, если ввести волновые операторы для пары $H_{\gamma_S}+V-E_V$ и H_{γ_S} с нетривиальным оператором отождествления $I_{\Phi_V}:L_2\times\times(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)\ni u\mapsto I_{\Phi_V}u=\Phi_V u\in L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$, т. е. положить

$$W^{\pm}(H_{\gamma_S}+V-E_V,H_{\gamma_S},I_{\Phi_V})=\lim_{t\to\pm\infty}e^{-it(H_{\gamma_S}+V-E_V)}\Phi_V e^{itH_{\gamma_S}}. \qquad (15)$$

Существование этих волновых операторов на области $\mathcal{T}$ эквивалентно существованию определенных ранее. Так как Φ_V, вообще говоря, неограниченная функция, волновые операторы (15) также могут оказаться неограниченными. Чтобы получить ограниченные волновые операторы, можно воспользоваться оператором отождествления $I'_{\Phi_V}=I_{\Phi_V}e^{-H_{\gamma_S}}$ — из включения $\Phi_V\in\bigcap_{p\geqslant1}L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$ (см. теорему 4) и гиперсжимаемости $e^{-tH_{\gamma_S}}$, $t>0$ следует ограниченность I'_{Φ_V} в $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$.

Следующая теорема дает условия существования $W^{\pm}(H_{V,\mathrm{ren}},H_{\gamma_S})$. Ее доказательство сводится к проверке аналога известного критерия Кука существования волновых операторов [1, гл. 7, § 4].

Теорема 5. Пусть $V=\bar{V}\in L_{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)(\varepsilon>0)$, $e^{-V}\in\bigcap_{p\geqslant1}L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$ и $\exists\ \alpha>d/2+1$, $\exists\delta>0:\forall\ k\in\mathbb{Z}^d$

$$\|\partial/\partial x_k V\|_{L_{2+\delta}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)}\leqslant C(1+|k|)^{-\alpha}. \qquad (16)$$

Тогда существуют волновые операторы $W^{\pm}(H_{\gamma_S}+V-E_V,H_{\gamma_S})$.

В качестве следствия теоремы 5 можно получить включение $\mathrm{sp}_{\mathrm{ac}}(H\gamma_S++V-E_V)\supset\mathrm{sp}_{\mathrm{ac}}(H_{\gamma_S})$, а для специальных типов потенциалов доказать и их совпадение (например, $V(x)=\Sigma\ V_k(x_k)$, где сумма конечна, а $V_k\in L_{2+\varepsilon}\times\times(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\gamma_S)$, $\varepsilon>0$, и являются четными монотонно возрастающими на $[0,-\infty)$ функциями).

Условие (16) на V можно интерпретировать как квазилокальность взаимодействия, описываемого потенциалом V,— оно означает слабую зависимость V от переменных, отвечающих далеким узлам $k\in\mathbb{Z}^d$. Квадратичные потенциалы $V(x)=\sum_{k,j}a_{kj}x_kx_j$, приводящие к явно решаемым моделям, показывают, что условие (16) не может быть ослаблено. Случай сингулярных потенциалов является отдельным сложным вопросом. Точнее, речь идет о ситуации, когда V задано в виде формального возмущения типа (2) и строится операторная реализация суммы $H_{\gamma_S}+V$ в схеме перенормировки п. 4 как оператора Дирихле соответствующей вакуумной меры. Известные в этом направлении результаты позволяют ожидать, что сингулярность V приведет к перенормировке динамической матрицы D, т. е. $(H_{\gamma_S}+ + V)_{\text{ren}}$ нужно сравнивать с гармоническим гамильтонианом $H_{\gamma_{S'}}$, где $S' = = (D')^{-1/2}$ строится по новой динамической матрице $D' \neq D$. То, что это не всегда так, показывает пример линейного потенциала $V_\lambda(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k x_k$. Здесь при любом выборе $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ можно явно построить операторную реализацию $H_{\gamma_S} + V_\lambda$ и $(H_{\gamma_S} + V_\lambda)_{\text{ren}}$ унитарно эквивалентен H_{γ_S} [1, гл. 7, § 4].

6. **Вырождение эллиптичности**. Сама возможность отсутствия равномерной эллиптичности у операторов с постоянными коэффициентами является чисто бесконечномерным эффектом, невозможным в случае конечного числа переменных. Рассмотрим возникающие здесь особенности на примере гармонической системы с формальным гамильтонианом (7). Напомним, что динамическая матрица $D > 0$ должна удовлетворять условию перенормируемости формального гамильтониана $R_0^{\mathbb{Z}^d} \subset D\ (D^{-1/4})$, которое не исключает возможности $0 \in \operatorname{sp} D$, т. е. неограниченности оператора D^{-1}. Мы уже поясняли в п. 4, что в таком случае оператор энергии гармонической системы H_{γ_S} не будет равномерно эллиптическим — последнее обстоятельство внешне не отражено в виде его билинейной формы

$$(H_{\gamma_S} u, v)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} < \nabla u, \overline{\nabla v} > d\gamma_S \quad (u, v \in C^\infty_{b,\text{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})).$$

Но если заменой переменных перейти, как и в (9), от γ_S к гауссовской мере γ_1 с единичным корреляционным оператором, относительно которой переменные x_k, $k \in Z_d$ равноправны и которая уже не зависит от вида взаимодействия между осцилляторами, то оператор H_{γ_S} перейдет в оператор $H_{\gamma_1,R}$ с билинейной формой

$$(H_{\gamma_1,R} u, v)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_1)} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} < R\nabla u, \overline{\nabla v} > d\gamma_1 \quad (R = D^{1/2})$$

и вырождение эллиптичности проявляется явно. Важным примером гармонической системы с вырождением эллиптичности служит модель с непрерывной симметрией, описываемая формальным гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \partial^2/\partial x_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} \varphi(k-j)(x_k - x_j)^2. \tag{17}$$

Здесь $\varphi(\cdot) : \mathbb{Z}^d| \to [0, \infty)$ считается достаточно быстро убывающей при $|k| \to \infty$. Легко видеть, что условие перенормируемости выполнено при $d \geqslant 2$. В частном случае $\varphi(k) = 1$, $|k| = 1$, $\varphi(k) = 0$, $|k| \neq 1$, гамильтониан (17) отвечает решеточной аппроксимации свободного бозонного поля нулевой массы.

При отсутствии равномерной эллиптичности гармонический гамильтониан теряет щель в спектре и, что равносильно, гиперсжимаемость порожденной им полугруппы $e^{-tH_{\gamma_S}}$, $t > 0$. Как следствие возникает проблема с самосопряженностью возмущенного оператора $H_{\gamma_S} + V$. Для полуограниченных снизу V с помощью аналога неравенства Като можно установить существенную самосопряженность $H_{\gamma_S} + V$ при тех же условиях, что и в теореме 3 [9]. Но учет отрицательной части потенциала требует специального анализа [5, 6, 10]. Это усложнение во многом объясняется принципиальным отсутствием логарифмических неравенств Соболева для оператора H_{γ_S} при вырождении эллиптичности — эти неравенства позволяют эффективно контролировать влияние отрицательной части потенциала.

Другое следствие нарушения равномерной эллиптичности — неустойчивость (в смысле спектральных характеристик) системы по отношению даже к «хорошим» потенциальным возмущениям. Простейшее ее проявление —

возникновение нелокализованных вакуумных состояний. Поясним сказанное на примере квадратичного потенциала $V_A(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\,(x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, где $A \geqslant 0$ — ограниченный линейный оператор в $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Известное равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \langle Ax, x\rangle d\gamma_S(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AS) \tag{18}$$

показывает эквивалентность включений $V_A \in L_1(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$ и $AS \in \mathfrak{S}_1(l_2)$ ($\mathfrak{S}_1(l_2)$ — идеал ядерных операторов, а так как V_A — полином, то и включения $V_A \in L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S) \forall p \geqslant 1$ (см. [1, гл.2, § 2]). Таким образом, $V_A \geqslant 0$; $\forall p \geqslant 1$, $V_A \in L_p(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_S)$, коль скоро $AS \in \mathfrak{S}_1(l_2)$. С другой стороны, если вернуться к виду формального гамильтониана (7), порождающего H_{γ_S}, то, очевидно, $(H_{\gamma_S} + V_A)_{\text{ren}} = H_{\gamma_{S'}}$, где $S' = (D + A)^{-1/2}$. Тогда основное состояние Φ_{V_A} для $H_{\gamma_S} + V_A$ должно иметь представление

$$\Phi^2_{V_A}(x) = \frac{d\gamma_{S'}(x)}{d\gamma_S(x)} = C_A e^{-(((D+A)^{1/2} - D^{1/2})x, x)} \tag{19}$$

Вид производной Радона — Никодима в (19) хорошо известен, на формальном уровне он получается из представления

$$d\gamma_S(x) = \frac{1}{N} e^{-(D^{1/2}x, x)}\, dx$$

(N^{-1} — нормирующий множитель), имеющего строгий смысл лишь в конечномерном случае [1, гл. 2, § 2]. То же равенство (18) показывает, что при $(1 + AD^{-1})^{1/2} - 1 \in \mathfrak{S}_1(l_2)$ плотность Φ_{V_A} действительно корректно определена, в противном случае меры $\gamma_{S'}$ и γ_S ортогональны. Но из условия $AD^{-1/2} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$, обеспечивающего несингулярность V_A, в общем случае вовсе не следует включение $(1 + AD^{-1})^{1/2} - 1 \in \mathfrak{S}_1(l_2)$, эквивалентное существованию вакуумного вектора Φ_{V_A}. Действительно, пусть $d = 1$, возьмем $D = ((1 + |k|)^{-\delta}\delta_{kj})_{k,j \in \mathbb{Z}^1}$, $A = ((1 + |k|)^{-\alpha}\delta_{kj})_{k,j \in \mathbb{Z}^1}$ $(\alpha, \delta > 0)$. Тогда включение $AD^{-1/2} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$ означает

$$\sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}^1} \frac{1}{|k|^{\alpha - \delta/2}} < \infty \Leftrightarrow \alpha - \delta/2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > \delta/2 + 1,$$

а $(1 + AD^{-1})^{1/2} - 1 \in \mathfrak{S}_1(l_2)$ равносильно

$$\sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}^1} \left[\left(1 + \frac{1}{|k|^{\alpha - \delta}}\right)^{1/2} - 1\right] < \infty \Leftrightarrow \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}^1} \frac{1}{|k|^{\alpha - \delta}} < \infty \Leftrightarrow \alpha > \delta + 1.$$

Достаточно взять $\alpha = 2$, $\delta = 1$, чтобы убедиться в требуемом.

С другой стороны, при $D \geqslant m^2 1$, $m^2 > 0$ (т. е. в случае равномерной эллиптичности) условия несингулярности V_A и существования ΦV_A, как легко понять, эквивалентны. Наличие нелокализованных основных состояний приводит к трудностям с перенормировкой оператора $H_{\gamma_S} + V$ — такая перенормировка необходима, как мы видели, при исследовании спектральных свойств $H_{\gamma_S} + V$ методами теории рассеяния и, что еще более существенно, для построения операторной реализации формальных гамильтонианов в моделях с сингулярными взаимодействиями (в частности, в трансляционно-инвариантном случае). В настоящее время известно несколько технических приемов, позволяющих обходить эту трудность в конкретных модельных ситуациях, но сколь-нибудь общие подходы к изучению спектральных свойств дифференциальных операторов с вырождающейся эллиптичностью в бесконечномерном случае отсутствуют.

1. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев : Наук. думка, 1988.— 720 с.
2. *Кондратьев Ю. Г.* Конструкция динамики квантовых решеточных систем // Докл. АН СССР.— 1985.— **283**, № 1.— С. 82—85.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
4. *Кондратьев Ю. Г., Цикаленко Т. В.* Операторы Дирихле и связанные с ними дифференциальные уравнения.— Киев, 1986.— 56 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, № 86.37).
5. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных //Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 5.— С. 3—35.
6. *Березанский Ю. М.* О самосопряженности бесконечномерных эллиптических дифференциальных операторов с сингулярным потенциалом // Функц. анализ и его приложения.— 1982, **16**, № 4.— С. 55—56.
7. *Кондратьев Ю. Г.* Возмущения операторов вторичного квантования // Там же.— С. 76—77.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.— М. : Мир, 1978.— Т. 1.— 400 с.
9. *Кондратьев Ю. Г.* Неравенство Като для операторов вторичного квантования // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 6.— С. 753—756.
10. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность бесконечномерных эллиптических дифференциальных операторов // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1987.— **50**.— С. 3—48.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 28.09.87