П. В. Харламов

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В зависимости от выбора системы координат и основных переменных уравнения движения твердого тела могут иметь различную форму [1]. Для системы твердых тел число возможных форм уравнений движения возрастает хотя бы потому, что при составлении уравнений движения входящие в рассматриваемую систему тела могут быть различными способами объединены в группы. В настоящей статье рассмотрена система твердых тел достаточно общего вида, и для нее получены обозримые уравнения, которые в некоторых случаях удается проинтегрировать [2].

Динамические характеристики двух тел, связанных общей осью. Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор оси l, общей для тел S_0 и S'. Точка O тела S_0 принята за начало поступательно движущейся системы координат Σ. Приложенный в точке O вектор $\boldsymbol{\xi}$ указывает некоторую частицу тела S_0, имеющую массу dm. По отношению к Σ эта частица имеет скорость $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела S_0 в его движении относительно Σ). Вектор

$$\int\limits_{S_0} \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi})\, dm = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

— это момент относительно точки O количества движения S_0 в Σ_0 ($\mathbf{A}^0$ — тензор инерции S_0 в точке O). Приложенный в O вектор $\mathbf{h}$ указывает некоторую фиксированную точку O' оси l. В свою очередь O' служит точкой приложения вектора $\boldsymbol{\xi}'$, указывающего частицу тела S'. Скорость последней в Σ есть $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\xi}'$($\boldsymbol{\omega}'$ — угловая скорость S' в Σ). Момент относительно точки O количества движения S' в Σ таков:

$$\int\limits_{S'} (\mathbf{h} + \boldsymbol{\xi}') \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\xi}')\, dm =$$

$$= [(\mathbf{h} + \mathbf{c}') \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + \mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{c}')]\, m' + \mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\omega}'. \tag{2}$$

В этом равенстве m' — масса тела S', вектор $\mathbf{c}'$ проведен из O' в центр масс тела S', $\mathbf{A}'$ — тензор инерции S' в O'.

Сумма векторов (1) и (2) — момент относительно O количества движения в Σ системы двух тел S_0 и S':

$$\mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + [(\mathbf{h} + \mathbf{c}') \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + \mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{c}')]\, m' + \mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\omega}'. \tag{3}$$

Так как S_0 и S' имеют общую ось l, то

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \dot{\varkappa}\mathbf{e}, \tag{4}$$

$\varkappa$ — угол между проходящими через l двумя плоскостями, одна из которых фиксирована в S_0, другая — в S'. Точкой обозначена операция дифференцирования по времени t.

В системе координат, сопутствующей телу S_0, компоненты тензора $\mathbf{A}'$ и вектора $\mathbf{c}'$ в общем случае — функции угла $\varkappa$. Но если центр масс тела S' принадлежит оси l, и эта ось — главная центральная ось тела S', а моменты инерции относительно двух других главных центральных осей равны, то вектор (3) не зависит от $\varkappa$.

Совместим O' с центром масс тела S':

$$\mathbf{c}' = 0. \tag{5}$$

Пусть A' — момент инерции тела S' относительно оси l, а B' — момент инерции этого тела относительно других центральных осей, ортогональных l, тогда с учетом (4) имеем

$$\mathbf{A}'\cdot\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{e}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})B' + A'p'\mathbf{e}, \tag{6}$$

где

$$p' = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e} + \dot{\varkappa}. \tag{7}$$

При условиях (5), (6) выражение (3) принимает вид

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega} + A'p'\mathbf{e}. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})B' + \mathbf{h}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h})m'. \tag{9}$$

Введем теперь другую движущуюся поступательно систему координат Σ_* с началом в точке O_*. Пусть $\mathbf{v}_*$ — скорость точки O относительно Σ_*, а $\boldsymbol{\zeta}_*$ — вектор, проведенный из O_* в O. Момент относительно точки O_* количества движения тел S_0, S' в Σ_* таков:

$$\int\limits_{S_0}(\boldsymbol{\zeta}_* + \boldsymbol{\xi})\times(\mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})\,dm + \int\limits_{S'}(\boldsymbol{\zeta}_* + \mathbf{h} + \boldsymbol{\xi}')\times$$

$$\times(\mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h} + \boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\xi}')\,dm. \tag{10}$$

Обозначим через m массу тел S_0 и S', через $\mathbf{c}$ — вектор, проведенный из O в центр масс системы этих двух тел:

$$m\mathbf{c} = \int\limits_{S_0}\boldsymbol{\xi}\,dm + \int\limits_{S'}(\mathbf{h} + \boldsymbol{\xi}')\,dm. \tag{11}$$

Вследствие (5) вектор $\mathbf{c}$ неизменен в S_0.

Вычисляя интегралы (10), принимаем во внимание (1), (2), (4) — (9), (11):

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega} + A'p'\mathbf{e} + (\boldsymbol{\zeta}_* + \mathbf{c})\times\mathbf{v}_*m + \boldsymbol{\zeta}_*'\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{c})m. \tag{12}$$

В частности, если движение тел S_0, S' рассматривается относительно неподвижной системы координат, последнее выражение записывается так:

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega} + A'p'\mathbf{e} + (\boldsymbol{\zeta}_0 + \mathbf{c})\times\mathbf{v}_0m + \boldsymbol{\zeta}_0\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{c})m. \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{v}_0$ — абсолютная скорость точки O, $\boldsymbol{\xi}_0$ — вектор, проведенный в точку O из начала неподвижной системы координат.

Займемся вычислением кинетической энергии T тел S_0, S':

$$2T = \int\limits_{S_0}(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})^2\,dm + \int\limits_{S'}(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h} + \boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\xi}')^2\,dm.$$

Вследствие (5), (11)

$$2T = m\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{c})m + \int\limits_{S_0}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})^2dm +$$

$$+\int\limits_{S'}(\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\xi}')^2dm + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h})^2m'. \tag{14}$$

Но

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h})^2 = \boldsymbol{\omega}\cdot[\mathbf{h}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h})], \tag{15}$$

$$\int\limits_{S_0}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})^2dm = \boldsymbol{\omega}\cdot\int\limits_{S_0}\boldsymbol{\xi}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})\,dm = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{A}^0\cdot\boldsymbol{\omega},$$

и аналогично

$$\int\limits_{S'}(\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\xi}')^2dm = \boldsymbol{\omega}'\cdot\mathbf{A}'\cdot\boldsymbol{\omega}'.$$

В последнее равенство вносим значение (6):

$$\int\limits_{S'} (\omega' \times \xi')^2 dm = \omega' \cdot [\mathbf{e} \times (\omega \times \mathbf{e})] B' + A' p' \omega' \cdot \mathbf{e},$$

или, с учетом (4), (7),

$$\int\limits_{S'} (\omega' \times \xi')^2 dm = \omega \cdot [\mathbf{e} \times (\omega \times \mathbf{e})] B' + A' p'^2. \tag{16}$$

Подставив (15), (16) в (14), воспользуемся обозначением (9):

$$2T = m\mathrm{v}_0^2 + 2m\mathrm{v}_0 \cdot (\omega \times \mathbf{c}) + \omega \cdot \mathbf{A} \cdot \omega + A' p'^2. \tag{17}$$

Гиростат. В более общем случае S_0 может нести несколько тел S_i ($i = 1, 2, \ldots$). Если каждое из них удовлетворяет условиям (5), (6)

$$\mathbf{c}_i = 0, \ \mathbf{A}_i \cdot \omega_i = \mathbf{e}_i \times (\omega \times \mathbf{e}_i) B_i + A_i p_i \mathbf{e}_i, \tag{18}$$

$$p_i = \omega \cdot \mathbf{e}_i + \dot{\varkappa}_i, \tag{19}$$

момент относительно O количества движения в Σ системы тел S_0, S_1, $S_2, \ldots$ имеет вид

$$\mathbf{A} \cdot \omega + \sum_i A_i p_i \mathbf{e}_i, \tag{20}$$

но теперь

$$\mathbf{A} \cdot \omega = \mathbf{A}^0 \cdot \omega + \sum_i [\mathbf{e}_i \times (\omega \times \mathbf{e}_i) B_i + \mathbf{h}_i \times (\omega \times \mathbf{h}_i) m_i]. \tag{21}$$

Такую систему тел называют *гиростатом*.

Пусть $\mathfrak{э}_1$, $\mathfrak{э}_2$, $\mathfrak{э}_3$ — ортонормированный базис системы координат, сопутствующей телу S_0, с началом в точке O, тогда

$$\mathbf{h}_i = h_{i1}\mathfrak{э}_1 + h_{i2}\mathfrak{э}_2 + h_{i3}\mathfrak{э}_3, \ \mathbf{e}_i = e_{i1}\mathfrak{э}_1 + e_{i2}\mathfrak{э}_2 + e_{i3}\mathfrak{э}_3.$$

Компоненты тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^0$ в этом базисе обозначим A_{kl} и A^0_{kl}. Из (21) находим

$$A_{11} = A^0_{11} + \sum_i [(e_{i2}^2 + e_{i3}^2) B_i + (h_{i2}^2 + h_{i3}^2) m_i], \tag{22}$$

$$A_{23} = A^0_{23} - \sum_i (e_{i2} e_{i3} B_i + h_{i2} h_{i3} m_i) \qquad (1\ 2\ 3).$$

Символ (1 2 3) означает, что остальные соотношения получатся из записанных при циклической перестановке индексов.

До сих пор не было сделано каких-либо допущений о характере взаимодействия между телом-носителем S_0 и носимыми телами S_i. В дальнейшем целесообразно выделить вначале два специальных случая, а затем, объединив их, ввести такие характеристики гиростата, как гиростатический момент и тензор инерции.

В первом случае предполагается, что носимые тела подчинены реономным связям, обеспечивающим требуемую зависимость переменных $\varkappa_i$ от t. Существенно, что действие этих связей может быть представлено силами, внутренними по отношению к телам S_0, S_i. Вектор $\lambda_* (t) = \sum\limits_i A_i \dot{\varkappa}_i (t)\, \mathbf{e}_i$ определен в зависимости от времени в системе координат, сопутствующей телу S_0, и момент относительно O количества движения гиростата в Σ удобно представить в виде

$$\mathbf{A}_* \cdot \omega + \lambda_* (t), \tag{23}$$

где

$$\mathbf{A}_* \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_i A_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Тем самым в рассмотрение введен тензор $\mathbf{A}_*$ с компонентами

$$A^*_{kl} = A_{kl} + \sum_i A_i e_{ik} e_{il} \qquad (k, l = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Чтобы охарактеризовать второй случай, составим уравнения движения носимых тел. Точку O_i тела S_i примем за начало поступательно движущейся со скоростью этой точки системы координат Σ_i. Рассматривая движение S_i в Σ_i, запишем момент количества этого движения относительно O_i:

$$\int_{S_i} \boldsymbol{\xi}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \tag{25}$$

Так как O_i — центр масс тела S_i, то изменение вектора (25) во времени устанавливается уравнением

$$(\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)^{\cdot} = \mathbf{L}_i, \tag{26}$$

в котором $\mathbf{L}_i$ — момент относительно O_i действующих на S_i сил. Точка означает операцию дифференцирования по t во всех системах координат, движущихся поступательно относительно неподвижных осей. Так,

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i. \tag{27}$$

Умножив скалярно обе стороны равенства (26) на $\mathbf{e}_i$, а (27) — на $\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i$ и сложив полученные выражения, найдем

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)^{\cdot} = L_i + (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \tag{28}$$

Здесь $L_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}_i$ — момент относительно l_i сил, действующих на S_i. При условии (18) векторы $\mathbf{e}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$ и $\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i$ компланарны $(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i = 0$, и уравнение (28) сводится к такому:

$$A_i \dot{p}_i = L_i. \tag{29}$$

Второй случай характеризуется тем, что L_i — известная функция времени: $L_i = L_i(t)$. Уравнение (29) определяет зависимость p_i от t:

$$p_i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{L_i(t)}{A_i} dt.$$

Пусть такая зависимость установлена для каждого из тел S_i, тогда входящий в (20) вектор

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_i A_i p_i(t) \mathbf{e}_i$$

известен в системе координат, сопутствующей телу S_0, и выражение (20) по форме совпадает с (23): $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)$.

В более общем случае часть носимых тел подчинена связям, обеспечивающим требуемую зависимость $\varkappa_i$ от t, а для остальных тел известна зависимость L_i от времени: $L_i = L_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $\varkappa_i = \varkappa_i(t)$ $(i = r + 1, r + 2, \ldots, l)$. Моменту относительно O количества движения гиростата в Σ удобно в этом случае придать вид $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)$, понимая теперь под вектором $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}$ сумму

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{l} [\mathbf{e}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) B_i + \mathbf{h}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i) m_i] + \sum_{i=r+1}^{l} A_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \tag{30}$$

а под вектором $\lambda(t)$ —

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{r} A_i p_i(t) \mathbf{e}_i + \sum_{i=r+1}^{l} A_i \dot{\varkappa}_i(t) \mathbf{e}_i. \tag{31}$$

Последний называют *гиростатическим моментом*, а фигурирующий в (30) тензор $\mathbf{A}$ — *тензором инерции гиростата* в точке O. Его компоненты

$$A_{11} = A_{11}^0 + \sum_{i=1}^{l} [(e_{i2}^2 + e_{i3}^2) B_i + (h_{i2}^2 + h_{i3}^2) m_i] + \sum_{i=r+1}^{l} A_i e_{i1}^2,$$

$$A_{23} = A_{23}^0 - \sum_{i=1}^{l} (e_{i2} e_{i3} B_i + h_{i2} h_{i3} m_i) + \sum_{i=r+1}^{l} A_i e_{i2} e_{i3} \quad (1\,2\,3).$$

Если движение гиростата рассматривается по отношению к некоторой системе координат Σ_*, движущейся поступательно, то момент количества такого движения

$$\int_{S_0} (\boldsymbol{\zeta}_* + \boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi})\, dm +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} (\boldsymbol{\zeta}_* + \mathbf{h}_i + \boldsymbol{\xi}') \times (\mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i + \boldsymbol{\omega}_i' \times \boldsymbol{\xi}')\, dm$$

аналогичен выражению (12):

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\zeta}_* + \mathbf{c}) \times \mathbf{v}_* m + \boldsymbol{\zeta}_* \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})\, m. \tag{32}$$

Здесь первые два слагаемых определены формулами (30), (31), m — масса гиростата, неизменный в S_0 вектор $\mathbf{c}$ проведен из O в центр масс гиростата,

$$m\mathbf{c} = \int_{S_0} \boldsymbol{\xi}\, dm + \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} (\mathbf{h}_i + \boldsymbol{\xi}_i)\, dm.$$

Кинетическую энергию T гиростата, определяемую равенством

$$2T = \int_{S_0} (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi})^2\, dm + \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\xi}_i)^2 dm,$$

найдем, проведя выкладки, аналогичные (14) — (17):

$$2T = m\mathbf{v}_0^2 + 2m\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \Big\{ \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{l} [\mathbf{e}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) B_i +$$

$$+ \mathbf{h}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_i) m_i] \Big\} + \sum_{i=1}^{l} A_i p_i^2,$$

или, с учетом (30),

$$2T = m\mathbf{v}_0^2 + 2m\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{l} A_i [p_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i)^2] + \sum_{i=1}^{r} A_i p_i^2$$

и на основании (19)

$$2T = m\mathbf{v}_0^2 + 2m\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + 2 \sum_{i=r+1}^{l} A_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i)\dot{\varkappa}_i + \sum_{i=1}^{r} A_i p_i^2 + \sum_{i=r+1}^{l} A_i \dot{\varkappa}_i^2. \quad (33)$$

Система гиростатов. Рассмотрим совокупность n гиростатов S^k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Тела-носители S_0^k и S_0^{k-1} гиростатов S^k и S^{k-1} ($k > 1$) имеют по крайней мере одну общую точку O^k; $\boldsymbol{\omega}^k$ — абсолютная угловая скорость тела S_0^k, $\mathbf{v}_0^k$ — абсолютная скорость точки O^k. Вектор $\mathbf{s}^k$ проведен из O^k в O^{k+1}, а $\mathbf{c}^k$ — из O^k в центр масс гиростата S^k, скорость последней точки

$$\mathbf{v}^k = \mathbf{v}_0^k + \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{c}^k. \quad (34)$$

Действие тела S_0^{k-1} на S_0^k характеризует сила $\mathbf{R}^k$ и момент $\mathbf{L}^k$, приложенные в точке O^k. Сила $-\mathbf{R}^{k+1}$ и момент $-\mathbf{L}^{k+1}$, приложенные в точке O^{k+1}, характеризуют действие S_0^{k+1} на S_0^k. Кроме указанных к гиростату S^k могут быть приложены и другие силы — они характеризуют действие тел, не включенных в рассматриваемую совокупность гиростатов, и могут быть представлены силой $\mathbf{F}^k$ и моментом $\mathbf{M}^k$, приложенными в точке O^k. Полагаем, что гиростат S^n связан лишь с телом S_0^{n-1}, и, значит, векторы $\mathbf{R}^{n+1}$ и $\mathbf{L}^{n+1}$ не существуют. Тело S_0^1 имеет с телом S_0^2 общую точку O^2, но кроме этого тело S_0^1 может быть подчинено некоторой связи, обеспечивающей его точке O^1 заданное движение. В последнем случае скорость точки O^1 (обозначаемая в дальнейшем через $\mathbf{v}_0$ вместо $\mathbf{v}_0^1$) — известная функция времени. Действие такой связи характеризуют приложенные в O^1 сила $\mathbf{R}^1$ и быть может момент $\mathbf{L}^1$.

Так как $\mathbf{v}_0^k = \mathbf{v}_0^{k-1} + \boldsymbol{\omega}^{k-1} \times \mathbf{s}^{k-1}$, то

$$\mathbf{v}_0^k = \mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l. \quad (35)$$

Пусть Σ^k — движущаяся поступательно система координат с началом в точке O^k, m^k — масса S^k, $\mathbf{A}^k$ — тензор инерции гиростата S^k в точке O^k, $\boldsymbol{\lambda}^k$ — гиростатический момент этого гиростата. Запишем уравнение движения центра масс S^k и уравнение изменения момента количества движения S^k в Σ^k относительно O^k:

$$m^k \dot{\mathbf{v}}^k = \mathbf{F}^k + \mathbf{R}^k - \mathbf{R}^{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad (36)$$

$$m^n \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{F}^n + \mathbf{R}^n, \quad (37)$$

$$(\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot} + \mathbf{c}^k \times m^k \dot{\mathbf{v}}_0^k = \mathbf{M}^k + \mathbf{L}^k - \mathbf{L}^{k+1} - \mathbf{s}^k \times \mathbf{R}^{k+1} \quad (38)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(\mathbf{A}^n \cdot \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + \mathbf{c}^n \times m^n \dot{\mathbf{v}}_0^n = \mathbf{M}^n + \mathbf{L}^n. \quad (39)$$

Соотношения (34), (35) дополняют эту систему.

Из (36), (37) находим

$$\mathbf{R}^k = \sum_{q=k}^{n} (m^q \dot{\mathbf{v}}^q - \mathbf{F}^q). \tag{40}$$

Это значение вносим в (38):

$$(\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot} + \mathbf{c}^k \times m^k \dot{\mathbf{v}}_0^k + \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} (m^q \dot{\mathbf{v}}^q - \mathbf{F}^q) =$$

$$= \mathbf{M}^k + \mathbf{L}^k - \mathbf{L}^{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Затем подставляем в полученное выражение и в уравнение (39) величины (34), (35):

$$(\mathbf{A}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\lambda}^1)^{\cdot} + m^1 \mathbf{c}^1 \times \dot{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} =$$

$$= \mathbf{M}^1 + \mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^2 + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} \mathbf{F}^q,$$

$$(\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot} + m^k \mathbf{c}^k \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} +$$

$$+ \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \mathbf{M}^k + \mathbf{L}^k -$$

$$- \mathbf{L}^{k+1} + \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} \mathbf{F}^q \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{41}$$

$$(\mathbf{A}^n \cdot \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + m^n \mathbf{c}^n \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \mathbf{M}^n + \mathbf{L}^n.$$

Кроме $\boldsymbol{\omega}^k$ эта система содержит $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{L}^k$, и в общем случае она не замкнута. Для ее замыкания необходима информация о характере взаимодействия между телами S_0^k, S_0^{k-1} и о связях, наложенных на тело S_0^1. Так, например, если тела S_0^k и S_0^{k-1} $(k = 2, 3, \ldots, n)$ имеют лишь одну общую точку O^k и $\mathbf{L}^k = 0$ (т. е. взаимодействие этих тел полностью характеризует сила $\mathbf{R}^k$), а гиростат S^1 связан лишь с телом S_0^2 (т. е. $\mathbf{R}^1 = 0$, $\mathbf{L}^1 = 0$), то, присоединив уравнение

$$\sum_{q=1}^{n} m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \sum_{q=1}^{n} \mathbf{F}^q \tag{42}$$

[полученное из (40) для $k = 1$ с учетом (34), (35)] к системе (41)

$$(\mathbf{A}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\lambda}^1)^{\cdot} + m^1 \mathbf{c}^1 \times \dot{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} =$$

$$= \mathbf{M}^1 + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} \mathbf{F}^q,$$

$$(\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot} + m^k \mathbf{c}^k \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} +$$

$$+\mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} m^q \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \mathbf{M}^k + \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} \mathbf{F}^q \quad (43)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$(\mathbf{A}^n \cdot \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + m^n \mathbf{c}^n \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \mathbf{M}^n,$$

имеем для определения $n+1$ величин $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}^k$ систему $n+1$ уравнений (42), (43).

Если в такой системе гиростатов точка O^1 неподвижна, т. е. $\mathbf{v}_0 = 0$, то записанное для $k=1$ уравнение (40) определяет реакцию опоры $\mathbf{R}^1$ и может быть опущено, а система n уравнений (43) служит для нахождения n величин $\boldsymbol{\omega}^k$:

$$(\mathbf{A}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\lambda}^1)^{\cdot} + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} m^q \left(\boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \sum_{l=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} = \mathbf{M}^1 + \mathbf{s}^1 \times \sum_{q=2}^{n} \mathbf{F}^q,$$

$$(\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot} + m^k \mathbf{c}^k \times \sum_{l=1}^{k-1} (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} + \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} m^q \left(\boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{c}^q + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l \right)^{\cdot} = \mathbf{M}^k + \mathbf{s}^k \times \sum_{q=k+1}^{n} \mathbf{F}^q \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1), \qquad (44)$$

$$(\mathbf{A}^n \cdot \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + m^n \mathbf{c}^n \times \sum_{l=1}^{n-1} (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} = \mathbf{M}^n.$$

Вернемся к общему случаю и приведем другой способ составления уравнений движения рассматриваемой совокупности гиростатов. Зафиксируем какую-либо точку O^k и запишем уравнение момента относительно этой точки количества движения в Σ^k гиростатов S^k, S^{k+1}, ..., S^n. В случае $k=n$ имеется лишь один гиростат S^n и соответствующее уравнение совпадает с последним уравнением системы (42). Пусть $1 < k < n$. Момент относительно O^k количества движения в Σ^k гиростата S^p $(p \geqslant k)$ находим по формуле (32), полагая в ней

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_0^p - \mathbf{v}_0^k = \begin{cases} 0, \text{ если } p = k, \\ \sum\limits_{l=k}^{p-1} \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l, \text{ если } p > k, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_* = \begin{cases} 0, \text{ если } p = k, \\ \sum\limits_{q=k}^{p-1} \mathbf{s}^q, \text{ если } p > k. \end{cases}$$

Имеем для $p = k$ значение $\mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\lambda}^k$, а для $p > k$ —

$$\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p + m^p \left[\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=k}^{p-1} \mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1} (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l) - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p) \times \sum_{q=k}^{p-1} \mathbf{s}^q \right].$$

Момент относительно O^k количества движения в Σ^k гиростатов S^k, $S^{k+1}, \ldots, S^n$ таков:

$$\sum_{p=k}^{n} (\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p) + \sum_{p=k+1}^{n} m^p \left| \left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=k}^{p-1} \mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1} (\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l) - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p) \times \sum_{q=k}^{p-1} \mathbf{s}^q \right| . \qquad (45)$$

Запишем и момент относительно O^k действующих на эти гиростаты сил (включая и переносные силы инерции, возникающие вследствие движения Σ^k):

$$\mathbf{L}^k + \sum_{p=k}^{n}\mathbf{M}^p + \sum_{p=k+1}^{n}\sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q \times \mathbf{F}^q - \left[m^k\mathbf{c}^k + \sum_{p=k+1}^{n} m^p\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right)\right] \times \tag{46}$$
$$\times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot}.$$

Требуемое уравнение получим, приравняв последнее выражение производной по времени вектора (45):

$$\mathbf{L}^k = \sum_{p=k}^{n}\left[(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^p\right] +$$
$$+ \sum_{p=k+1}^{n}\left\{m^p\left[\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p)^{\cdot} \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right] +\right.$$
$$\left. + \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q \times \left[m^p\left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{F}^p\right]\right\}.$$

При дифференцировании выражения (46) учтено, что $\dot{\mathbf{c}}^p = \boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p$, $\dot{\mathbf{s}}^l = \boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l$, вследствие чего

$$\left[\left(\mathbf{c}^p \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l) - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p) \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right]^{\cdot} =$$
$$= \left[\left(\mathbf{c}^p \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p)^{\cdot} \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right].$$

Проведя такие же выкладки для случая $k = 1$, придем к следующей системе уравнений:

$$\mathbf{L}^1 = \sum_{p=1}^{n}[(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p \times \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{M}^p] + \sum_{p=2}^{n}\left\{m^p\left[\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right) \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{l=1}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p)^{\cdot} \times \sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right] + \sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q \times (m^p\dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{F}^p)\right\},$$

$$\mathbf{L}^k = \sum_{p=k}^{n}\left[(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^p\right] +$$
$$+ \sum_{p=k+1}^{n}\left\{m^p\left[\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right) \times \sum_{l=k}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} - (\boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{c}^p)^{\cdot} \times \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q\right] +\right.$$
$$\left. + \sum_{q=k}^{p-1}\mathbf{s}^q \times \left[m^p\left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{F}^p\right]\right\} \quad (1 < k < n), \tag{47}$$

$$\mathbf{L}^n = (\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{\lambda}^n)^{\cdot} + m^n\mathbf{c}^n \times \left(\mathbf{v}_0 + \sum_{l=1}^{n-1}\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^n.$$

Разумеется, эта система уравнений равносильна системе (41). Полученное из (41) значение

$$\mathbf{L}^k = \sum_{p=k}^{n}\left[(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{p-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot} - \mathbf{M}^p\right] +$$

$$+\sum_{p=k}^{n-1}\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\left[m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot}-\mathbf{F}^q\right]\quad(1<k<n)\qquad(48)$$

легко приводится к виду (47).

Специальный случай. Уже был отмечен сравнительно простой случай, когда все моменты $\mathbf{L}^k$ отсутствовали. Если $\mathbf{L}^h\neq 0$, а $\mathbf{L}^{h+1}=0$, то из (41) найдем

$$\mathbf{L}^k = \sum_{p=k}^{h}\left\{(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{p-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot} +\right.$$

$$\left.+\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\left[m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot}-\mathbf{F}^q\right]-\mathbf{M}^p\right\}\quad(1<k\leqslant h<n).\qquad(49)$$

Рассмотрим один специальный вид связи между телами S_0^k и S_0^{k-1}: тела имеют общую ось l^k, содержащую точку O^k. Пусть $\mathbf{e}^k$ — единичный направляющий вектор этой оси, тогда $\dot{\mathbf{e}}^k = \boldsymbol{\omega}^k\times\mathbf{e}^k = \boldsymbol{\omega}^{k-1}\times\mathbf{e}^k$ и, следовательно, $(\boldsymbol{\omega}^k-\boldsymbol{\omega}^{k-1})\times\mathbf{e}^k=0$, или

$$\boldsymbol{\omega}^k = \boldsymbol{\omega}^{k-1}+\mathbf{e}^k\dot{\varphi}^k,\qquad(50)$$

где φ^k — угол поворота тела S_0^k относительно S_0^{k-1} вокруг оси l^k. В этом случае обычно полагают заданной величину

$$L^k = \mathbf{e}^k\cdot\mathbf{L}^k\qquad(51)$$

— приложенный к телу S_0^k управляющий момент относительно оси l^k. Подставив (49) в (51), получим

$$\mathbf{e}^k\cdot\sum_{p=k}^{h}\left\{(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} + m^p\mathbf{c}^p\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{p-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot} +\right.$$

$$\left.+\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\left[m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot}-\mathbf{F}^q-\mathbf{M}^p\right\}=L^k.$$

Чтобы продемонстрировать использование полученных соотношений в конкретных задачах, рассмотрим представляющий также и самостоятельный интерес специальный случай. Пусть $\mathbf{L}^k=0$ для номеров $k=2,3,\ldots,r$, а для номеров $k>r$ тела S_0^k и S_0^{k-1} связаны общей осью l^k и соответствующие управляющие моменты L^k относительно этих осей заданы. Уравнения движения этой совокупности гиростатов таковы:

$$(\mathbf{A}^1\cdot\boldsymbol{\omega}^1+\boldsymbol{\lambda}^1)^{\cdot}+m^1\mathbf{c}^1\times\dot{\mathbf{v}}_0+\mathbf{s}^1\times\sum_{q=2}^{n}m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^{\cdot}=\mathbf{M}^1+\mathbf{L}^1+\mathbf{s}^1\times\sum_{q=2}^{n}\mathbf{F}^q,$$

$$(\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k)^\cdot+m^k\mathbf{c}^k\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot+$$

$$+\mathbf{s}^k\times\sum_{q=k+1}^{n}m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot=\mathbf{M}^k+\mathbf{s}^k\times\sum_{q=k+1}^{n}\mathbf{F}^q$$

$$(k=2,3,\ldots,r-1),$$

$$\sum_{p=r}^{n}\left\{(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)^\cdot+m^p\mathbf{c}^p\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{p-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{M}^p\right\}+$$

$$+\sum_{p=r}^{n-1}\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\left[m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{F}^q\right]=0, \qquad (52)$$

$$\mathbf{e}^k\cdot\left\{\sum_{p=k}^{n}\left[(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p+\boldsymbol{\lambda}^p)^\cdot+m^p\mathbf{c}^p\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{p-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{M}^p\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=k}^{n-1}\mathbf{s}^p\times\sum_{q=p+1}^{n}\left[m^q\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q+\sum_{l=1}^{q-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{F}^q\right]\right\}=L^k$$

$$(k=r+1,\ r+2,\ldots,n-1).$$

$$\mathbf{e}^n\cdot\left[(\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\omega}^n+\boldsymbol{\lambda}^n)^\cdot+m^n\mathbf{c}^n\times\left(\mathbf{v}_0+\sum_{l=1}^{n-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{M}^p\right]=L^n,$$

$$\boldsymbol{\omega}^k=\boldsymbol{\omega}^r+\sum_{p=r+1}^{k}\mathbf{e}^p\dot{\varphi}^p\quad(k=r+1,\ r+2,\ldots,n). \qquad (53)$$

Эту систему дополним соотношением

$$\sum_{k=1}^{n}\left[m^k\left(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}^k\times\mathbf{c}^k+\sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l\right)^\cdot-\mathbf{F}^k\right]=\mathbf{R}^1, \qquad (54)$$

полученным из (40), (34), (35).

Если гиростат S^1 связан лишь с телом S_0^2, то $\mathbf{R}^1=0$, $\mathbf{L}^1=0$, и уравнения (52) — (54) устанавливают зависимость от времени векторов $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}^k$ $(k\leqslant r)$ и углов $\varphi^k\,(k>r)$. Другая возможность: движение точки O^1 задано ($\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_0(t)$ — известная функция времени), а $\mathbf{L}^1=0$. Уравнение (54) определяет реакцию $\mathbf{R}^1$ и может быть опущено. Остальные уравнения служат для определения зависимости от t угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}^k\,(k\leqslant r)$ и углов $\varphi^k\,(k>r)$.

Представим уравнения (52) — (54) в координатной форме. С телом S_0^k свяжем неизменно триэдр $\mathfrak{z}_1^k\mathfrak{z}_2^k\mathfrak{z}_3^k$, назначив вершиной его точку O^k. Триэдр $\mathfrak{z}_1^0\mathfrak{z}_2^0\mathfrak{z}_3^0$ неподвижен в пространстве. Эти триэдры ортонормированы:

$$\mathfrak{z}_\mu^k\cdot\mathfrak{z}_\nu^k=\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}1, & \text{если } \mu=\nu,\\ 0, & \text{если } \mu\neq\nu.\end{cases}$$

Величины $\alpha_{\mu\nu}^{kl}=\mathfrak{z}_\mu^k\cdot\mathfrak{z}_\nu^l$ $(k,\ l=0,1,2,\ldots,n)$ определяют ориентацию триэдра $\mathfrak{z}_\mu^k$ в $\mathfrak{z}_\nu^l$:

$$\mathfrak{z}_\mu^k=\alpha_{\mu\nu}^{kl}\mathfrak{z}_\nu^l. \qquad (55)$$

Здесь и в дальнейшем по дважды встречающемуся в одночленном выражении нижнему индексу (в отличие от верхнего!) проводится суммирование по значениям 1, 2, 3.

Для представления векторных произведений удобен символ $\varepsilon_{\varkappa\mu\nu}$, который сохраняет значение при циклической перестановке индексов: $\varepsilon_{\varkappa\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\varkappa\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\varkappa}$, меняет знак на противоположный при перестановке любых двух индексов: $\varepsilon_{\varkappa\mu\nu} = -\varepsilon_{\varkappa\nu\mu}$. Его числовые значения определяются заданием одного $\varepsilon_{123} = 1$. Воспользовавшись этим символом, запишем

$$\text{э}^k_\mu \times \text{э}^k_\nu = \varepsilon_{\varkappa\mu\nu}\text{э}^k_\varkappa . \tag{56}$$

Встречающиеся в уравнениях (52) — (54) векторы, представим разложениями в соответствующих триэдрах:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}^k = \omega^k_\nu \text{э}^k_\nu, \quad \boldsymbol{\lambda}^k = \lambda^k_\nu \text{э}^k_\nu, \quad \mathbf{c}^k = c^k_\nu \text{э}^k_\nu, \quad \mathbf{s}^k = s^k_\nu \text{э}^k_\nu, \\ \mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k = A^k_{\mu\nu}\omega^k_\nu \text{э}^k_\mu, \quad \dot{\mathbf{v}}_0 = w_\nu \text{э}^0_\nu, \\ \mathbf{M}^k = M^k_\nu \text{э}^k_\nu, \quad \mathbf{R}^1 = R_\nu \text{э}^0_\nu, \quad \mathbf{L}^1 = L^1_\nu \text{э}^1_\nu, \quad \mathbf{F}^k = F^k_\nu \text{э}^k_\nu.\end{gathered} \tag{57}$$

Для тел с номерами $k > r$ первый вектор триэдра совместим с единичным вектором оси l^k: $\mathbf{e}^k = \text{э}^k_1$. Заметим, что $\dot{\text{э}}^k_\nu = \boldsymbol{\omega}^k \times \text{э}^k_\nu$, или, с учетом (56), $\dot{\text{э}}^k_\nu = \varepsilon_{\varkappa\mu\nu}\omega^k_\mu \text{э}^k_\varkappa$. Поэтому, в частности,

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\omega}^l \times \mathbf{s}^l)^{\cdot} = [\varepsilon_{\varkappa\mu\nu} s^l_\nu \dot{\omega}^l_\mu + (s^l_\mu \omega^l_\varkappa - s^l_\varkappa \omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu]\,\text{э}^l_\varkappa, \\ (\mathbf{A}^p \cdot \boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p)^{\cdot} = [A^p_{\varkappa\nu}\dot{\omega}^p_\nu + \dot{\lambda}^p_\varkappa + \varepsilon_{\varkappa\sigma\mu}\omega^p_\sigma (A^p_{\mu\nu}\omega^p_\nu + \lambda^p_\mu)]\,\text{э}^p_\varkappa.\end{gathered} \tag{58}$$

Система (52) — (54) записывается так:

$$A^1_{\varkappa\nu}\dot{\omega}^1_\nu + \dot{\lambda}^1_\varkappa + \varepsilon_{\varkappa\sigma\nu}\Big\{(A^1_{\nu\mu}\omega^1_\mu + \lambda^1_\nu)\,\omega^1_\sigma + (c^1_\sigma m^1 + s^1_\sigma \sum_{q=2}^{n} m^q)\,w_\gamma \alpha^{10}_{\nu\gamma} +$$

$$+ s^1_\sigma \sum_{q=2}^{n} m^q \langle [\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} c^q_\varrho \dot{\omega}^q_\mu + (c^q_\mu \omega^q_\gamma - c^p_\gamma \omega^q_\mu)\,\omega^q_\mu]\,\alpha^{1q}_{\nu\gamma} + \sum_{l=1}^{q-1} [\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} s^l_\varrho \dot{\omega}^l_\mu +$$

$$+ (s^l_\mu \omega^l_\gamma - s^l_\gamma \omega^{l}_\mu)\,\omega^l_\mu]\,\alpha^{1l}_{\nu\gamma} - F^q_\gamma \alpha^{1q}_{\nu\gamma}\rangle\Big\} = M^1_\varkappa + L^1_\varkappa ,$$

$$A^k_{\varkappa\nu}\dot{\omega}^k_\nu + \dot{\lambda}^k_\varkappa + \varepsilon_{\varkappa\sigma\nu}\{(A^k_{\nu\mu}\omega^k_\mu + \lambda^k_\nu)\,\omega^k_\sigma + m^k c^k_\sigma [w_\gamma \alpha^{k0}_{\nu\gamma} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} (\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} s^l_\varrho \dot{\omega}^l_\mu + (s^l_\mu \omega^l_\gamma - s^l_\gamma \omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{kl}_{\nu\gamma}] + s^k_\sigma \sum_{q=k+1}^{n} \langle m^q [w_\gamma \alpha^{k0}_{\nu\gamma} +$$

$$+ (\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} c^q_\varrho \dot{\omega}^q_\mu + (c^q_\mu \omega^q_\gamma - c^q_\gamma \omega^q_\mu)\,\omega^q_\mu)\,\alpha^{kq}_{\nu\gamma} + \sum_{l=1}^{q-1} (\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} s^l_\varrho \dot{\omega}^l_\mu + (s^l_\mu \omega^l_\gamma -$$

$$- s^l_\gamma \omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{kl}_{\nu\gamma}] - F^q_\gamma \alpha^{kq}_{\nu\gamma}\rangle\} = M^k_\varkappa \qquad (k = 2, 3, \ldots, r-1),$$

$$\sum_{p=r}^{n} \{A^p_{\varkappa\nu}\dot{\omega}^p_\nu + \dot{\lambda}^p_\varkappa + \varepsilon_{\varkappa\sigma\nu} [(A^p_{\nu\mu}\omega^p_\mu + \lambda^p_\nu)\,\omega^p_\sigma + m^p c^p_\sigma (w_\gamma \alpha^{p0}_{\nu\gamma} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{p-1} (\varepsilon_{\gamma\mu\varrho} s^l_\varrho \dot{\omega}^l_\mu + (s^l_\mu \omega^l_\gamma - s^l_\gamma \omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{lp}_{\gamma\nu})] - M^p_\varkappa\}\,\alpha^{pr}_{\varkappa\beta} +$$

$$+\varepsilon_{\varkappa\sigma\nu}\sum_{p=r}^{n-1}s^p_\sigma\alpha^{pr}_{\varkappa\beta}\sum_{q=p+1}^{n}\{m^q[w_\gamma\alpha^{p0}_{\nu\gamma}+(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}c^q_\varrho\dot\omega^q_\mu+(c^q_\mu\omega^q_\gamma-$$

$$-c^q_\gamma\omega^q_\mu)\,\omega^q_\mu)\,\alpha^{pq}_{\nu\gamma}+\sum_{l=1}^{q-1}(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}s^l_\varrho\dot\omega^l_\mu+(s^l_\mu\omega^l_\gamma-s^l_\gamma\omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{pl}_{\nu\gamma}]-F^q_\gamma\alpha^{pq}_{\nu\gamma}\}=0,$$

$$\sum_{p=k}^{n}\{A^p_{\varkappa\nu}\dot\omega^p_\nu+\dot\lambda^p_\varkappa+\varepsilon_{\varkappa\sigma\nu}[(A^p_{\nu\mu}\omega^p_\mu+\lambda^p_\nu)\,\omega^p_\sigma+m^pc^p_\sigma(w_\gamma\alpha^{p0}_{\nu\gamma}+ \tag{59}$$

$$+\sum_{l=1}^{p-1}(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}s^l_\varrho\dot\omega^l_\mu+(s^l_\mu\omega^l_\gamma-s^l_\gamma\omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{lp}_{\gamma\nu})]-M^p_\varkappa\}\,\alpha^{pk}_{\varkappa 1}+$$

$$+\varepsilon_{\varkappa\sigma\nu}\sum_{p=k}^{n-1}s^p_\sigma\alpha^{pk}_{\varkappa 1}\sum_{q=p+1}^{n}\{m^q[w_\gamma\alpha^{p0}_{\nu\gamma}+(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}c^q_\varrho\dot\omega^q_\mu+$$

$$+(c^q_\mu\omega^q_\gamma-c^q_\gamma\omega^q_\mu)\,\omega^q_\mu)\,\alpha^{pq}_{\nu\gamma}+\sum_{l=1}^{q-1}(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}s^l_\varrho\dot\omega^l_\mu+(s^l_\mu\omega^l_\gamma-s^l_\gamma\omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{pl}_{\nu\gamma}]-$$

$$-F^q_\gamma\alpha^{pq}_{\nu\gamma}\}=L^k\qquad(k=r+1,r+2,\ldots,n-1),$$

$$A^n_{1\nu}\dot\omega^n_\nu+\dot\lambda^n_1+\varepsilon_{1\varrho\nu}\{(A^n_{\nu\mu}\omega^n_\mu+\lambda^n_\mu)\,\omega^n_\sigma+m^nc^n_\sigma[w_\gamma\alpha^{n0}_{\nu\gamma}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}s^l_\varrho\dot\omega^l_\mu+(s^l_\mu\omega^l_\gamma-s^l_\gamma\omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu)\,\alpha^{lp}_{\gamma\nu}]\}=M^n_1+L^n,$$

$$\omega^k_\mu=\omega^r_\nu\alpha^{rk}_{\nu\mu}+\sum_{p=r+1}^{k}\dot\varphi^p\alpha^{pk}_{1\mu}\qquad(k=r+1,r+2,\ldots,n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}m^k\{w_\varkappa+[\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}c^k_\varrho\dot\omega^k_\mu+(c^k_\mu\omega^k_\gamma-c^k_\gamma\omega^k_\mu)\,\omega^k_\mu]\,\alpha^{k0}_{\gamma\varkappa}+$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}[\varepsilon_{\gamma\mu\varrho}s^l_\varrho\dot\omega^l_\mu+(s^l_\mu\omega^l_\gamma-s^l_\gamma\omega^l_\mu)\,\omega^l_\mu]\,\alpha^{l0}_{\gamma\varkappa}-F^k_\gamma\alpha^{k0}_{\gamma\varkappa}\}=R_\varkappa.$$

Умножив (55) и (58) скалярно на $э^0_\varrho$, получим кинематические соотношения

$$\alpha^{k0}_{\mu\varrho}=\alpha^{kl}_{\mu\nu}\alpha^{l0}_{\nu\varrho},$$

$$\dot\alpha^{k0}_{\nu\varrho}=\varepsilon_{\varkappa\mu\nu}\omega^k_\mu\alpha^{k0}_{\varkappa\varrho},$$

которые следует присоединить к системе (59). Возможны и другие пути замыкания уравнений (59). В следующем разделе в одном специальном случае для этой цели использованы углы Эйлера.

Система гироскопов Лагранжа. Обращаясь к совокупности твердых тел, движение которых находится из уравнений (44), допустим, что кроме реакции опоры в точке O^1 внешними силами для этой совокупности тел являются лишь силы тяжести $\mathbf{F}^k=gm^k\boldsymbol{\nu}$ (g — ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор направления этой силы). Тогда $\mathbf{M}^k=gm^k\mathbf{c}^k\times\boldsymbol{\nu}$ и уравнения (44) принимают вид

$$(\mathbf{A}^n\cdot\boldsymbol{\omega}^n+\boldsymbol{\lambda}^n)^\cdot+m^n\mathbf{c}^n\times\left[\sum_{l=1}^{n-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)^\cdot-g\boldsymbol{\nu}\right]=0,$$

$$(\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot}+m^k\mathbf{c}^k\times\left[\sum_{l=1}^{k-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)^{\cdot}-g\boldsymbol{\nu}\right]+\mathbf{s}^k\times$$

$$\times\sum_{q=k+1}^{n}m^q\left[(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q)^{\cdot}-g\boldsymbol{\nu}+\sum_{l=1}^{q-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)^{\cdot}\right]=0\qquad(k=2,3,\ldots,n-1),\tag{60}$$

$$(\mathbf{A}^1\cdot\boldsymbol{\omega}^1+\boldsymbol{\lambda}^1)^{\cdot}+\mathbf{s}^1\times\sum_{q=2}^{n}m^q\left[(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathbf{c}^q)^{\cdot}-g\boldsymbol{\nu}+\sum_{l=1}^{q-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l)^{\cdot}\right]=m^1\mathbf{c}^1\times g\boldsymbol{\nu}.$$

Пусть центр масс гиростата S^k принадлежит прямой O^kO^{k+1}, а $\mathbf{э}^k$ — единичный вектор этой прямой:

$$\mathbf{s}^k=s^k\mathbf{э}^k,\quad \mathbf{c}^k=c^k\mathbf{э}^k.\tag{61}$$

Векторы $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}_*^k$ определим соотношениями $\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}^k=\mathbf{e}^k\sin\theta_k$, $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{э}^k\cos\theta_k+\mathbf{e}_*^k\sin\theta_k$. Введя обычным путем углы ψ_k и φ_k, представим угловую скорость тела S_0^k в виде $\boldsymbol{\omega}^k=\mathbf{э}^k\dot\varphi_k+\mathbf{e}^k\dot\theta_k+\boldsymbol{\nu}\dot\psi_k$, или *

$$\boldsymbol{\omega}^k=\mathbf{э}^kp_k+\mathbf{e}^k\dot\theta_k+\mathbf{e}_*^k\dot\psi_k\sin\theta_k,\tag{62}$$

где

$$p_k=\dot\varphi_k+\dot\psi_k\cos\theta_k.\tag{63}$$

Полагаем, что гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}^k$ коллинеарен вектору $\mathbf{э}^k$:

$$\boldsymbol{\lambda}^k=\lambda^k(t)\,\mathbf{э}^k.\tag{64}$$

Пусть эллипсоид, сопоставляемый тензору инерции гиростата S^k в точке O^k, есть эллипсоид вращения, и вектор $\mathbf{э}^k$ ортогонален плоскости кругового сечения этого эллипсоида, B^k — момент инерции относительно оси, принадлежащей круговому сечению, A^k — относительно оси, направленной по $\mathbf{э}^k$. Тогда

$$\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k=(A^kp_k+\lambda^k)\,\mathbf{э}^k+(\mathbf{e}^k\dot\theta_k+\mathbf{e}_*^k\dot\psi_k\sin\theta_k)\,B^k.\tag{65}$$

Триэдр $\mathbf{э}^k$, $\mathbf{e}^k$, $\mathbf{e}_*^k$ имеет угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega}_*^k=\boldsymbol{\omega}^k-\mathbf{э}^k\dot\varphi_k=\mathbf{э}^k\dot\psi_k\cos\theta_k+\mathbf{e}^k\dot\theta_k+\mathbf{e}_*^k\dot\psi_k\sin\theta_k,\tag{66}$$

так что

$$\dot{\mathbf{э}}^k=\boldsymbol{\omega}_*^k\times\mathbf{э}^k,\quad \dot{\mathbf{e}}^k=\boldsymbol{\omega}_*^k\times\mathbf{e}^k,\quad \dot{\mathbf{e}}_*^k=\boldsymbol{\omega}_*^k\times\mathbf{e}_*^k.\tag{67}$$

Из (62)—(67) находим

$$(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{э}^l)^{\cdot}=-(\dot\theta_l^2+\dot\psi_l^2\sin^2\theta_l)\,\mathbf{э}^l+(\ddot\psi_l\sin\theta_l+2\dot\psi_l\dot\theta_l\cos\theta_l)\,\mathbf{e}^l+$$
$$+(-\ddot\theta_l+\dot\psi_l^2\sin\theta_l\cos\theta_l)\,\mathbf{e}_*^l,\tag{68}$$

$$(\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot}=(A^kp_k+\lambda^k)^{\cdot}\,\mathbf{э}^k+[(A^kp_k+\lambda^k)\,\dot\psi_k\sin\theta_k+$$
$$+(\ddot\theta_k-\dot\psi_k^2\sin\theta_k\cos\theta_k)\,B^k]\,\mathbf{e}^k+[(\ddot\psi_k\sin\theta_k+2\dot\psi_k\dot\theta_k\cos\theta_k)\,B^k-$$
$$-(A^kp_k+\lambda_k)\dot\theta_k]\,\mathbf{e}_*^k.\tag{69}$$

* В дальнейшем не предполагается суммирования по дважды входящему нижнему индексу.

Из (60), (61) следует

$$\text{э}^k\cdot(\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot}=0\qquad(k=1,2,\ldots,n),$$

или, с учетом (69), $(A^kp_k+\lambda_k)^{\cdot}=0$. Обозначим постоянную интегрирования через B^kn_k:

$$A^kp_k+\lambda^k=B^kn_k \tag{70}$$

и подставим это значение в (69). Тогда

$$(\mathbf{A}^k\cdot\boldsymbol{\omega}^k+\boldsymbol{\lambda}^k)^{\cdot}=[\ddot\theta_k+(n_k-\dot\psi_k\cos\theta_k)\,\dot\psi_k\sin\theta_k]\,B^k\mathbf{e}_k+$$
$$+[\ddot\psi_k\sin\theta_k+(2\dot\psi_k\cos\theta_k-n_k)\,\dot\theta_k]\,B^k\mathbf{e}_*^k. \tag{71}$$

Введем обозначения

$$(m^kc^k+s^k\sum_{q=k+1}^{n}m^q)\,g=B^k\mu_k\qquad(k=1,2,\ldots,n-1), \tag{72}$$

$$m^nc^ng=B^n\mu_n.$$

Тогда

$$\text{э}^k\times(m^kc^k+s^k\sum_{q=k+1}^{n}m^q)\,g\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{e}^kB^k\mu_k\sin\theta_k. \tag{73}$$

Вносим (71), (61), (73) в уравнения (60):

$$\begin{gathered}
\{\ddot\theta_n+[(n_n-\dot\psi_n\cos\theta_n)\,\dot\psi_n+\mu_n]\sin\theta_n\}\,B^n\mathbf{e}^n+[\ddot\psi_n\sin\theta_n+\\
+(2\dot\psi_n\cos\theta_n-n_n)\,\dot\theta_n]\,B^n\mathbf{e}_*^n+m^nc^n\sum_{l=1}^{n-1}s^l\text{э}^n\times(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}=0,\\
\{\ddot\theta_k+[(n_k-\dot\psi_k\cos\theta_k)\,\dot\psi_k+\mu_k]\sin\theta_k\}\,B^k\mathbf{e}^k+[\ddot\psi_k\sin\theta_k+(2\dot\psi_k\cos\theta_k-\\
-n_k)\,\dot\theta_k]\,B^k\mathbf{e}_*^k+\text{э}^k\times\Big\{m^kc^k\sum_{l=1}^{k-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}+s^k\sum_{q=k+1}^{n}m^q[c^q(\boldsymbol{\omega}^q\times\text{э}^q)^{\cdot}+\\
+\sum_{l=1}^{q-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}]\Big\}=0\qquad(k=2,3,\ldots,n-1),\\
\{\ddot\theta_1+[(n_1-\dot\psi_1\cos\theta_1)\,\dot\psi_1+\mu_1]\sin\theta_1\}\,B^1\mathbf{e}^1+[\ddot\psi_1\sin\theta_1+(2\dot\psi_1\cos\theta_1-\\
-n_1)\,\dot\theta_1]\,B^1\mathbf{e}_*^1+\text{э}^1\times s^1\sum_{q=2}^{n}m^q[c^q(\boldsymbol{\omega}^q\times\text{э}^q)^{\cdot}+\sum_{l=1}^{q-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}]=0.
\end{gathered} \tag{74}$$

Так как $\mathbf{e}^k\cdot[\text{э}^k\times(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}]=-\mathbf{e}_*^k\cdot(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}$ и $\mathbf{e}_*^k\cdot[\text{э}^k\times(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}]=$ $=\mathbf{e}^k\cdot(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}$, то из (73) следует

$$\{\ddot\theta_n+[(n_n-\dot\psi_n\cos\theta_n)\,\dot\psi_n+\mu_n]\sin\theta_n\}\,B^n-m^nc^n\sum_{l=1}^{n-1}s^l\mathbf{e}_*^n\cdot(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}=0,$$

$$[\ddot\psi_n\sin\theta_n+(2\dot\psi_n\cos\theta_n-n_n)\,\dot\theta_n]\,B^n+m^nc^n\sum_{l=1}^{n-1}s^l\mathbf{e}^n\cdot(\boldsymbol{\omega}^l\times\text{э}^l)^{\cdot}=0,$$

$$\{\ddot\theta_k + [(n_k - \dot\psi_k\cos\theta_k)\dot\psi_k + \mu_k]\sin\theta_k\} B^k - m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} s^l \mathbf{e}^k_* \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot} -$$

$$- s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q [c^q \mathbf{e}^k_* \cdot (\omega^q \times э^q)^{\cdot} + \sum_{l=1}^{q-1} s^l \mathbf{e}^k_* \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot}] = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$[\ddot\psi_k \sin\theta_k + (2\dot\psi_k\cos\theta_k - n_k)\dot\theta_k] B^k + m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} s^l \mathbf{e}^k \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot} +$$

$$+ s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q [c^q \mathbf{e}^k \cdot (\omega^q \times э^q)^{\cdot} + \sum_{l=1}^{q-1} s^l \mathbf{e}^k \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot}] = 0, \tag{75}$$

$$\{\ddot\theta_1 + [(n_1 - \dot\psi_1\cos\theta_1)\dot\psi_1 + \mu_1]\sin\theta_1\} B^1 - s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q [c^q \mathbf{e}^1_* \cdot (\omega^q \times э^q)^{\cdot} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q-1} s^l \mathbf{e}^1_* \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot}] = 0,$$

$$[\ddot\psi_1 \sin\theta_1 + (2\dot\psi_1\cos\theta_1 - n_1)\dot\theta_1] B^1 + s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q [c^q \mathbf{e}^1 \cdot (\omega^q \times э^q)^{\cdot} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q-1} s^l \mathbf{e}^1 \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot}] = 0.$$

Чтобы завершить преобразование полученных уравнений, введем единичный вектор $\mathbf{v}^k = \mathbf{e}^k \times \mathbf{v}$, так что

$$э^k = \mathbf{v}\cos\theta_k + \mathbf{v}^k \sin\theta_k, \quad \mathbf{e}^k_* = \mathbf{v}\sin\theta_k - \mathbf{v}^k\cos\theta_k. \tag{76}$$

Вектор $\mathbf{v}^k$ принадлежит горизонтальной плоскости и ортогонален вектору $\mathbf{e}^k$. Последний составляет с некоторым фиксированным в пространстве горизонтальным направлением угол ψ_k, поэтому

$$\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^l = \mathbf{v}^k \times \mathbf{v}^l = \mathbf{v}\sin(\psi_l - \psi_k), \quad \mathbf{v}^k \times \mathbf{e}^l = \mathbf{v}\cos(\psi_l - \psi_k),$$

$$\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{v}^l = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^l = \cos(\psi_l - \psi_k), \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}^l = \sin(\psi_l - \psi_k). \tag{77}$$

Из (68), (76) следует $(\omega^l \times э^l)^{\cdot} = \mathbf{v}(\cos\theta_l)^{\cdot\cdot} + [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot\psi_l^2 \sin\theta_l]\mathbf{v}^l + (\ddot\psi_l \sin\theta_l + 2\dot\psi_l\dot\theta_l\cos\theta_l)\mathbf{e}^l$ и, значит,

$$\mathbf{e}^k \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot} = [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot\psi_l^2\sin\theta_l]\sin(\psi_l - \psi_k) +$$

$$+ (\ddot\psi_l\sin\theta_l + 2\dot\psi_l\dot\theta_l\cos\theta_l)\cos(\psi_l - \psi_k),$$

$$\mathbf{e}^k_* \cdot (\omega^l \times э^l)^{\cdot} = (\cos\theta_l)^{\cdot\cdot}\sin\theta_k + \{(\ddot\psi_l\sin\theta_l + 2\dot\psi_l\dot\theta_l\cos\theta_l)\sin(\psi_l - \psi_k) -$$

$$- [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot\psi_l^2\sin\theta_l]\cos(\psi_l - \psi_k)\}\cos\theta_k.$$

Уравнения (75) записываются теперь так:

$$\{\ddot\theta_n + [(n_n - \dot\psi_n\cos\theta_n)\dot\psi_n + \mu_n]\sin\theta_n\} B^n - m^n c^n \sum_{l=1}^{n-1} s^l \{(\cos\theta_l)^{\cdot\cdot}\sin\theta_n +$$

$$+\langle(\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\sin(\psi_l - \psi_n) - [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\cos(\psi_l - \psi_n)\rangle \cos\theta_n\} = 0,$$

$$[\ddot{\psi}_n \sin\theta_n + (2\dot{\psi}_n \cos\theta_n - n_n)\dot{\theta}_n] B^n + m^n c^n \sum_{l=1}^{n-1} s^l \{[(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\sin(\psi_l - \psi_n) + (\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\cos(\psi_l - \psi_n)\} = 0,$$

$$\{\ddot{\theta}_k + [(n_k - \dot{\psi}_k \cos\theta_k)\dot{\psi}_k + \mu_k]\sin\theta_k\} B^k - \Big\{m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} s^l (\cos\theta_l)^{\cdot\cdot} +$$

$$+ s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q [c^q (\cos\theta_q)^{\cdot\cdot} + \sum_{l=1}^{q-1} s^l (\cos\theta_l)^{\cdot\cdot}]\Big\} \sin\theta_k -$$

$$-\Big\{m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} s^l \langle(\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\sin(\psi_l - \psi_k) -$$

$$-[(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\cos(\psi_l - \psi_k)\rangle + s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q [c^q \langle(\ddot{\psi}_q \sin\theta_q +$$

$$+ 2\dot{\psi}_q\dot{\theta}_q \cos\theta_q)\sin(\psi_q - \psi_k) - [(\sin\theta_q)^{\cdot\cdot} - \dot{\psi}_q^2 \sin\theta_q]\cos(\psi_q - \psi_k)\rangle +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q-1} s^l \langle(\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\sin(\psi_l - \psi_k) - [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\cos(\psi_l - \psi_k)\rangle]\Big\} \cos\theta_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$[\ddot{\psi}_k \sin\theta_k + (2\dot{\psi}_k \cos\theta_k - n_k)\dot{\theta}_k] B^k + m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} s^l \{[(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\sin(\psi_l - \psi_k) + (\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\cos(\psi_l - \psi_k)\} +$$

$$+ s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q \{c^q \langle[(\sin\theta_q)^{\cdot\cdot} - \dot{\psi}_q^2 \sin\theta_q]\sin(\psi_q - \psi_k) + (\ddot{\psi}_q \sin\theta_q +$$

$$+ 2\dot{\psi}_q\dot{\theta}_q \cos\theta_q)\cos(\psi_q - \psi_k)\rangle + \sum_{l=1}^{q-1} s^l \langle[(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot{\psi}_l^2 \sin\theta_l]\sin(\psi_l - \psi_k) +$$

$$+ (\ddot{\psi}_l \sin\theta_l + 2\dot{\psi}_l\dot{\theta}_l \cos\theta_l)\cos(\psi_l - \psi_k)\rangle\} = 0, \tag{78}$$

$$\{\ddot{\theta}_1 + [(n_1 - \dot{\psi}_1 \cos\theta_1)\dot{\psi}_1 + \mu_1]\sin\theta_1\} B^1 - s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q [c^q (\cos\theta_q)^{\cdot\cdot} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q-1} s^l (\cos\theta_l)^{\cdot\cdot}]\sin\theta_1 - s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q \{c^q \langle(\ddot{\psi}_q \sin\theta_q +$$

$$+ 2\dot{\psi}_q\dot{\theta}_q \cos\theta_q)\sin(\psi_q - \psi_1) - [(\sin\theta_q)^{\cdot\cdot} - \dot{\psi}_q^2 \sin\theta_q]\cos(\psi_q - \psi_1)\rangle +$$

$$+\sum_{l=1}^{q-1} s^l \langle(\ddot\psi_l \sin\theta_l + 2\dot\psi_l\dot\theta_l \cos\theta_l)\sin(\psi_l-\psi_1) - [(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot\psi_l^2 \sin\theta_l]\cos(\psi_l-\psi_1)\rangle\}\cos\theta_1 = 0,$$

$$[\ddot\psi_1 \sin\theta_1 + (2\dot\psi_1 \cos\theta_1 - n_1)\dot\theta_1] B^1 + s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q \{c^q \langle[(\sin\theta_q)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot\psi_q^2 \sin\theta_q]\sin(\psi_q-\psi_1) + (\ddot\psi_q \sin\theta_q + 2\dot\psi_q\dot\theta_q \cos\theta_q)\cos(\psi_q-\psi_1)\rangle +$$

$$+\sum_{l=1}^{q-1} s^l \langle[(\sin\theta_l)^{\cdot\cdot} - \dot\psi_l^2 \sin\theta_l]\sin(\psi_l-\psi_1) + (\ddot\psi_l \sin\theta_l +$$

$$+2\dot\psi_l\dot\theta_l \cos\theta_l)\cos(\psi_l-\psi_1)\rangle\} = 0.$$

Система $2n$ уравнений (78) определяет зависимость от времени $2n$ функций $\theta_k(t)$, $\psi_k(t)$.

Первые интегралы уравнений (78). Момент количества движения рассматриваемой системы гироскопов Лагранжа относительно вертикали, проходящей через точку O^1, постоянен. Этот интеграл запишем, воспользовавшись выражением (45):

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\left\{\sum_{p=1}^{n}(\mathbf{A}^p\cdot\boldsymbol{\omega}^p + \boldsymbol{\lambda}^p) + \sum_{p=2}^{n} m^p\left[\left(\mathbf{c}^p + \sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\right)\times\sum_{l=1}^{p-1}(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{q=1}^{p-1}\mathbf{s}^q\times(\boldsymbol{\omega}^p\times\mathbf{c}^p)\right]\right\} = k, \tag{79}$$

где k — постоянная интегрирования.

Полученное из (62), (61) значение

$$\boldsymbol{\omega}^l\times\mathbf{s}^l = (-\mathbf{e}_*^l\dot\theta_l + \mathbf{e}^l\dot\psi_l \sin\theta_l)\, s^l \tag{80}$$

вместе с (65), (70), (61) вносим в (79):

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\left\{\sum_{p=1}^{n}(\mathbf{э}^p n_p + \mathbf{e}^p\dot\theta_p + \mathbf{e}_*^p\dot\psi_p \sin\theta_p) B^p +\right.$$

$$+\sum_{p=2}^{n} m^p\left[c^p\sum_{l=1}^{p-1} s^l(\mathbf{e}_*^l\times\mathbf{э}^p\dot\theta_l + \mathbf{э}^p\times\mathbf{e}^l\dot\psi_l \sin\theta_l) +\right.$$

$$+\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1} s^q s^l(\mathbf{e}_*^l\times\mathbf{э}^q\dot\theta_l + \mathbf{э}^q\times\mathbf{e}^l\dot\psi_l \sin\theta_l) +$$

$$\left.\left.+\sum_{q=1}^{p-1} s^q c^p(\mathbf{e}_*^p\times\mathbf{э}^q\dot\theta_p + \mathbf{э}^q\times\mathbf{e}^p\dot\psi_p \sin\theta_l)\right]\right\} = k. \tag{81}$$

Но вследствие (76), (77) $\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{e}_*^l\times\mathbf{э}^q) = \mathbf{e}_*^l\cdot(\mathbf{э}^q\times\boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{e}_*^l\cdot\mathbf{e}^q\sin\theta_q = \boldsymbol{\nu}^l\cdot\mathbf{e}^q\cos\theta_l\times$ $\times\sin\theta_q = \cos\theta_l\sin\theta_q\sin(\psi_l-\psi_q)$, $\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{э}^q\times\mathbf{e}^l) = \mathbf{e}^l\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{э}^q) = \mathbf{e}^l\cdot\mathbf{e}^q\sin\theta_q =$ $= \sin\theta_q\cos(\psi_l-\psi_q)$, и для интеграла (81) получаем такое выражение:

$$\sum_{p=1}^{n}(n_p\cos\theta_p + \dot\psi_p\sin^2\theta_p) B^p + \sum_{p=2}^{n} m^p\left\{c^p\sum_{l=1}^{p-1} s^l[\dot\theta_l\cos\theta_l\sin(\psi_l-\psi_p) +\right.$$

$$+\dot\psi_l\sin\theta_l\cos(\psi_l-\psi_p)]\sin\theta_p+\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}s^q s^l[\dot\theta_l\cos\theta_l\sin(\psi_l-\psi_q)+$$

$$+\dot\psi_l\sin\theta_l\cos(\psi_l-\psi_q)]\sin\theta_q+\sum_{q=1}^{p-1}s^q c^p[\dot\theta_p\cos\theta_p\sin(\psi_p-\psi_q)+$$

$$+\dot\psi_p\sin\theta_p\cos(\psi_p-\psi_q)]\sin\theta_q\Big\}=k. \qquad (82)$$

Интеграл энергии можно получить, указав силовую функцию действующих на систему сил тяжести и вычислив по формуле (33) кинетическую энергию каждого из гироскопов. Однако такой путь требует анализа той роли, которую оказывает гиростатический момент (31) на формирование последних слагаемых в выражении (33). Проще этот интеграл получить непосредственно из уравнений движения системы, причем для этой цели удобно обратиться к векторной записи (74) этих уравнений. Уравнение, имеющее номер k, умножим скалярно на вектор $\boldsymbol{\omega}^k$, заданный соотношением (62), и сложим полученные выражения:

$$\sum_{k=1}^{n}(\dot\theta_k\ddot\theta_k+\dot\psi_k\ddot\psi_k\sin^2\theta_k+\dot\psi_k^2\dot\theta_k\cos\theta_k\sin\theta_k+\mu_k\dot\theta_k\sin\theta_k)B^k+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}m^k c^k(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k)\cdot\sum_{l=1}^{k-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)^{\cdot}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}s^k(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k)\cdot\sum_{q=k+1}^{n}m^q\left[c^q(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathfrak{э}^q)^{\cdot}+\sum_{l=1}^{q-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)^{\cdot}\right]=0.$$

Замечая, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{q=k+1}^{n}=\sum\limits_{q=2}^{n}\sum\limits_{k=1}^{q-1}$, запишем содержащееся в последней строке равенства (83) выражение так:

$$\sum_{q=2}^{n}\sum_{k=1}^{q-1}m^q s^k(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k)\cdot\left[c^q(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathfrak{э}^q)^{\cdot}+\sum_{l=1}^{q-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)^{\cdot}\right].$$

Заменив здесь обозначения индексов q, k, l соответственно на k, l, q, представим (83) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\dot\theta_k^2+\dot\psi_k^2\sin^2\theta_k-\mu_k\cos\theta_k)B^k+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big\{m^k\Big\langle c^k\Big[(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k\cdot\sum_{l=1}^{k-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k)^{\cdot}\cdot\sum_{l=1}^{k-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)\Big]+$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}s^l s^q(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)\cdot(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathfrak{э}^q)^{\cdot}\Big\rangle\Big\}=0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}(\dot\theta_k^2+\dot\psi_k^2\sin^2\theta_k-\mu_k\cos\theta_k)B^k+\sum_{k=2}^{n}m^k\Big\{2c^k(\boldsymbol{\omega}^k\times\mathfrak{э}^k)\cdot\sum_{l=1}^{k-1}s^l(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)+$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}s^l s^q(\boldsymbol{\omega}^l\times\mathfrak{э}^l)\cdot(\boldsymbol{\omega}^q\times\mathfrak{э}^q)\Big\}=h, \qquad (84)$$

где h — постоянная интегрирования.

Из (80), (76), (77) находим

$$(\omega^l\times э^l)\cdot(\omega^q\times э^q) = (-\nu\dot\theta_l\sin\theta_l + \nu^l\dot\theta_l\cos\theta_l + \mathbf{e}^l\dot\psi_l\sin\theta_l)\cdot(-\nu\dot\theta_q\sin\theta_q +$$

$$+\nu^q\dot\theta_q\cos\theta_q + \mathbf{e}^q\dot\psi_q\sin\theta_q) = \dot\theta_l\dot\theta_q\sin\theta_l\sin\theta_q +$$

$$+(\dot\theta_l\dot\theta_q\cos\theta_l\cos\theta_q + \dot\psi_l\dot\psi_q\sin\theta_l\sin\theta_q)\cos(\psi_l-\psi_q) + (\dot\theta_l\dot\psi_q\cos\theta_l\sin\theta_q -$$

$$-\dot\theta_q\dot\psi_l\cos\theta_q\sin\theta_l)\sin(\psi_l-\psi_q)$$

и интеграл энергии (84) может быть представлен явной зависимостью от переменных θ_k, ψ_k:

$$\sum_{k=1}^{n}(\dot\theta_k^2+\dot\psi_k^2\sin^2\theta_k-\mu_k\cos\theta_k)B^k+\sum_{k=2}^{n}m^k\Bigg\{2c^k\sum_{l=1}^{k-1}s^l\,[\dot\theta_l\dot\theta_k\sin\theta_l\sin\theta_k +$$

$$+(\dot\theta_l\dot\theta_k\cos\theta_l\cos\theta_k+\dot\psi_l\dot\psi_k\sin\theta_l\sin\theta_k)\cos(\psi_l-\psi_k)+(\dot\theta_l\dot\psi_k\cos\theta_l\sin\theta_k -$$

$$-\dot\theta_k\dot\psi_l\cos\theta_k\sin\theta_l)\sin(\psi_l-\psi_k)]+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-1}s^ls^q\,[\dot\theta_l\dot\theta_q\sin\theta_l\sin\theta_q +$$

$$+(\dot\theta_l\dot\theta_q\cos\theta_l\cos\theta_q+\dot\psi_l\dot\psi_q\sin\theta_l\sin\theta_q)\cos(\psi_l-\psi_q)+(\dot\theta_l\dot\psi_q\cos\theta_l\sin\theta_q -$$

$$-\dot\theta_q\dot\psi_l\cos\theta_q\sin\theta_l)\sin(\psi_l-\psi_q)]\Bigg\} = h. \qquad (85)$$

Два гироскопа Лагранжа. В случае $n=2$ система (78) сводится к четырем уравнениям:

$$\{\ddot\theta_1+[(n_1^*-\dot\psi_1\cos\theta_1)\dot\psi_1+\mu_1^*]\sin\theta_1\}B_*^1-(\cos\theta_2)^{\cdot\cdot}\sin\theta_1 -$$

$$-\{(\ddot\psi_2\sin\theta_2+2\dot\psi_2\dot\theta_2\cos\theta_2)\sin(\psi_2-\psi_1)-[(\sin\theta_2)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot\psi_2^2\sin\theta_2]\cos(\psi_2-\psi_1)\}\cos\theta_1 = 0,$$

$$\{\ddot\theta_2+[(n_2-\dot\psi_2\cos\theta_2)\dot\psi_2+\mu_2]\sin\theta_2\}B_*^2-(\cos\theta_1)^{\cdot\cdot}\sin\theta_2 -$$

$$-\{(\ddot\psi_1\sin\theta_1+2\dot\psi_1\dot\theta_1\cos\theta_2)\sin(\psi_1-\psi_2)-[(\sin\theta_1)^{\cdot\cdot} -$$

$$-\dot\psi_1^2\sin^2\theta_1]\cos(\psi_1-\psi_2)\}\cos\theta_2 = 0, \qquad (86)$$

$$[\ddot\psi_1\sin\theta_1+(2\dot\psi_1\cos\theta_1-n_1^*)\dot\theta_1]B_*^1+[(\sin\theta_2)^{\cdot\cdot}-\dot\psi_2^2\sin\theta_2]\sin(\psi_2-\psi_1) +$$

$$+(\ddot\psi_2\sin\theta_2+2\dot\psi_2\dot\theta_2\cos\theta_2)\cos(\psi_2-\psi_1) = 0,$$

$$[\ddot\psi_2\sin\theta_2+(2\dot\psi_2\cos\theta_2-n_2)\dot\theta_2]B_*^2+[(\sin\theta_1)^{\cdot\cdot}-\dot\psi_1^2\sin\theta_1]\sin(\psi_1-\psi_2) +$$

$$+(\ddot\psi_1\sin\theta_1+2\dot\psi_1\dot\theta_1\cos\theta_1)\cos(\psi_1-\psi_2) = 0.$$

Здесь обозначено *

$$B^1_* = \frac{B^1}{m^2c^2s^1} + \frac{s^1}{c^2}, \qquad B^2_* = \frac{B^2}{m^2c^2s^1},$$
$$n^*_1 = \frac{n_1B^1}{m^2c^2s^1B^1_*}, \qquad \mu^*_1 = \frac{\mu_1B^1}{m^2c^2s^1B^1_*}. \tag{87}$$

Уравнения (86) обладают своеобразной симметрией: они допускают перестановку индексов 1, 2. Последние два уравнения системы (86) могут быть заменены интегралами (82), (85), записанными для $n = 2$:

$$(\dot\psi_1 \sin^2\theta_1 + n^*_1 \cos\theta_1) B^1_* + (\dot\psi_2 \sin^2\theta_2 + n_2 \cos\theta_2) B^2_* + (\dot\theta_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2 -$$
$$- \dot\theta_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1) \sin(\psi_1 - \psi_2) + (\dot\psi_1 + \dot\psi_2) \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = k_*,$$
$$(\dot\theta_1^2 + \dot\psi_1^2 \sin^2\theta_1 - \mu^*_1 \cos\theta_1) B^1_* + (\dot\theta_2^2 + \dot\psi_2^2 \sin^2\theta_2 - \mu_2 \cos\theta_2) B^2_* +$$
$$+ 2 [\dot\theta_1\dot\theta_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + (\dot\theta_1\dot\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \dot\psi_1\dot\psi_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \cos(\psi_1 - \psi_2) +$$
$$+ (\dot\theta_1\dot\psi_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - \dot\theta_2\dot\psi_1 \cos\theta_2 \sin\theta_1) \sin(\psi_1 - \psi_2)] = h_*.$$

Регулярные прецессии. В задаче о движении одного твердого тела, имеющего неподвижную точку хорошо известны движения, называемые регулярными прецессиями. В таком движении остаются постоянными угол нутации θ и скорость изменения угла прецессии $\dot\psi$. Нетрудно указать условия, при выполнении которых рассматриваемая система гироскопов Лагранжа совершает регулярную прецессию. Пусть $\theta_k=\mathrm{const}$ и $\dot\psi_k=\mathrm{const}$. Последнюю постоянную полагаем одинаковой для всех тел: $\dot\psi_k=\varkappa$. Более того, потребуем, чтобы оси всех гироскопов при движении оставались в одной вертикальной плоскости — для любых номеров k и l углы ψ_k и ψ_l либо равны, либо отличаются на угол π, так что $\sin(\psi_k - \psi_l) = 0$, а

$$\cos(\psi_k - \psi_{k-1}) = \varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_k = \psi_{k-1}, \\ -1, & \text{если } \psi_k = \psi_{k-1} \pm \pi. \end{cases}$$

Обозначим $\cos(\psi_k - \psi_l)$ через ε_{kl}. Легко видеть, что $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\ldots$ $\ldots\varepsilon_{l+1}$ $(k > l)$. При этих условиях уравнения (78) сводятся к соотношениям

$$[(n_n - \varkappa\cos\theta_n)\varkappa + \mu_n] B^n \sin\theta_n = m^n c^n \varkappa^2 \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_{nl} s^l \sin\theta_l \cos\theta_n,$$
$$[(n_k - \varkappa\cos\theta_k)\varkappa + \mu_k] B^k \sin\theta_k = \varkappa^2 \left[m^k c^k \sum_{l=1}^{k-1} \varepsilon_{kl} s^l \sin\theta_l + \right.$$
$$\left. + s^k \sum_{q=k+1}^{n} m^q \left(\varepsilon_{qk} c^q \sin\theta_q + \sum_{l=1}^{q-1} \varepsilon_{kl} s^l \sin\theta_l \right) \right] \cos\theta_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

---

* Случай $m^2c^2s^1=0$ тривиален, поэтому полагаем $m^2c^2s^1\neq 0$.

$$[(n_1 - \varkappa\cos\theta_1)\varkappa + \mu_1] B^1 \sin\theta_1^* = \varkappa^2 s^1 \sum_{q=2}^{n} m^q \Bigg(\varepsilon_{q1} c^q \sin\theta_q +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q-1} \varepsilon_{l1} s^l \sin\theta_l\Bigg)\cos\theta_1.$$

При заданных значениях $\varkappa$ и θ_k ($\neq 0, \pi$) эти соотношения определяют величины n_k, а вместе с ними по формулам (70), (63) — скорости собственного вращения:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{1}{A^k}(B^k n_k - \lambda^k) - \varkappa\cos\theta_k.$$

В случае двух гироскопов условия регулярной прецессии таковы:

$$\begin{aligned} &[(n_1^* - \varkappa\cos\theta_1)\varkappa + \mu_1^*] B_*^1 \sin\theta_1 = \varkappa^2 \varepsilon_{21} \sin\theta_2 \cos\theta_1, \\ &[(n_2 - \varkappa\cos\theta_2)\varkappa + \mu_2] B_*^2 \sin\theta_2 = \varkappa^2 \varepsilon_{21} \sin\theta_1 \cos\theta_2. \end{aligned} \tag{88}$$

При подстановке значений (87), (70), (72) из (88) определяются величины $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$:

$$A^1\dot{\varphi}_1 = \left(B^1 - A^1 + m^2 s^1 s^1 + \varepsilon_{21}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} m^2 c^2 s^1\right)\varkappa\cos\theta_1 - (m^1 c^1 + m^2 s^1)\frac{g}{\varkappa} - \lambda^1,$$

$$A^2\dot{\varphi}_2 = \left(B^2 - A^2 + \varepsilon_{21}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} m^2 c^2 s^1\right)\varkappa\cos\theta_2 - m^2 c^2 \frac{g}{\varkappa} - \lambda^2.$$

Значениям 1 и —1 величины ε_{21} отвечают две различные регулярные прецессии двойного гироскопа Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
2. Харламов П. В. Составной пространственный маятник. См. статью в настоящем сборнике.