УДК 517.95

В. А. Львов, Е. Я. Хруслов

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СУСПЕНЗИЙ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Проблема переноса различных примесей и взвесей в водной и воздушных средах, их влияние на химические и биологические процессы в окружающей среде стимулировали интерес к математическому описанию совместного движения большого числа мелких твердых частиц и вязкой несжимаемой жидкости (суспензии). Имеется большое число работ (см., напр., [1—3] и приведенную в них обширную библиографию), в которых на физическом уровне строгости в рамках феноменологического или микроструктурного подхода получены математические модели движения суспензий.

В строгой математической постановке движение суспензии описывается системой уравнений Навье—Стокса, рассматриваемой в области, дополнительной к частицам, уравнениями движения частиц (твердых тел) в вязкой жидкости и соответствующими граничными условиями. Ввиду большого числа частиц единственно возможным оказывается осредненное описание такой системы. Рассматриваемые ниже осредненные уравнения движения суспензии получены методами теории краевых частиц в областях с мелкозернистой границей [4—6]. Будем предполагать, что все частицы имеют одинаковую форму, являясь осесимметричными телами, ориентация которых однозначно определяется единичным вектором $\vec{\lambda}$, направленным по оси симметрии частицы.

В зависимости от соотношений между основными параметрами суспензии (ρ_0, ρ_1 — удельными плотностями несущей жидкости и материала частиц; r — средним расстоянием между частицами; d — средним диаметром частиц; ν — вязкостью несущей жидкости; T — характерным временем) могут осуществляться два основных режима движения суспензии: режимы однофазного или двухфазного течения.

Если среднее расстояние между частицами имеет тот же порядок малости, что и диаметры d частиц ($r \sim d$), а плотности ρ_0 и ρ_1 конечны, то средние скорости частиц и несущей жидкости совпадают и движение суспензии описывается следующей системой уравнений (модель односкоростного континуума с ориентируемой подструктурой):

$$\rho\,[\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}] - 2\mu \sum_{npqr=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r}\{a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)\,\varepsilon_{np}[\vec{u}]\}\,\vec{e}^{\,q} + $$

$$+ \nabla p = \rho\vec{F} + \vec{G}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0; \tag{1}$$

$$\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\rho = 0; \tag{2}$$

$$\vec{\lambda}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{\lambda} - \frac{k}{C(\rho)}\operatorname{div}[C(\rho)\cdot\nabla\vec{\lambda}] + \beta\vec{\lambda} = \Omega[\vec{u}]\,\vec{\lambda} + $$

$$+ g_1(|\vec{\lambda}|)\,\mathrm{E}[\vec{u}]\,\vec{\lambda} - g_2(|\vec{\lambda}|)\,(\mathrm{E}[\vec{u}]\,\vec{\lambda}, \vec{\lambda})\,\vec{\lambda}, \tag{3}$$

где $\vec{u}(x, t)$ — средний вектор скорости суспензии; $p(x, t)$ — давление; $\rho(x, t)$ — средняя плотность суспензии; $\vec{\lambda}(x, t)$ — средний вектор ориентации частиц; постоянные $\mu > 0$, $k > 0$, $\beta \geqslant 0$, функции $g_i(|\vec{\lambda}|)$ $(i = 1, 2)$, $C(\rho)$, $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$ $(n, p, q, r = 1, 2, 3)$ и вектор функции $\vec{F}(x, t)$, $\vec{G}(x, t)$ заданы; $\mathrm{E}[\vec{u}]$ и $\Omega[\vec{u}]$ — симметрическая и соответственно антисимметрическая часть тензора градиента скорости, т. е.

$$\{\mathrm{E}[\vec{u}]\}_{i,k=1}^{3} = \varepsilon_{ik}[\vec{u}] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

$$\{\Omega[\vec{u}]\}_{i,k=1}^{3} = \omega_{ik}(\vec{u}] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Здесь $C(\rho)$ описывает зависимость концентрации частиц в несущей жидкости от средней плотности суспензии $\rho(x, t)$, а $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$ — зависимость тензора вязкости суспензии от ρ и среднего вектора ориентации осесимметричных частиц $\vec{\lambda}(x, t)$ $(|\vec{\lambda}(x, t)| \leqslant 1)$.

Если среднее расстояние между частицами много больше диаметров частиц ($d \sim r^3$) и плотность материала частиц велика ($\rho_1 \ll \rho_0$) (так что безразмерный параметр $\frac{\rho_0\nu}{\rho_1 d^2}\,T \sim 1$), то средние скорости частиц и несущей жидкости различны и движение суспензии описывается следующей системой уравнений (двухжидкостная модель суспензии с ориентируемой подструктурой твердой фазы):

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + [\beta_0(\vec{u} - \vec{v}) + \beta_1(\vec{u} - \vec{v}, \vec{\lambda})\,\vec{\lambda}]\,C + \nabla p = \vec{f}_{ж}(x, t),$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0; \tag{4}$$

$$C_t + \operatorname{div} (C \cdot \vec{v}) = 0; \tag{5}$$

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - [\beta_0 (\vec{u} - \vec{v}) + \beta_1 (\vec{u} - \vec{v}, \vec{\lambda}) \vec{\lambda}] = \vec{f}_ч (x, t); \tag{6}$$

$$\vec{\lambda}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\lambda} - \vec{\theta} \times \vec{\lambda} = 0; \tag{7}$$

$$\vec{\theta}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\theta} - \gamma_1 (\operatorname{rot} \vec{u} - 2\vec{\theta}) - \gamma_2 (\operatorname{rot} \vec{u} - 2\vec{\theta}, \vec{\lambda}) \vec{\lambda} -$$

$$- \gamma_3 (\vec{\lambda} \times \mathbf{E} [\vec{u}] \vec{\lambda}) - \gamma_4 (\vec{\theta} \times \vec{\lambda}) (\vec{\theta}, \vec{\lambda}) = \gamma_5 \vec{M}_ч + \gamma_6 (\vec{M}_ч, \vec{\lambda}) \vec{\lambda}, \tag{8}$$

где $\vec{u}$ (x, t) — средний вектор скорости несущей жидкости; p (x, t) — давление; $\vec{v}$ (x, t) — средний вектор скорости «жидкости частиц»; C (x, t) — средняя объемная концентрация «жидкости частиц»; $\vec{\lambda}$ (x, t) — средний вектор ориентации частиц; $\vec{\theta}$ (x, t) — средний вектор угловой скорости частиц; коэффициенты $\nu > 0$, β_0, β_1, γ_i $(i = 1, \ldots, 6)$ известны и определяются через основные параметры суспензии и форму частиц; вектор-функции $\vec{f}_ж (x, t)$, $\vec{f}_ч (x, t)$, $\vec{M}_ч (x, t)$ — внешние силы и момент, действующие на несущую жидкость и «жидкость частиц», считаются заданными. Заметим, что вектор-функции $\vec{v}$, $\vec{\lambda}$ и $\vec{\theta}$ имеют физический смысл лишь на носителе функции $C(x, t)$, где и определены уравнения (6) — (8).

Вывод систем уравнений (1)—(3) и (4)—(8) здесь не приводится ввиду громоздкости. Цель настоящей работы состоит в изучении вопроса разрешимости приведенных выше систем уравнений.

1. Установим глобальную разрешимость для системы уравнений (1)—(3) в классах функций, являющихся обобщением классов Хопфа для уравнений Навье—Стокса.

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbf{R}_3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ начально-краевую задачу для системы уравнений (1)—(3), дополненную следующими условиями:

$$\vec{u} (x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \equiv S_T, \quad \vec{u} (x, 0) = \vec{u}^0 (x); \tag{9}$$

$$\vec{\lambda} (x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T, \quad \vec{\lambda} (x, 0) = \vec{\lambda}^0 (x); \tag{10}$$

$$\rho (x, 0) = \rho^0 (x). \tag{11}$$

Назовем обобщенным решением задачи (1) — (3), (9) — (11) набор функций $\{\vec{u} (t), \rho (t), \vec{\lambda} (t)\}$, принадлежащих пространствам:

$$\vec{u} (t) \in L_\infty (0, T, \overset{0}{J} (\Omega)) \cap L_2 (0, T; \overset{0}{J^1} (\Omega));$$

$$\rho (t) \in L_\infty (0, T; L_\infty (\Omega));$$

$$\vec{\lambda} (t) \in L_\infty (0, T; L_\infty (\Omega)) \cap L_2 (0, T; \overset{0}{W}{}^1_2 (\Omega)), \quad | \vec{\lambda} (x, t) | \leqslant 1,$$

и удовлетворяющих интегральным тождествам

$$\int_0^T \Big\{ \int_\Omega \rho \vec{u}, \vec{\xi}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\xi}) \, dx - 2\mu \int_\Omega \sum_{npqr=1}^{3} a_{npqr} (\vec{\lambda}, \rho) \frac{\partial u_n}{\partial x_p} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_r} dx +$$

$$+ \int_\Omega (\rho \vec{F} + \vec{G}, \vec{\xi}) \, dx \Big\} \, dt + \int_\Omega (\rho^0 \vec{u}^0, \vec{\xi} (0)) \, dx = 0; \tag{12}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \rho (\eta_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \eta) \, dx dt + \int_\Omega \rho^0 \eta (0) \, dx = 0; \tag{13}$$

$$\int_0^T \Big\{ \int_\Omega (C(\rho)\,\vec{\lambda}, \vec{\zeta}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{\zeta})\,dx - k\int_\Omega C(\rho)\,(\nabla\vec{\lambda}, \nabla\vec{\zeta})\,dx -$$

$$-\beta\int_\Omega C(\rho)\,(\vec{\lambda}, \vec{\zeta})\,dx + \int_\Omega g_1(|\vec{\lambda}|)\,C(\rho)\sum_{np=1}^{3} \varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\zeta_n dx -$$

$$-\int_\Omega g_2(|\vec{\lambda}|)\,C(\rho)\sum_{np=1}^{3}\varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\lambda_n\,(\vec{\lambda}, \vec{\zeta})\,dx\Big\}\,dt + \int_\Omega C(\rho^0)\,(\vec{\lambda}^0, \vec{\zeta}(0))\,dx = 0; \quad (14)$$

для любых $\vec{\xi}(t) \in C^1(0, T; \overset{0}{J^1}(\Omega))$, $\eta(t) \in C^1(0, T; W_2^1(\Omega))$, $\vec{\zeta}(t) \in C^1(0, T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ таких, что $\vec{\xi}(T) = \eta(T) = \vec{\zeta}(T) = 0$.

Будем предполагать, что $C(\rho)$ и $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$ $(n, p, q, r = 1, 2, 3)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов $(\rho > 0,\ |\vec{\lambda}| \leqslant 1)$ с производными, удовлетворяющими условию Гельдера, причем $C(\rho) \geqslant \alpha_0|\rho - \rho_0|$ $(\alpha_0 > 0)$,

$$\sum_{npqr=1}^{3} a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)\,R_{np}R_{qr} \geqslant a_0 \sum_{np=1}^{3} R_{np}^2, \quad a_0 > 0,$$

где R_{np} — элементы произвольной симметричной матрицы. Предположим также, что функции g_i $(i = 1, 2)$ на отрезке $[0, 1]$, где они определены, представимы в виде $g_i(|\vec{\lambda}|) = \gamma + \tilde{g}_i(|\vec{\lambda}|)(1 - |\vec{\lambda}|)$, где γ — const, а $\tilde{g}_i$ удовлетворяет условию Гельдера при $|\vec{\lambda}| \leqslant 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\vec{F}(x, t)$, $\vec{G}(x, t) \in L_{2,1}(\Omega_T)$; $\vec{u}^0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$; $0 < m \leqslant \rho^0(x) \leqslant M < \infty$, причем либо $m > \rho_0$, либо $\rho_0 > M$; $\vec{\lambda}^0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $|\vec{\lambda}^0(x)| \leqslant 1$. Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение начально-краевой задачи (1) — (3), (9) — (11).

Наметим схему доказательства, которое проводится в несколько этапов. Сначала для исходной задачи методом Галеркина строится приближенное решение и получаются необходимые априорные оценки. Затем устанавливается компактность полученных приближенных решений, что позволяет произвести в интегральных тождествах (12)—(14) предельный переход и тем самым доказать теорему 1.

2. Рассмотрим частный случай системы (5) — (8), описывающей в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ $(\Omega \subset R_3)$ движение суспензии тяжелых частиц сферической формы $(\beta_1 \equiv 0)$:

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} - \nu\nabla\vec{u} + \beta_0 C\,(\vec{u} - \vec{v}) + \nabla p = \vec{f}_ж(x, t), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0; \quad (15)$$

$$C_t + \operatorname{div}(C\cdot\vec{v}) = 0; \quad (16)$$

$$\vec{v}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} - \beta_0\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{f}_ч(x, t). \quad (17)$$

Уравнение (16) гиперболического типа и определено на носителе функции $C(x, t)$. Поэтому общая постановка начально-краевой задачи для системы уравнений (15)—(17) затруднительна. Рассмотрим здесь лишь частный случай движения суспензии, когда частицы образуют облако, находящееся на некотором удалении от границы области Ω (supp $C(x, t) \Subset \Omega_T$). Дополним для этого случая систему (15) — (17) начальными и краевыми условиями:

$$\vec{u}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad \vec{u}(x, 0) = \vec{u}^0(x); \quad (18)$$

$$C(x, 0) = C^0(x) \quad (\operatorname{supp} C^0(x) \Subset \Omega); \quad (19)$$

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}^0(x). \tag{20}$$

Будем предполагать, что носитель функции $C^0(x)$ находится на расстоянии r_0 от $\partial\Omega$.

Рассмотрим вопрос об однозначной разрешимости начально-краевой задачи (15)—(20) в непрерывных по Гельдеру неизотропных классах функций в предположении, что T достаточно мало либо малы соответствующие нормы начальных данных и правых частей.

Поскольку вектор скорости частиц $\vec{v}(x, t)$ имеет физический смысл лишь на носителе функции $C(x, t)$, то удобно считать, что $\vec{v}(x, t)$ определен всюду в Ω_T и удовлетворяет там уравнению (17). Однако единственность $\vec{v}(x, t)$ имеет место только на носителе функции $C(x, t)$ (однозначна функция $C \cdot \vec{v}$).

Для формулировки основного результата введем пространства $H^{\alpha}(\Omega_T)$, $H^{1+\alpha}(\Omega_T)$, $H^{2+\alpha}(\Omega_T)$ вектор-функций, $\alpha \in (0, 1)$, заданных в Ω_T и имеющих конечные нормы

$$|\vec{u}|^{(\alpha)}_{\Omega_T} = \sup_{\Omega_T} |\vec{u}(x, t)| + |\vec{u}|^{(\alpha)}_{\Omega_T};$$

$$|\vec{u}|^{(1+\alpha)}_{\Omega_T} = \sup_{t \leqslant T} |\vec{u}|^{(1+\alpha)}_{\Omega} + \sup_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{3} \frac{|\vec{u}_{x_i}(x, t) - \vec{u}_{x_i}(x, t')|}{|t - t'|^{\alpha/2}} + \sup_{\Omega_T} \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x, t')|}{|t - t'|^{\frac{1+\alpha}{2}}};$$

$$|\vec{u}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T} = \sum_{|\mu| \leqslant 2} \sup_{\Omega_T} |D^{\mu}_x \vec{u}(x, t)| + \sup_{\Omega_T} |D_t \vec{u}(x, t)| + \sum_{\mu=2} [D^{\mu}_x \vec{u}]^{(\alpha)}_{\Omega_T} + [D_t \vec{u}]^{(\alpha)}_{\Omega_T},$$

где

$$[\vec{u}]^{(\alpha)}_{\Omega_T} = \sup_{\Omega_T} \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x', t)|}{|x - x'|^{\alpha}} + \sup_{\Omega_T} \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x, t')|}{|t - t'|^{\alpha/2}};$$

$$|\vec{u}|^{(k+\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\mu| \leqslant k} \sup |D^{\mu}_x \vec{u}(x)| + \sum_{|\mu| = k} \frac{|D^{\mu}_x \vec{u}(x) - D^{\mu}_x \vec{u}(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} \quad (k = 0, 1, 2);$$

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\Big)^{1/2}; \qquad |\vec{u}(x, t)| = \Big(\sum_{i=1}^{3} u_i^2(x, t)\Big)^{1/2}.$$

Аналогично вводятся пространства $H^{k+\alpha}(\Omega)$ $(k = 0, 1, 2)$ вектор-функций, заданных в Ω.

Обозначим через $\overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega)$, $\overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega_T)$ подпространства вектор-функций из $H^{\alpha}(\Omega)$, $H^{\alpha}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям $(\vec{u}, \vec{n}) = 0$, $x \in \partial\Omega$ и $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ (в обобщенном смысле); P_J — оператор проектирования на $\overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega_T)$ $(\overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega))$; r_0 — расстояние от $\operatorname{supp} C^0(x)$ до $\partial\Omega$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть при некотором $\alpha \in (0, 1)$ $\vec{f}_{ж}(x, t) \in \overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega_T)$, $\vec{u}^0(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega) \cap \overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega)$, $\vec{f}_{ч}(x, t) \in H^{2+\alpha}(\Omega_T)$, $\vec{v}^0(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega)$, $C^0(x) \in H^{1+\alpha}(\Omega)$, кроме того, $C^0(x)$ — финитна в Ω и выполняются условия согласования

$$[\vec{f}_{ж}(x, 0) + P_J(\nu \Delta \vec{u}^0 - (\vec{u}^0 \cdot \nabla) \vec{u}^0 + \beta C^0 (\vec{u}^0 - \vec{v}^0)]_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда при некотором достаточно малом

$$T = T\left(|\vec{f}_{ж}|^{(\alpha)}_{\Omega_T}, |\vec{f}_{ч}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T}, |\vec{u}^0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}, |C^0|^{(1+\alpha)}_{\Omega}, |\vec{v}^0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}, r_0\right)$$

начально-краевая задача (15) — (20) имеет единственное решение (для $p(x, t)$ — с точностью до произвольной постоянной)

$$\vec{u}(x, t), \quad \vec{v}(x, t) \in H^{2+\alpha}(\Omega_T),$$

$$\rho(x, t), \quad p(x, t) \in H^{1+\alpha}(\Omega_T).$$

Замечание. Однозначная разрешимость задачи (15) — (20) в указанных классах функций имеет место также при любом конечном T, если нормы $|\vec{f}_{ж}|^{(\alpha)}_{\Omega_T}$, $|\vec{f}_{ч}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T}$, $|\vec{u}^0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}$ $|C^0|^{(1+\alpha)}_{\Omega}$, $|\vec{v}^0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}$ и число r_0 достаточно малы.

Укажем лишь схему доказательства этой теоремы. Сначала, при заданной вектор-функции $\vec{u}$ (соответственно $\vec{v}$), устанавливаем разрешимость задачи (17), (20) (соответственно задачи (16), (19) и получаем необходимые оценки для решений этих задач. Затем, используя априорные оценки В. А. Солонникова для решений нестационарной системы Навье—Стокса [7] и применяя к системе (15)—(17) метод последовательных приближений, устанавливаем существование решения задачи (15)—(20). Единственность полученного решения доказывается обычным образом.

1. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем.— М. : Мир, 1971.— 535 с.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М. : Наука, 1976.— 336 с.
3. *Гидродинамическое* взаимодействие частиц в суспензиях.— М. : Мир, 1980.— 243 с.
4. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— Киев : Наук. думка, 1974.— 278 с.
5. *Львов В. А.* Об одной математической задаче механики суспензий.— Вестн. Харьк. ун-та.— 1985.— № 277.— С. 13—27.
6. *Львов В. А., Хруслов Е. Я.* О возмущении вязкой несжимаемой жидкости мелкими частицами // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры.— Киев : Наук. думка, 1978.— С. 173—177.
7. *Солонников В. А.* Оценки решений нестационарной системы Навье—Стокса // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.— Л. : Наука, 1973.— С. 153—231.

Физ.-техн. ин-т низк. температур
АН УССР, Харьков

Получено 23.09.87