УДК 517.95

М. И. Матийчук

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ И ЗАДАЧА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Получены необходимые и достаточные условия оптимизации объемных и поверхностных интегралов на решениях краевой задачи для вырождающихся параболических уравнений второго порядка. Также установлена разрешимость одной задачи с подвижной границей и краевыми условиями Стефана — Больцмана.

Задача оптимального управления для уравнений с частными производными со специальными критериями качества изучались в монографиях [1—4] и других работах. Здесь рассматриваются задача оптимизации объемных и поверхностных интегралов на решениях вырождающихся параболических уравнений, а также одна задача с подвижной границей и краевыми условиями Стефана — Больцмана.

Задача минимизации объемных и поверхностных интегралов. В цилиндрической области $Q = (0, T) \times \Omega^+$, $\Omega^+ = \Omega \times (0, \infty)$ рассмотрим задачу нахождения пары функций (u, p), доставляющих минимум объемному функционалу

$$\mathcal{J}_1(p) = \int_0^T dt \int_{\Omega^+} F_1(t, x, u, u_{x'}, p)\, x_n^{\nu} dx \qquad (1)$$

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1990. Вып. 2.

на классическом решении сингулярной краевой задачи

$$L(D)u \equiv D_t u - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x) D^2_{x_i x_j} u - a(t,x) B_{x_n} u -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,x) D_{x_i} u - a_0(t,x) u = f(t,x,p), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ D_{x_n} u|_{x_n=0} = 0, \tag{3}$$

$$\mathscr{B}u|_\Gamma \equiv \Big(\sum_{k=1}^{n-1} b_k(t,x) D_{x_k} u + b_0(t,x) u\Big)_\Gamma = g(t,x), \tag{4}$$

или задачу минимизации на этом решении поверхностного интеграла

$$\mathcal{J}_2(p) = \int_0^T dt \int_{S+} F_2(t,x,u) x_n^\nu ds + \int_0^T dt \int_{\Omega+} \Phi(t,x,p) x_n^\nu dx. \tag{5}$$

Здесь $S+ = S \times (0, \infty)$; $\Gamma = (0, T) \times S+$; S — граница компактной области Ω в E_{n-1},

$$B_{x_n} = D^2_{x_n} + \nu x_n^{-1} D_{x_n},$$

$p(t,x)$ из класса кусочно-гельдеровых функций.

Предположим, что для задачи (1) — (5) выполнены следующие условия:

1) $a_{ij} \in C^{2+\alpha}(Q)$, $a_i \in C^{1+\alpha}(Q)$, $a_0 \in C^\alpha(Q)$, $a \in C_B^{1+\alpha}(Q)$, $b_k \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$ и уравнение (2) равномерно $\mathscr{B}$-параболическое, поверхность $S \subset C^{2+\alpha}$;

2) функции $\varphi \in C^{2+\alpha}(Q)$, $g \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\mathscr{B}\varphi|_S = g(0,x)$, $f(t,x,p)$, $F_1(t,x,u,u_{x'},p)$, $F_2(t,x,u)$, $\Phi(t,x,p)$ определены по t, x в Q^+ и имеют вторые производные по $(u, u_{x'}, p)$ гельдеровы как функции (t, x).

При этих предположениях на коэффициенты уравнения и краевого оператора и границу области решение задачи (2)—(4) определяются с помощью функции Грина (G_1, G_2):

$$u(t,x,p) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega+} G_1(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi,p) \xi_n^\nu d\xi + \int_{\Omega+} G_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^\nu d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{S+} G_2(t,\tau,x,\xi) g(\tau,\xi) \xi_n^\nu ds, \tag{6}$$

оно принадлежит классу $C^{2+\alpha}(Q)$, а краевая задача имеет сопряженную задачу

$$L^*(\mathscr{D}) v = f^*, \ v|_{t=T} = 0, \ \mathscr{B}_\lambda v|_\Gamma = \Big(a^{(\lambda)} \frac{dv}{d\vec{\lambda}} + b_0^* v\Big)_\Gamma = g^*,$$

$$f^* = \mathscr{D}_u F_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathscr{D}_{x_i} F'_{1u_{x_i}}(t,x,u,u_{x'},p), \tag{7}$$

$$g^* = -\sum_{i=1}^{n-1} F'_{1u_{x_i}} \cos(n, x_i)|_\Gamma.$$

Для $u, v \in C_B^2(Q) \cup C^1(\Gamma)$ справедлива формула Грина

$$\int_0^T dt \int_{\Omega+} [vLu - uL^*v] x_n^\nu dx = \int_0^T dt \int_{S+} [v\mathscr{B}u - u\mathscr{B}_\lambda v] x_n^\nu ds - \int_{\Omega+} uv|_{t=0}^{t=T} x_n^\nu dx, \tag{8}$$

где $a^{(\lambda)}$, b_0^*, $\vec{\lambda}$ определены в [8].

Теперь сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности управления $p(t, x)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2). Для того чтобы управление $p^0(t, x)$ и соответствующее ему решение $u^0(t, x, p)$ краевой задачи (2)—(4) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы функция Лагранжа

$$H_1(u^0, u^0_{x'}, v, p) = F_1(t, x, u^0, u^0_{x'}, p) + v(t, x) f(t, x, p)$$

принимала по аргументу p в точке p^0 минимальное значение и второй ее дифференциал

$$K(t, x, \xi) = \sum_{i,j=0}^{n} \mathcal{D}^2_{y_i y_j} F_1(t, x, y^0)\, \xi_i \xi_j + \mathcal{D}^2_{pp} f(t, x, p^0)\, v(t, x)\, \xi_{n+1} > 0 \qquad (9)$$

для $(t, x) \in \overline{Q}$, $(\xi_0, \ldots, \xi_{n+1}) \neq 0$, $y = (u, u_{x'}, p)$, где $v(t, x)$ — решение сопряженной задачи (7).

Если F_1 не зависит от $u_{x'}$, то положительность второго дифференциала H_1 заменяется неравенствами

$$\mathcal{D}^2_{uu} F_1(t, x, u^0, p^0) > 0, \ \mathcal{D}^2_{up} F_1(t, x, u^0, p^0)\, \mathcal{D}_p f(t, x, p^0) > 0.$$

Приведем схему доказательства теоремы. Для доказательства достаточности нужно показать, что при выполнении условий теоремы $p^0(t, x)$ реализует минимум функционала (1).

Дадим $p^0(t, x)$ допустимое приращение $\Delta p(t, x)$ и обозначим через Δu соответствующее ему приращение $u^0(t, x, p^0)$. Тогда Δu является решением краевой задачи

$$L(\mathcal{D})\, \Delta u = \Delta_p f(t, x, p^0), \ \Delta u\,|_{t=0} = 0, \mathcal{B} \Delta T\,|_{\Gamma} = 0. \qquad (10)$$

С помощью формулы Тейлора найдем приращение функционала $\mathcal{I}_1(p)$:

$$\Delta \mathcal{I}_1(p^0) = \int_0^T dt \int_{\Omega^+} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \mathcal{D}_{y_i} F_1(t, x, y^0)\, \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n} (\mathcal{D}^2_{y_i y_j} F_1(t, x, y^0)\, \Delta y_i \Delta y_j + \varepsilon_{ij} \Delta y_i \Delta y_j) \Big\}\, dx, \qquad (11)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{D}^2_{y_i y_j} F_1(t, x, \tilde{y}) - \mathcal{D}^2_{y_i y_j} F_1(t, x, y^0), \quad \tilde{y}_i \in (y_i, y_i + \Delta y_i).$$

Из формулы Грина (8) с учетом того, что $u = u^0(t, x)$, $p = p^0$ и $v(t, x)$ — решение сопряженной задачи, получим

$$\int_0^T dt \int_{\Omega^+} \Delta_p f(t, x, p^0)\, v(t, x)\, x_n^{\nu} dx = \int_0^T dt \int_{\Omega^+} f^*(t, x, y^0)\, \Delta u x_n^{\nu} dx - \int_0^T dt \int_{S^+} g^*(t, x, y^0)\, x_n^{\nu} \Delta u ds. \qquad (12)$$

Применим в (11) формулу Остроградского к слагаемым $\mathcal{D}_{u_{x_i}} F_1(t, x, y^0) \times \Delta u_{x_i}$. Тогда, используя (12), $\Delta \mathcal{I}_1(p^0)$ представим в виде

$$\Delta \mathcal{I}_1(p^0) = \int_0^T dt \int_{\Omega^+} \{ \mathcal{D}_p H_1(u^0, u^0_{x'}, v, p^0)\, \Delta p + \frac{1}{2} K(t, x, \Delta y) + K^*(t, x, \Delta y) \}\, x_n^{\nu} dx,$$

$$K^*(t, x, \Delta y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \varepsilon_{ij} \Delta y_i \Delta y_j + \frac{1}{2} v(t, x)\, [\mathcal{D}^2_{pp} f(t, x, \tilde{p}) - \mathcal{D}^2_{pp} f(t, x, p^0)]\, (\Delta p)^2.$$

По условию теоремы $\mathcal{D}_p H_1(u^0, u_x^0, v, p^0) = 0$ и квадратическая форма $K(t, x, \Delta y)$ строго положительно определенная, поэтому существует функция $\delta(t, x) > 0$ такая, что $K(t, x, \Delta y) \geqslant \delta |\Delta y|^2$. Используя условия гельдеровости вторых производных функций $F_1(t, x, u, u_x, p)$ и $f(t, x, p)$, находим $|K^*(t, x, \Delta y)| \leqslant \frac{1}{2} G_0 |\Delta y|^{2+\alpha}$. На основании последних двух неравенств заключаем, что

$$\Delta \mathcal{J}_1(p^0) \geqslant 2^{-1} \int_0^T dt \int_{\Omega+} [\delta(t, x) - c_0 |\Delta y|^\alpha] |\Delta y|^2 x_n^\nu dx.$$

В силу формулы (6) $\Delta y(t, x) \to 0$ при $\Delta p \to 0$, поэтому при достаточно малых Δp, таких, что $|\Delta y| < (2^{-1} c_0^{-1} \delta)^{1/2}$, приходим к неравенству

$$\Delta \mathcal{J}_1(p^0) \geqslant y^{-1} \int_0^T dt \int_{\Omega+} \delta(t, x) |\Delta y|^2 x_n^\nu dx > 0. \tag{13}$$

Последнее неравенство означает, что p^0 — точка минимума $\mathcal{J}_1(p)$. Доказательство необходимости состоит в проверке условия

$$\mathcal{D}_p H_1(u^0, u_{x'}^0, v, p^0) = 0$$

и (9), если выполнено (13). Это делается аналогично [9].

Теперь объясним, как устанавливается существование (p^0, u^0, v). Из условий оптимальности $\mathcal{D}_p H_1(u^0, u_{x'}^0, v, p^0) = 0$, $\mathcal{D}_{pp}^2 H_1(u^0, u_{x'}^0, v, p^0) > 0$ на основании теоремы о неявных функциях можно искать дифференцируемую функцию $p^0 = w(u^0, u_{x'}^0, v)$. Подставим $p^0 = w$ в задачу (2) — (4) и (7) и с помощью функций Грина (G_1, G_2) и (G_1^*, G_2^*) этих задач поставим в соответствие им систему интегральных уравнений

$$u^0(t, x) = G_1 * \varphi + G_2 ** g + \int_0^t d\tau \int_{\Omega+} G_1(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi, w(u^0, u_{x'}^0, v)) \xi_n^\nu d\xi,$$

$$\mathcal{D}_{x_i} u^0(t, x) = \mathcal{D}_{x_i}(G_1 * \varphi + G_2 ** g) + \int_0^t d\tau \int_{\Omega+} \mathcal{D}_{x_i} G_1 f(\tau, \xi, w(\ldots)) \xi_n^\nu d\xi$$

$$(i = \overline{1, n-1});$$

$$v(t, x) = \int_t^T d\tau \int_{\Omega+} G_1^*(T - t, \tau - t, x, \xi) D_u F_1(\tau - t, \xi, u^0, u_{\xi'}^0, w) \xi_n^\nu d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_t^T d\tau \int_{\Omega+} \mathcal{D}_{\xi_i} G_1^*(T - t, \tau - t, x, \xi) \mathcal{D}_{u_{\xi_i}} F_1(\tau - t, u^0, u_{\xi'}^0, w) \xi_n^\nu d\xi -$$

$$- \int_t^T d\tau \int_{S+} G_1^*(T - \tau, \tau - t, x, \xi) \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_{u_{\xi_i}} F_1(\tau - t, \xi, u^0, u_{\xi'}^0,$$

$$w(u^0, u_{\xi'}^0, v)) \times \cos(n, \xi_i) \xi_n^\nu ds + \int_t^T d\tau \int_{S+} G_1^*(T - \tau, \tau - t, x, \xi) \times$$

$$\times g^*(\tau - t, \xi, u^0, u_{\xi'}^0, w(u^0, u_{\xi'}^0, v)) \xi_n^\nu ds,$$

где $G * \varphi = \int_\Omega G(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) \xi_n^\nu d\xi$.

Ее решение находится методом последовательных приближений с использованием свойств функции Грина.

Для задачи (2)—(5) имеет место

Теорема 2. Если выполнены условия 1), 2), $\Phi \in C_p^{2+\alpha}(E_1)$, функция $H_2(v, p) = \Phi(t, x, p) + v(t, x) f(t, x, p)$ по аргументу p достигает минимума в точке p^0 и $D_{uu}^2 F_2(t, x, u^0) > 0$, то существует единственное решение задачи (2)—(5). Функция $v(t, x)$ является решением краевой задачи

$$L^*(\mathcal{D}) v = 0, \quad v|_{t=T} = 0, \quad \mathcal{B}_\lambda v|_{\Gamma+} = \mathcal{D}_u F_2(t, x, u^0). \tag{14}$$

Для доказательства этой теоремы в формуле Грина положим $p = p^0$, $u = u^0$. Тогда с учетом соотношений (10), (14) находим

$$\int_0^T d\tau \int_{\Omega+} \Delta_p f(t, x, p^0) v x_n^\nu dx = \int_0^T d\tau \int_{S+} \mathcal{D}_u F_2 \Delta u x_n^\nu ds.$$

Используя формулу Тейлора и эту формулу, приращение запишем так:

$$\Delta\mathcal{J}_2(p^0) = \int_0^T dt \int_{\Omega+} \Delta_p H_2(v, p^0) x_n^\nu dx + \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_{S+} [\mathcal{D}_u^2 F_2 + \varepsilon_1] (\Delta u)^2 x_n^\nu ds.$$

В силу условий на $H_2(v, p)$, $\Phi(t, x, p)$ и $F_2(t, x, u)$ получаем, что $\Delta\mathcal{J}(p^0) > 0$. Как и в теореме 1, из уравнения $\mathcal{D}_p H_2(v, p^0) = 0$ определяется $p^0 = w(v)$, а (u^0, v) находятся из системы интегральных уравнений, которые эквивалентны краевым задачам (2)—(4), (14).

Об одной задаче Стефана. Совместно с А. Ф. Сусляком рассматривается двухфазная задача с подвижной границей и краевыми условиями Стефана — Больцмана:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{Q}{\xi}\frac{d\xi}{dt}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad f > 0, \tag{4}$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi(x), \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \gamma[u_2(t, 0) - u_c] + h[u_2^4(t, 0) - u_c^4], \tag{6}$$

$$u_2(t, \xi(t)) = u_1(t, \xi(t)), \tag{7}$$

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi(t)} = \lambda_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi(t)}, \tag{8}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_0}{2\xi}\exp\left\{-\frac{k}{u_1(t, \xi(t))}\right\}, \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{9}$$

где $a_1, a_2, \gamma, h, Q, \lambda_1, \lambda_2, k_0, k, \xi_0$ — положительные числа. Для определения функций $(u_1, u_2, \xi(t))$ вначале найдем решение задачи (1) — (3). С помощью фундаментального решения уравнения (1)

$$\Gamma_{a_1}(t, x) = (2\sqrt{\pi a_1 t})^{-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a_1 t}\right\} \tag{10}$$

определим функцию Грина задачи (1) — (3):

$$G_{a_1}(t, \tau, x, \xi) = \Gamma_{a_1}(t - \tau, x - \xi) - 2a_1\int_\tau^t \Gamma_{a_1}(t - \beta, l - x)\frac{\partial\Gamma_{a_1}}{\partial y} \times$$

$$\times (\beta - \tau, y - \xi)_{y=l} d\beta. \tag{11}$$

Для любой $\varphi \in C(0, l)$ решение задачи (1) — (3) определяется формулой

$$u_1(t, x) = \int_0^l G_{a_1}(t, 0, x, y)\, \varphi(y)\, dy. \tag{12}$$

Это решение непрерывно и ограничено на $[0, l]$:

$$|\mathcal{D}_x^m u_1(t, x)| \leqslant c_m t^{-\frac{m}{2}} |\varphi|_c. \tag{13}$$

Однако задача имеет и решение с особенностью в точке $t = 0,\ x = l$, а именно

$$u_1(t, x) = \int_0^l G_{a_1}(t, 0, x, y)\, \varphi(y)\, dy + A\Gamma_{a_1}(t, l - x) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \times$$

$$\times \{\Gamma_{a_1}(t, 2ml + x) + \Gamma_{a_1}(t, 2l + 2ml - x)\}, \quad A = \mathrm{const}.$$

Подставим $u_1(t, x)$ в уравнение (9) для подвижной границы. Тогда находим, что

$$\xi^2(t) = \xi_0^2 + k_0 \int_0^t \exp\left\{-\frac{k}{u_1(\tau, \xi(\tau))}\right\} d\tau, \tag{14}$$

отсюда при $u_1 > 0$ следует, что

$$0 < \xi(t) \leqslant (\xi_0^2 + k_0 t)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Если $u_1 = \varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, то

$$\xi(t) = (\xi_0^2 + k_0 e^{-\frac{k}{\varphi_0}} t)^{\frac{1}{2}}.$$

В задаче (4) — (8) условия сопряжения принимают вид

$$u_2(t, \xi(t)) = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi(t)} = 0.$$

Когда $Q = 0$, то $u_2 = u_c = \varphi_0$, а такое решение интереса не представляет. В случае $Q \neq 0$ не может существовать решения задачи (4)—(7), которое зависит только от t, ибо тогда из (4), (5) находим, что $u_2(t) = Q \ln \frac{\xi(t)}{\xi_0} + \varphi_0$. Эта функция не удовлетворяет при $t > 0$ первому условию (7). Итак, нужно искать $u_2(t, x) \neq \mathrm{const}$ в предположении, что $u_1 \neq \mathrm{const}$, имея в виду интегральное уравнение (14) для подвижной границы.

Для определения решения u_2 задачи (4)—(8) по методу Л. С. Лейбензона найдем однопараметрическое семейство решений $u_2(t, x, \lambda)$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5), (6) и

$$u_2(t, \xi(\lambda)) = u_1(t, \xi(\lambda)), \tag{16}$$

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi(\lambda)} = \lambda_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi(\lambda)} \equiv \lambda_1 u_{1x}', \tag{17}$$

где $\lambda \in (0, T)$ — параметр; затем положим $u_2(t, x) = u_2(t, x, \lambda)$.

Решение уравнения теплопроводности (4) можно представить в виде суммы потенциалов [5, с. 484]:

$$u_2(t, x, \lambda) = \int_0^{\xi(\lambda)} \Gamma_{a_2}(t, x - y)\, u_2(0, y, \lambda)\, dy + \int_0^t d\tau \int_0^{\xi(\lambda)} \Gamma_{a_2}(t - \tau, x - y)\, f dy -$$

$$- a_2 \int_0^t \left[\Gamma_{a_2}(t - \tau, x - y) \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_2(\tau, y, \lambda) \frac{\partial \Gamma_{a_2}}{\partial y}\right]_{y=0} d\tau +$$

$$+ a_2 \int_0^t \left[\Gamma_{a_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_2 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{a_2} \right]_{y=\xi(\lambda)} d\tau, \tag{18}$$

$$f(t) \equiv Q\xi^{-1} \frac{d\xi}{dt}.$$

Применяя эту формулу для решения задачи (4) — (8), получаем представление

$$u_2(t, x, \lambda) = \Phi(t, x, \lambda) - a_2 \int_0^t \left[\left(\gamma\Gamma_{a_2}(t-\tau, x) - \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{a_2}(t-\tau, x-y)\,|_{y=0} \right) \times \right.$$

$$\left. \times\, u_2(\tau, 0, \lambda) + h\Gamma_{a_2}(t-\tau, x)\, u_2^4(\tau, 0, \lambda) \right] d\tau, \tag{19}$$

где $\Phi(t, x, \lambda)$ определяется по $u_1(t, x)$ формулой

$$\Phi(t, x, \lambda) = \int_0^{\xi(\lambda)} \Gamma_{a_2}(t, x-y)\,\varphi dy + \int_0^t d\tau \int_0^{\xi(\lambda)} \Gamma_{a_2}(t-\tau, x-y)\, f(\tau)\, dy +$$

$$+ a_2 \int_0^t \Gamma_{a_2}(\gamma u_c + h u_c^4)\, d\tau + a_2 \int_0^t \left[\Gamma_{a_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} u'_{1y} - u_1(\tau, y) \frac{\partial \Gamma_{a_2}}{\partial y} \right]_{y=\xi(\lambda)} d\tau.$$

Функция $u_2(t, 0, \lambda) = u_2(t, \lambda)$, с помощью которой по формуле (19) получаем решение задачи (4) — (8), удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_2(t, \lambda) = 2\Phi(t, 0, \lambda) - 2a_2 \int_0^t \frac{\gamma u_2(\tau, \lambda) + h u_2^4(\tau, \lambda)}{2\sqrt{\pi a_2 (t-\tau)}}\, d\tau. \tag{20}$$

Оценка (13) для решения $u_1(t, x)$ позволяет к интегральным уравнениям (14), (20) применить итерационные методы исследования и установить их классическую разрешимость.

1. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.— М. : Наука, 1978.— 463 с.
2. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики.— М. : Наука, 1975.— 478 с.
3. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М. : Мир, 1972.— 614 с.
4. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана.— Рига : Звайгзне, 1967.— 456 с.
5. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнение математической физики.— М. : ГИТЛ, 1953.— 679 с.
6. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Укр. мат. журн.— 1985.— 40, № 5.— С. 133—187.
7. *Леонтьев Ю. В.*, *Сусляк А. Ф.* Нелинейные краевые задачи теплопроводности.— Киев, 1982.— 35 с. (Препр. / АН СССР. Ин-т математики).
8. *Матийчук М. И.* Исследование классических решений линейных параболических и некоторых эллиптических граничных задач : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Черновцы, 1980.— 284 с.
9. *Пукальский И. Д.*, *Матийчук М. И.* О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимального управления // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 6.— С. 738—744.

Черновиц. гос. ун-т Получено 29.09.87