Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 4, 436 – 474

Субоптимальное граничное управление системой Бенара в цилиндрически перфорированной области

Владимир В. Гоцуленко, Петр И. Когут

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Для системы Бенара рассматривается задача оптимального граничного управления течением вязкой несжимаемой жидкости в обобщенной ячейке Куэтта. Предложена концепция асимптотически субоптимальных управлений в такой задаче и установлена их структура, когда перфорация цилиндрической области соответствует критическому случаю.

2000 MSC. 35Q30, 49J20, 35B27, 35B40.

Ключевые слова и фразы. Субоптимальное управление, система Бенара, сходимость в переменных пространствах, вариационная сходимость, усредненная задача.

Введение

Задачам оптимального управления системами гидродинамического типа посвящена достаточно обширная литература (см., напр., [2, 18–20, 22, 23, 33]). Однако, как показано в [22], даже в случае гладких допустимых управлений численная реализация систем оптимальности в таких задачах является достаточно нетривиальной проблемой. Одной из причин такой ситуации есть нелинейность объекта управления. Однако, не менее важным фактором выступает геометрия области, где изучается гидродинамический процесс. Пожалуй, в наибольшей степени это касается задач оптимального управления такими системами в густо перфорированных областях и областях с быстроосциллирующей границей. В связи с этим становится актуальной проблема разработки методов построения законов субоптимального управления такими процессами.

Статья поступила в редакцию 29.05.2009

ISSN 1810 – 3200.

Ячейка Куэтта является классическим модельным объектом для изучения многих задачи гидродинамики. Вместе с тем свойства течения жидкости в ячейке Куэтта с несколькими внутренними цилиндрами фактически не изучены. В особенности это относится к течению вязкой несжимаемой жидкости с учетом изменения температурного поля (так называемая задача Бенара). Известно, что при увеличении числа внутренних цилиндров в ячейке Куэтта, компьютерное моделирование управляемого движения жидкости становится практически несостоятельным. Это обусловлено тем, что размерность системы нелинейных алгебраических уравнений, полученных вследствие дискретизации исходных уравнений типа Навье–Стокса, столь велика, что их решение становится затруднительным даже на современных ЭВМ. Указанное обстоятельство в еще большей степени усложняет проблему нахождения оптимальных законов управления такими объектами. Поэтому, данная работа ставит своей целью (на примере системы Бенара) получить закон управления, который бы обеспечивал не только требуемую близость к оптимальным характеристикам, но и имел бы достаточно простую структуру с точки зрения его практической реализации. Основу предлагаемого подхода составляет изучение асимптотического поведения рассматриваемой задачи оптимального управления, когда количество внутренних цилиндров в обобщенной ячейке Куэтта неограниченно возрастает, а их диаметры стремятся к нулю.

1. Предварительные данные

Прежде всего формализуем понятие обобщенной ячейки Куэтта в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\widetilde{\Omega}$ —ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\widetilde{\Omega}$. Пусть $\widetilde{Y} = [-1/2, 1/2)^2$, и пусть Q — компактное подмножество в $\widetilde{Y}$ с гладкой границей ∂Q, причем $0 \in \mathrm{int} Q$, $A = B(\mathbf{0}, r_0)$ — открытый шар с центром в нуле и радиусом $r_0 < 1/2$. При этом будем считать, что $Q \subset\subset A$. Пусть $\{\varepsilon\}$ — последовательность положительных чисел вида $\varepsilon = N^{-1}$, где $N \to \infty$. Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{cases} \Theta_\varepsilon = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \varepsilon(r_\varepsilon Q + \mathbf{k}) \subset\subset \widetilde{\Omega}\}; \\ \widetilde{\mathrm{T}}^{\mathbf{k}}_\varepsilon = \varepsilon(r_\varepsilon Q + \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \Theta_\varepsilon; \\ \widetilde{\mathrm{T}}_\varepsilon = \bigcup\limits_{\mathbf{k} \in \Theta_\varepsilon} \widetilde{\mathrm{T}}^{\mathbf{k}}_\varepsilon, \quad \mathrm{T}_\varepsilon = \widetilde{\mathrm{T}}_\varepsilon \times [0, \ell]; \\ \widetilde{\Omega}_\varepsilon = \widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\mathrm{T}}_\varepsilon, \quad \Omega_\varepsilon = \widetilde{\Omega}_\varepsilon \times (0, \ell). \end{cases}$$

Ясно, что $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \left[\bigcup_{\mathbf{k}\in\Theta_\varepsilon} \varepsilon(r_\varepsilon Q + \mathbf{k}) \times [0,\ell]\right]$, где $\Omega = \widetilde{\Omega} \times (0,\ell)$. Здесь ℓ — высота ячейки Куэтта, r_ε — “поперечный размер” тонких цилиндров. Всюду далее открытое множество Ω_ε в $\mathbb{R}^3$, периодически перфорированное тонкими цилиндрами $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}} = \widetilde{\mathrm{T}}_\varepsilon^{\mathbf{k}} \times [0,\ell]$, будем называть обобщенной ячейкой Куэтта. Поскольку каждый из цилиндров $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}$ получен в результате действия преобразования ε–гомотетии по первым двум координатам, т.е. $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}} = \{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2) \in \varepsilon(r_\varepsilon Q + \mathbf{k}), 0 \le x_3 \le \ell\}$, то периодом перфорации множества Ω_ε служит ячейка $\Lambda = \varepsilon\widetilde{Y} \times [0,\ell]$. Обозначим через Γ_ε— границу области Ω_ε, тогда

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^1 \bigcup \Gamma_\varepsilon^2 \bigcup \Gamma^3 \bigcup_{\mathbf{k}\in\Theta_\varepsilon} \widetilde{\partial}\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}},$$

где $\Gamma_\varepsilon^1 = \widetilde{\Omega}_\varepsilon \times \{0\}$, $\Gamma_\varepsilon^2 = \widetilde{\Omega}_\varepsilon \times \{\ell\}$, $\Gamma^3 = \partial\widetilde{\Omega} \times [0,\ell]$, $\widetilde{\partial}\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}$ — боковая поверхность цилиндра $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}$.

Пусть всюду далее через C и C_i будем обозначать константы, не зависящие от параметра ε. Для любого подмножества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $|E|$ его n-мерную меру Лебега $\mathcal{L}^n(E)$. Символом $|\partial E|_H$ будем обозначать $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа многообразия ∂E в $\mathbb{R}^n$. Также будем использовать стандартные обозначения для лебеговых пространств $L^p(\Omega)$ и пространств Соболева $H^m(\Omega)$ (см. [1]). Пусть $L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) \,:\, \int_\Omega q\,dx = 0\right\}$ с нормой $\|p\|^2_{L_0^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(p(x) - \int_\Omega p(x)\,dx\right)^2 dx$, и пусть также $L^2(\Omega, d\mu)$ — банахово пространство функций, интегрируемых на Ω по мере μ. В случае, когда μ — мера Лебега, будем использовать стандартное обозначение $L^2(\Omega)$.

Емкостью (гармонической) множества $E \subset \Omega$ называется величина $\operatorname{cap}(E,\Omega)$, которая определяется как инфимум $\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx$ по всем функциям $y \in H_0^1(\Omega)$ таким, что $y \ge 1$ почти всюду в E. Пусть $\mathcal{M}_b(\Omega)$ — пространство всех ограниченных борелевых мер на Ω. Через $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$ обозначим его подмножество, состоящее из неотрицательных мер μ на Ω таких, что $\mu(B) = 0$ для любого множества $B \subseteq \Omega$ с $\operatorname{cap}(B,\Omega) = 0$, и $\mu(B) = \inf\{\mu(U) \,:\, U$ — квази открыто, $B \subseteq U\}$ для любого борелевого подмножества $B \subseteq \Omega$. Пространство распределений $\mathcal{D}'(\Omega)$ есть двойственным к пространству $C_0^\infty(\Omega)$. При любом $m \ge 0$, через $H_0^m(\Omega)$ будем обозначать замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^m(\Omega)$. Тогда двойственным к нему есть $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))^*$. Каноническое спаривание пространства $H^s(\Omega)$ $(s > 0)$ и сопряженного с ним, обозначим стандартным образом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-s}(\Omega);H^s(\Omega)}$. Пространство следов $H^l(\partial\Omega)$ определяется как сужение на границу множества Ω функций из пространства $H^{l+1/2}(\Omega)$ (см. [36]). Для векторнозначных функций соответствующие пространства будем обозначать как: $\mathbf{L}^r(\Omega)$, $\mathbf{H}^m(\Omega)$, $\mathbf{H}^l(\partial\Omega)$, $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$, и $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Пусть $\mathbf{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ — произвольная вектор-функция. Тогда градиентом функции $\mathbf{u}$ есть $N \times N$-мерный тензор: $\nabla \mathbf{u} = (\partial u_i/\partial x_j)_{1\le i,j\le N}$, а тензорное произведение двух $N \times N$-мерных тензоров $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ будем определять как $A : B = \mathrm{tr}\left({}^t AB\right) = \sum_{1\le i,j\le N} a_{ij} b_{ij}$.

Далее введем следующие пространства соленоидальных векторных полей:

$$\mathbf{C}_{0,sol}^\infty(\Omega) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \ : \ \mathrm{div}\ \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = 0 \ \text{ в } \ \Omega \right\},$$

$$\mathbf{H}_{sol}^m(\Omega) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{H}^m(\Omega) \ : \ \nabla \cdot \mathbf{y} = 0, \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}\, d\mathcal{H}^2 = 0 \right\},$$

$$\mathbf{H}_{0,sol}^m(\Omega) = \text{ замыкание множества } \ \mathbf{C}_{0,sol}^\infty(\Omega) \text{ в } \mathbf{H}^m(\Omega)\text{-норме.}$$

Тут для случая, когда $m = 0$, выражение $\int_{\partial\Omega} \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}\, d\mathcal{H}^2$ следует понимать как результат дуального спаривания в $\left\langle \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega); \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) \right\rangle$ распределения $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ и функции $\varphi \equiv 1 \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Пространства $\mathbf{H}_{sol}^m(\Omega)$ и $\mathbf{H}_{0,sol}^m(\Omega)$ предполагаются нормированными относительно нормы пространства $\mathbf{H}^m(\Omega)$. Определим оператор дивергенции стандартным образом:

$$\langle \mathrm{div}\, \mathbf{y}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega} \mathbf{y} \cdot \nabla \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\, \mathbf{y} \in L^2(\Omega) \right\}$. Будем использовать следующую лемму об интегрировании функций из пространства $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ (см. [36]).

Лемма 1.1. *Пусть* $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$. *Тогда* $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *и*

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega); H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int\limits_{\Omega} v \ \mathrm{div}\ \mathbf{w}\, dx + \int\limits_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla v\, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

И в завершение данного раздела, введем в рассмотрение следующие би- и трилинейные формы, ассоциированные с уравнением Навье–Стокса

$$a_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{v}\, dx \quad \forall\, \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon),$$

$$b_\varepsilon(\mathbf{y}, q) = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} q \operatorname{div} \mathbf{y}\, dx \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon),$$

$$c_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{y} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\, dx \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon).$$

2. Постановка задачи оптимального управления

Пусть $\mathbf{z}_\varepsilon^\partial \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ и $b \in H^1(\Omega)$ — заданные функции, где малый параметр ε принимает фиксированное значение. В качестве объекта управления выступает процесс протекания вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрически перфорированной области Ω_ε с условием прилипания на боковой грани цилиндра Ω. Обозначим через $\mathbf{y}_\varepsilon$ вектор скорости течения, p_ε — давление жидкости, θ_ε — ее температуру. Предполагается, что скорость течения на входе и выходе цилиндра Ω_ε является заданной, а процесс протекания жидкости, с учетом влияния температурных процессов, подчиняется закону Бенара–Рэлея [5]. Задача управления состоит в нахождении таких граничных значений скорости $\overline{\alpha}_\varepsilon = \left(\alpha_1^\varepsilon, \ldots, \alpha_{J_\varepsilon}^\varepsilon\right)$ на боковых гранях тонких цилиндров $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \varepsilon(r_\varepsilon Q + \mathbf{k}),\ 0 \le x_3 \le \ell\}\ \forall \mathbf{k} \in \Theta_\varepsilon$ (за счет их осевого вращения), при которых поле скоростей в Ω_ε обладало бы заданными свойствами (в частности, наследовало бы свойства, близкие к заданному распределению z_ε^∂).

Основываясь на результатах работы [5], примем следующую математическую модель установившегося движения жидкости в области Ω_ε:

$$-\Delta \mathbf{y}_\varepsilon + (\mathbf{y}_\varepsilon \cdot \nabla)\, \mathbf{y}_\varepsilon = -\nabla p_\varepsilon + \theta_\varepsilon\, \overrightarrow{\mathbf{e}_3}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y}_\varepsilon = 0, \tag{2.2}$$

$$-\Delta \theta_\varepsilon + (\mathbf{y}_\varepsilon \cdot \nabla)\, \theta_\varepsilon = \mathbf{y}_\varepsilon \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_3} \tag{2.3}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon^1} = \mathbf{y}_\varepsilon^1, \quad \mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon^2} = \mathbf{y}_\varepsilon^2, \quad \mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma^3} = 0, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{y}_\varepsilon|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}} = \alpha_{\mathbf{k}_j}^\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}} = b|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}} \quad (j = \overline{1; J_\varepsilon}), \tag{2.5}$$

$$\theta_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon^1} = 0, \quad \theta_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon^2} = 0, \quad \theta_\varepsilon|_{\Gamma^3} = b|_{\Gamma^3}. \tag{2.6}$$

Формализуем понятие решения указанной краевой задачи.

Определение 2.1. *Будем говорить, что функции* $(\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon)$ *являются слабым решением краевой за-*

дачи (2.1)–(2.6), *если:*

$$a_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon, \mathbf{v}) + c_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \left(\overrightarrow{\mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{v}\right) dx \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega_\varepsilon),$$

$$b_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon, q) = 0 \quad \forall\, q \in L^2_0(\Omega_\varepsilon),$$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{y}_\varepsilon \cdot \nabla\theta_\varepsilon)\,\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(\overrightarrow{\mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{y}_\varepsilon\right)\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega_\varepsilon)$$

и при этом выполняются краевые условия (2.4)–(2.6).

Следуя рассуждениям, приведенным в работах [36] и [5], можно показать, что краевая задача (2.1)–(2.6) разрешима в смысле определения 2.1, если только $b \in H^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \;:\; \varphi|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}\right\}$, где $\Gamma_1 = \widetilde{\Omega} \times 0$ и $\Gamma_2 = \widetilde{\Omega} \times \ell$ и $\alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_j} \in \mathbf{H}^{1/2}(\widetilde{\partial} \mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon)$ при всех $j = 1, 2, \ldots, J_\varepsilon$.

Пусть $\gamma > 0$ — a priori заданная величина. Будем говорить, что векторное поле граничных скоростей $\overline{\alpha}_\varepsilon = (\alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_1}, \ldots, \alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_{J_\varepsilon}})$ является допустимым, если найдется вектор-функция $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ (так называемый прототип граничных управлений) такая, что $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma$ и при этом

$$\mathbf{u}|_{\Gamma^1_\varepsilon} = \mathbf{y}^1_\varepsilon, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma^2_\varepsilon} = \mathbf{y}^2_\varepsilon, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma^3} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\widetilde{\partial} \mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon} = \alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}, \quad \forall\, j = 1, \ldots, J_\varepsilon,$$

где

$$\mathbf{y}^1_\varepsilon = \mathbf{y}^*_\varepsilon\big|_{\Gamma^1_\varepsilon}, \quad \mathbf{y}^2_\varepsilon = \mathbf{y}^*_\varepsilon\big|_{\Gamma^2_\varepsilon}, \quad \mathbf{y}^*_\varepsilon \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon),$$
$$\mathbf{y}^*_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{y}^* \text{ слабо в } \mathbf{H}^2(\Omega).$$

Обозначим через $\mathbb{U}^\varepsilon_\partial$ множество всех допустимых управлений при фиксированном ε, т.е.

$$\mathbb{U}^\varepsilon_\partial = \left\{ \overline{\alpha}_\varepsilon = \left(\alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_1}, \ldots, \alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_{J_\varepsilon}}\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}} = \mathbf{u}\big|_{\widetilde{\partial}\mathrm{T}^{\mathbf{k}}_\varepsilon} \quad \forall\, \mathbf{k} \in \Theta_\varepsilon, \\ \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma, \\ \mathbf{u}\big|_{\Gamma^1_\varepsilon} = \mathbf{y}^1_\varepsilon, \quad \mathbf{u}\big|_{\Gamma^2} = \mathbf{y}^2_\varepsilon, \quad \mathbf{u}\big|_{\Gamma^3_\varepsilon} = 0 \end{array} \right\}. \tag{2.7}$$

В этом случае результат о разрешимости краевой задачи (2.1)–(2.6) можно уточнить в следующей редакции (см., напр., [12]):

Теорема 2.1. *Пусть $b \in H^1(\Omega)$, $\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbb{U}^\varepsilon_\partial$, и $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ — прототип управляющего воздействия. Тогда найдется тройка функций*

$$(\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \left[\mathbf{H}^1_{sol}\left(\Omega_\varepsilon\right) \cap \mathbf{H}^2\left(\Omega_\varepsilon\right)\right] \times \left[H^1\left(\Omega_\varepsilon\right) \cap L^2_0\left(\Omega_\varepsilon\right)\right] \times H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)$$

такая, что $(\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ *есть слабым решением задачи* (2.1)–(2.6) *и при этом*

$$\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{0,sol}\left(\Omega_\varepsilon\right), \quad \theta - b\big|_{\Omega_\varepsilon} \in H^1_0\left(\Omega_\varepsilon\right).$$

Введем в рассмотрение множество

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \;\middle|\; \begin{array}{l} \overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbb{U}^\varepsilon_\partial, \quad \theta_\varepsilon - b \in H^1_0\left(\Omega_\varepsilon\right), \\ \mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{0,sol}\left(\Omega_\varepsilon\right), \\ (\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathbf{H}^1_{sol}\left(\Omega_\varepsilon\right) \times L^2_0\left(\Omega_\varepsilon\right) \times H^1\left(\Omega_\varepsilon\right) \text{ —} \\ \text{слабое решение задачи (2.1)–(2.6)} \end{array} \right\} \tag{2.8}$$

и сформулируем задачу оптимального управления: найти функции $\left(\overline{\alpha}^0_\varepsilon, \mathbf{y}^0_\varepsilon, p^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon\right) \in \Xi_\varepsilon$ такие, что

$$\mathbb{P}_\varepsilon \;:\; \mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}^0_\varepsilon, \mathbf{y}^0_\varepsilon, p^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon\right) = \inf_{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon} \mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon\right), \tag{2.9}$$

где функционал стоимости имеет вид

$$\mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon\right) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{z}^\partial_\varepsilon\right|^2 dx + \frac{\beta\,\varepsilon}{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_{\widetilde{\partial}\mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon} \left|\alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}\right|^2 d\mathcal{H}^2. \tag{2.10}$$

Здесь $\beta > 0$ — весовой коэффициент. Всюду далее множество Ξ_ε будем называть множеством допустимых решений в задаче (2.9). Как следует из определения множества Ξ_ε и апприорных оценок для слабых решений задачи Бенара (2.1)–(2.6) (см. [5]), множество Ξ_ε равномерно ограничено и замкнуто, относительно произведения слабых топологий в пространствах $\mathbf{H}^{1/2}(\widetilde{\partial}\mathrm{T}_\varepsilon) \times \mathbf{H}^1\left(\Omega_\varepsilon\right) \times L^2(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon)$, а функционал стоимости полунепрерывен снизу в указанной топологии. Следовательно (см. [18]), задача оптимального управления (2.9) разрешима тогда и только тогда, когда $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$. В связи с этим всюду далее будем предполагать, что $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$ при всех $\varepsilon > 0$.

Кроме того, заметим, что решение краевой задачи (2.1)–(2.6), вообще говоря, не единственно при фиксированном граничном управлении. Поэтому, будем считать, что на множествах Ξ_ε задано бинарное отношение эквивалентности $\langle L; \Xi_\varepsilon\rangle$ по следующему правилу: $(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\, L\, (\widehat{\overline{\alpha}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon)$, если только $\overline{\alpha}_\varepsilon = \widehat{\overline{\alpha}}_\varepsilon$.

3. Формализм сингулярных мер

С целью дальнейшего анализа задачи оптимального управления (2.8)–(2.10), используем аппарат сингулярных мер, предложенный в работе [38] (см., также, [11, 12]). Введем в рассмотрение следующее множество $Q^r = \{rx \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in Q\}$, где $0 < r < 1$ — фиксированный параметр. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ нормированную периодическую меру Бореля η_0^r с ячейкой периодичности $\widetilde{Y} = [-1/2, 1/2)^2$. Будем предполагать, что η_0^r равномерно распределена на множестве ∂Q^r и пропорциональна одномерной хаусдорфовой мере $\mathcal{H}^1$ на $\mathbb{R}^1$. Ясно, что $\eta_0^r(\widetilde{Y}\backslash\partial Q^r) = 0$. Введем в рассмотрение также меру $d\eta^r = d\eta_0^r \times dx_3$ на $Y = [-1/2, 1/2)^2 \times [0, 1)$, носителем которой выступает множество $\partial Q^r \times [0, 1)$. Тогда для любой непрерывной функции g имеет место равенство

$$\int\limits_Y g\, d\eta^r = \int\limits_0^1 \int\limits_{\widetilde{Y}} g\, dx_3\, d\eta_0^r = \left[\mathcal{H}^2\left(\partial Q^r \times [0,1)\right)\right]^{-1} \int\limits_{\partial Q^r \times [0,1)} g\, d\mathcal{H}^2.$$

Поскольку $\mathcal{H}^2\left(\partial Q^r \times [0, 1)\right) = \mathcal{H}^1\left(\partial Q^r\right) = r\mathcal{H}^1\left(\partial Q\right)$, то далее будем использовать обозначение $|\partial Q|_H = \mathcal{H}^1\left(\partial Q\right)$. В результате,

$$r\int\limits_Y g d\eta^r = r\int\limits_0^1 \int\limits_{\widetilde{Y}} g\, dx_3 d\eta_0^r = |\partial Q|_H^{-1} \int\limits_{\partial Q^r \times [0,1)} g\, d\mathcal{H}^2. \qquad (3.1)$$

Для любого борелевого множества $B \subset \mathbb{R}^3$ положим $\eta_\varepsilon^r\,(B) = \varepsilon^3 \eta^r(\varepsilon^{-1}B)$, где $r = r_\varepsilon$ $(\lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon = 0)$. Тогда, как легко проверить, имеем:

$$\int\limits_{\varepsilon Y} d\eta_\varepsilon^r = \varepsilon^3 \int\limits_Y d\eta^r = \varepsilon^3.$$

Следовательно, $d\eta_\varepsilon^r \rightharpoonup dx$ в пространстве мер Бореля [38], что означает

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi\, d\eta_\varepsilon^r = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right). \qquad (3.2)$$

Замечание 3.1. Мера η_ε^r принадлежит классу $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$, который состоит из неотрицательных мер Бореля η на Ω таких, что для любого борелевого множества $B \subseteq \Omega$ справедливо $\eta(B) = 0 \ \forall B \subset \Omega :$ $\operatorname{cap}(B, \Omega) = 0$ и $\eta(B) = \inf\{\eta(U) : U$ — квази открыто, $B \subseteq U\}$. Отметим также, что если $\eta \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$, то любая функция из $\mathbf{H}^1(\Omega)$ интегрируема по мере η, а значит, пространство $\mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta)$ является корректно заданным (см. [14]).

Используя приведенное выше замечание, перепишем выражение

$$\frac{\beta\varepsilon}{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_{\widetilde{\partial} \mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}} \left|\alpha_{\mathbf{k}_j}^\varepsilon\right|^2 d\mathcal{H}^2$$

в следующей, более удобной для дальнейших рассуждений, форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta\varepsilon}{r_\varepsilon} & \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_{\widetilde{\partial} \mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}} \left|\alpha_{\mathbf{k}_j}^\varepsilon\right|^2 d\mathcal{H}^2 \\
&= \beta\varepsilon^2 \left|\partial Q\right|_H \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_0^1 \int\limits_{\varepsilon\left(\widetilde{Y}+\mathbf{k}_j\right)} \left|\mathbf{u}_\varepsilon\right|^2 \, d\eta_0^{r_\varepsilon}\Big(\frac{x'}{\varepsilon}\Big) dx_3 \\
&= \beta\varepsilon^3 \left|\partial Q\right|_H \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_0^1 \int\limits_{\varepsilon(Y+\mathbf{k}_j)} \left|\mathbf{u}_\varepsilon\right|^2 \, d\eta^{r_\varepsilon}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \\
&= \beta \left|\partial Q\right|_H \int\limits_\Omega \left|\mathbf{u}_\varepsilon\right|^2 \, d\eta_\varepsilon^{r_\varepsilon}, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}_\varepsilon$ — прототип вектора управлений $\overline{\alpha}_\varepsilon = (\alpha_{\mathbf{k}_1}^\varepsilon, \ldots, \alpha_{\mathbf{k}_{J_\varepsilon}}^\varepsilon)$.

Замечание 3.2. Любое допустимое управление $\overline{\alpha}_\varepsilon = (\alpha_{\mathbf{k}_1}^\varepsilon, \ldots, \alpha_{\mathbf{k}_{J_\varepsilon}}^\varepsilon)$ можно интерпретировать, согласно представлению (3.3), как элемент пространства $\mathbf{L}^2\left(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r_\varepsilon}\right)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}_{sol}^1\left(\Omega_\varepsilon\right) \cap \mathbf{H}^2\left(\Omega\right)$ — произвольно фиксированный прототип для вектора $\overline{\alpha}_\varepsilon$. Тогда, в силу компактности вложения $\mathbf{H}^2\left(\Omega\right) \subset \mathbf{C}\left(\Omega\right)$, имеем $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{C}\left(\Omega\right)$. Следовательно, $\mathbf{u}_\varepsilon$ является $\eta_\varepsilon^{r_\varepsilon}$— измеримой функцией.

Определение 3.1. *Пусть* $(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ *— произвольное допустимое решение для задачи* (2.9). *Тогда набор* $(\mathbf{u}_\varepsilon, \check{\mathbf{y}}_\varepsilon, \check{p}_\varepsilon, \check{\theta}_\varepsilon) \in \mathbb{X}_\varepsilon$ *будем называть прототипом* $(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ *для задачи* $(\widehat{\mathbb{P}}_\varepsilon)$, *если* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— прототип вектора управлений* $\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbb{U}_\varepsilon^\partial$, *а* $(\check{\mathbf{y}}_\varepsilon, \check{p}_\varepsilon, \check{\theta}_\varepsilon)$ *—*

некоторое продолжение функций $(\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ *на всю область* Ω, *т.е.* $(\check{\mathbf{y}}_\varepsilon, \check{p}_\varepsilon, \check{\theta}_\varepsilon)|_{\Omega_\varepsilon} = (\mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$. *Здесь* $\mathbb{X}_\varepsilon = [\mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r_\varepsilon})] \times [\mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^1(\Omega))] \times [L^2_0(\Omega) \cap L^2_0(\Omega_\varepsilon)] \times H^1(\Omega)$.

Замечание 3.3. Так как множество Ω_ε является сильно связным (см. [31]), то существует линейный оператор продолжения $\mathbf{P}_\varepsilon : \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon) \to \mathbf{H}^1(\Omega)$ и константа $C > 0$, независящая от ε, такие, что $\|\mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C \|\mathbf{y}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)}$ $\forall \mathbf{y}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Поэтому в дальнейшем будем полагать $\check{\mathbf{y}}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon$.

Поскольку продолжения функций p_ε и θ_ε на классы $H^1(\Omega)$ и $L^2_0(\Omega)$, соответственно, являются достаточно специфичными, воспользуемся идеями работ [3,10]. Всюду далее будем обозначать через $\sim$ оператор продолжения нулем на цилиндры $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}$. Пусть $\{\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\}_{k=1,2,3}$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. Введем ряд вспомогательных гипотез. Пусть найдутся тройка $(\mathbf{w}_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon, \mu_k)$ $(1 \le k \le 3)$, ω_ε, μ, и линейный оператор $R_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)\right)$, такие, что:

(H1) $\mathbf{w}_k^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $q_k^\varepsilon \in L^2_0(\Omega)$, $\mu_k \in \mathbf{W}^{-1,\infty}(\Omega)$, $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$;

(H2) $\nabla \cdot \mathbf{w}_k^\varepsilon = 0$ в Ω и $\mathbf{w}_k^\varepsilon = 0$ на T_ε;

(H3) $\mathbf{w}_k^\varepsilon \rightharpoonup \overrightarrow{\mathbf{e}}_k$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$, и $q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $L^2_0(\Omega)$;

(H4) $\forall \mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ таких, что $\mathbf{v}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = 0$ на T_ε, справедливо:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_k^\varepsilon, \varphi\, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}^1_0(\Omega)} = \langle \mu_k, \varphi\, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}^1_0(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega);$$

(H5) если $\mathbf{y} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega_\varepsilon)$, то $R_\varepsilon(\chi_\varepsilon \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ в Ω_ε, если $\nabla \cdot \mathbf{y} = 0$ в Ω, то $\nabla \cdot (R_\varepsilon \mathbf{y}) = 0$ в Ω_ε, и при этом $\|R_\varepsilon \mathbf{y}\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega_\varepsilon)} \le C \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}$, где константа C не зависит от ε;

(H6) $\omega_\varepsilon \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\omega_\varepsilon = 0$ на $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}_j}$ $\left(j = \overline{1; J_\varepsilon}\right)$;

(H7) $\omega_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1(\Omega)$;

(H8) $\forall \upsilon_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ и $\forall \upsilon \in H^1(\Omega)$ таких, что $\upsilon_\varepsilon \rightharpoonup \upsilon$ в $H^1(\Omega)$ и $\upsilon_\varepsilon = 0$ на T_ε, справедливо:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle -\Delta \omega_\varepsilon, \varphi\, \upsilon_\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} = \langle \mu, \varphi\, \upsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Замечание 3.4. В дальнейшем будет показано, что для задачи (2.8)–(2.10) приведенные выше гипотезы выполняются. Заметим также, что естественным следствием гипотез (H1)–(H5) является существование линейного оператора $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega_\varepsilon); L_0^2(\Omega))$ такого, что (см., напр., [35]):

$$\langle \nabla \left[P_\varepsilon q_\varepsilon \right], \mathbf{w} \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla q_\varepsilon, R_\varepsilon \mathbf{w} \rangle_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon); H_0^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

(i) $P_\varepsilon q_\varepsilon = q_\varepsilon$ в $L_0^2(\Omega_\varepsilon)$,

(ii) $\|P_\varepsilon q_\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \|q_\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega_\varepsilon)}$,

(iii) $\|\nabla \left[P_\varepsilon q_\varepsilon \right] \|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq C \|\nabla q_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_\varepsilon)}$, где константа C не зависит от выбора q_ε и ε.

Идентификация мер μ_k для различного класса задач в перфорированных областях проводилась многими авторами, см., напр. [3, 9, 10, 31, 33]. Однако, первые результаты в этом направлении были получены в работе [31].

4. Сходимость в переменном пространстве $\mathbb{X}_\varepsilon$

Характерной чертой изучаемой задачи граничного оптимального управления $(\widehat{\mathbb{P}}_\varepsilon)$ является зависимость базового пространства решений $\mathbb{X}_\varepsilon$ от малого параметра ε. В связи с этим напомним основные понятия сходимости в переменных пространствах и их свойства, следуя работам [7, 38] (см. также [30]). Пусть $\{\eta_\varepsilon^r\}_{\varepsilon>0}$ — произвольное семейство периодических мер Бореля. Пусть $\left\{\mathbf{u}_\varepsilon^r \in \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)\right\}$ — произвольная ограниченная последовательность функций, т.е. $\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon^r|^2 \, d\eta_\varepsilon^r < +\infty$. Будем говорить, что:

1. $\mathbf{u}_\varepsilon^r \rightharpoonup \mathbf{u}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \mathbf{u}_\varepsilon^r \varphi \, d\eta_\varepsilon^r = \int_\Omega \mathbf{u}\varphi \, dx$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$;

2. $\mathbf{u}_\varepsilon^r \to \mathbf{u}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \mathbf{u}_\varepsilon^r \cdot \mathbf{w}_\varepsilon^r \, d\eta_\varepsilon^r = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, dx$ для всех $\mathbf{w}_\varepsilon^r \rightharpoonup \mathbf{w}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$.

Имеют место следующие свойства указанной сходимости (см. [38]):

(a) *Критерий компактности:* всякая ограниченная последовательность в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$ компактна относительно слабой сходимости;

(b) *Свойство слабой полунепрерывности снизу:* если $\mathbf{u}_\varepsilon^r \rightharpoonup \mathbf{u}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, то

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon^r|^2 \, d\eta_\varepsilon^r \geq \int\limits_\Omega |\mathbf{u}|^2 \, dx. \tag{4.1}$$

Пусть χ_ε — характеристическая функция области Ω_ε. Тогда, в силу периодичности Ω_ε, справедливо следующее представление

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon^r(x) = \chi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где

$$\chi^r(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \setminus [Q^r \times [0,1)], \\ 0, & x \in Q^r \times [0,1) = rQ \times [0,1). \end{cases}$$

Поскольку $d\eta_\varepsilon^r := \chi_\varepsilon(x)dx$ есть мерой Радона, то для любого борелевого множества $B \subset \mathbb{R}^3$ можна записать $\eta_\varepsilon^r(B) = \varepsilon^3\eta^r(\varepsilon^{-1}B)$, где η^r — Y-периодическая мера Бореля в $\mathbb{R}^3$, которая равномерно распределена на многообразии $Y \setminus [Q^r \times [0,1)]$ и пропорциональна здесь мере Лебега $\mathcal{L}^3$, т.е. $\int_Y d\eta^r = |\widetilde{Y} \setminus Q^r|_{\mathcal{L}^2} = |\widetilde{Y}|_{\mathcal{L}^2} - r^2\,|Q|_{\mathcal{L}^2} = 1 - r^2\,|Q|_{\mathcal{L}^2}$. Таким образом, $d\eta^r \rightharpoonup dx$ при $r \to 0$, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \varphi\chi_\varepsilon \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \varphi\chi^{r(\varepsilon)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = |Y| \int\limits_\Omega \varphi \, dx = \int\limits_\Omega \varphi \, dx \tag{4.2}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Следующий результат является прямым следствием определения сильной сходимости в $L^2(\Omega, \chi_\varepsilon\, dx)$ и соотношения (4.2).

Лемма 4.1. *$\chi_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ как в $L^2(\Omega)$, так и в $L^2(\Omega, \chi_\varepsilon\, dx)$.*

Формализуем понятие сходимости для последовательностей вида $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. С этой целью введем следующие понятия:

Определение 4.1. *Будем говорить, что последовательность управлений $\{\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbf{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ w_a-сходится к функции $\mathbf{a}_0$, если найдется последовательность ее прототипов $\{\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)})\}_{\varepsilon>0}$, слабо сходящаяся к $\mathbf{a}_0$ в $\mathbf{H}^2(\Omega)$.*

Определение 4.2. *Будем говорить, что последовательность управлений $\{\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbf{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ w_b-сходится к функции $\mathbf{b}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, если найдется последовательность ее прототипов $\{\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)})\}_{\varepsilon>0}$, которая сходится к $\mathbf{b}_0$ слабо в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, т.е.*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)} < +\infty \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_\varepsilon^r \rightharpoonup \mathbf{b}_0 \quad \text{в} \quad \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r). \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Из любой последовательности допустимых управлений $\{\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbf{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой ее w_a- и w_b-пределы совпадают почти всюду в Ω.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)})\}_{\varepsilon>0}$ — произвольная последовательность прототипов допустимых управлений. В силу ее ограниченности в $\mathbf{H}^2(\Omega)$, найдется элемент $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ и подпоследовательность $\{\mathbf{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ (сохраним для нее тот же индекс) такие, что $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{a}_0$ в $\mathbf{H}^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее, согласно теореме вложения Соболева, имеем: $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{C}(\Omega)$ и $\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u}_0$ в $\mathbf{C}(\Omega)$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \, d\eta_\varepsilon^r \\
&\qquad \le 2 \limsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{a}_0|^2 d\eta_\varepsilon^r + 2 \limsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\mathbf{a}_0|^2 d\eta_\varepsilon^r \\
&\qquad \le 2 \limsup_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{a}_0\|^2_{\mathbf{C}(\Omega)} \, \eta_\varepsilon^r \left(\overline{\Omega}\right) + 2 \|\mathbf{a}_0\|^2_{\mathbf{C}(\Omega)} \, \eta_\varepsilon^r \left(\overline{\Omega}\right) \\
&\qquad = 2 \|\mathbf{a}_0\|^2_{\mathbf{C}(\Omega)} \, \eta_\varepsilon^r \left(\overline{\Omega}\right).
\end{aligned}
$$

Поскольку последовательность $\{\mathbf{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограничена в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, то согласно приведеному выше критерию компактности в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$, можем утверждать: найдется элемент $\mathbf{b}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ такой, что (переходя при необходимости к подпоследовательности) $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{b}_0$ в $\mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^r)$. С другой стороны, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \varphi \left(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0\right) \, dx \\
&\qquad \le \left| \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{a}_0 \, dx - \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{a}_0 \, d\eta_\varepsilon^r \right| + \left| \int\limits_\Omega \varphi \left(\mathbf{a}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon\right) \, d\eta_\varepsilon^r \right| \\
&\qquad + \left| \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{u}_\varepsilon \, d\eta_\varepsilon^r - \int\limits_\Omega \varphi \, \mathbf{b}_0 \, dx \right| \le \left| \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{a}_0 \, dx - \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{a}_0 \, d\eta_\varepsilon^r \right| \\
&\qquad + \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{a}_0\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \int\limits_\Omega |\varphi| \, d\eta_\varepsilon^r + \left| \int\limits_\Omega \varphi \mathbf{u}_\varepsilon \, d\eta_\varepsilon^r - \int\limits_\Omega \varphi \, \mathbf{b}_0 \, dx \right| \\
&\qquad = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Так как $d\eta_\varepsilon^r \rightharpoonup dx$ и $(\varphi \, \mathbf{a}_0) \in \mathbf{C}_0(\Omega)$, получаем $I_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следуя аналогичным рассуждениям, находим, что $I_2 \to 0$ и $I_3 \to 0$

при $\varepsilon \to 0$. В результате, учитывая (4.3), из соотношения (4.4) окончательно получаем: $\int_\Omega \varphi\,(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0)\,dx = 0\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Таким образом, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0$ почти всюду в Ω, что и требовалось доказать. $\square$

Как следствие, приходим к следующим утверждениям.

Лемма 4.3. *Пусть $\{\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbf{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — некоторая последовательность допустимых граничных управлений. Тогда слабые пределы в $\mathbf{H}^2(\Omega)$ любых слабо сходящихся последовательностей ее прототипов*

$$\left\{\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)})\right\}_{\varepsilon>0}$$

и

$$\left\{\mathbf{u}_\varepsilon^{(2)} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)})\right\}_{\varepsilon>0}$$

совпадают.

Лемма 4.4. *Любая последовательность допустимых граничных управлений $\{\overline{\alpha}_\varepsilon \in \mathbf{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ предкомпактна относительно w_a-сходимости. Более того, любая ее w_a-предельная точка принадлежит множеству*

$$\mathbf{U} = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)\ :\ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma\right\}. \tag{4.5}$$

Согласно замечанию 3.3, для любой ограниченной последовательности функций $\left\{\mathbf{y}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ найдутся операторы продолжения $\mathbf{P}_\varepsilon : \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon) \to \mathbf{H}^1(\Omega)$ и константа C, независящая от ε, такие, что $\|\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon = (\mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{y}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0$. Предположим, что имеются две последовательности $\{\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(1)} = \mathbf{P}_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ и $\{\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(2)} = \mathbf{P}_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ такие, что $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(1)} \rightharpoonup \mathbf{y}_1^*$ и $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(2)} \rightharpoonup \mathbf{y}_2^*$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Тогда, используя результат леммы 4.1 и переходя к пределу в равенстве

$$\int\limits_\Omega \chi_\varepsilon \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(1)} \varphi\,dx = \int\limits_\Omega \chi_\varepsilon \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon^{(2)} \varphi\,dx, \quad \forall\,\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_\Omega \mathbf{y}_1^* \varphi\,dx = \int\limits_\Omega \mathbf{y}_2^* \varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Таким образом, $\mathbf{y}_1^* = \mathbf{y}_2^*$.

Принимая данное обстоятельство во внимание, введем следующее понятие.

Определение 4.3. *Будем говорить, что последовательность допустимых решений* $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *w-сходится к* $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *в переменном пространстве* $\mathbb{X}_\varepsilon$ *при* $\varepsilon \to 0$ *(в символьной записи,* $(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)$*), если найдется последовательность ее прототипов* $\{(\mathbf{u}_\varepsilon, \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon, \breve{p}_\varepsilon, \breve{\theta}_\varepsilon) \in \widehat{\Xi}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$*, которая сходится к* $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)$ *в следующем смысле:*

(*i*) $\mathbf{u}_\varepsilon \xrightarrow{w_a} \mathbf{u}$ *в* $\mathbf{H}^2(\Omega)$*;*

(*ii*) $\breve{p}_\varepsilon \rightharpoonup p$ *в* $L^2_0(\Omega)$*;*

(*iii*) $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{y}$ *в* $\mathbf{H}^1(\Omega)$*;*

(*iv*) $\breve{\theta}_\varepsilon \rightharpoonup \theta$ *в* $H^1(\Omega)$*.*

Установим следующий результат:

Теорема 4.1. *Пусть* $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *— последовательность допустимых решений задачи* $\mathbb{P}_\varepsilon$*. Тогда найдется подпоследовательность* $\{(\overline{\alpha}_{\varepsilon'}, \mathbf{y}_{\varepsilon'}, p_{\varepsilon'}, \theta_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon'>0}$ *и четверка* $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *такие, что :* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$*,* $(\overline{\alpha}_{\varepsilon'}, \mathbf{y}_{\varepsilon'}, p_{\varepsilon'}, \theta_{\varepsilon'}) \xrightarrow{w} (\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)$*, и*

$$\mathbf{y} - \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega). \tag{4.6}$$

Доказательство. Для заданной последовательности допустимых решений рассмотрим последовательность ее прототипов

$$\left\{(\mathbf{u}_\varepsilon, \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon, \breve{p}_\varepsilon, \breve{\theta}^b_\varepsilon) \in \widehat{\Xi}_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}, \tag{4.7}$$

которая построена по правилу: $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon = \mathbf{y}_\varepsilon$ на Ω_ε и $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon$ на T_ε, $\breve{p}_\varepsilon = P_\varepsilon(p_\varepsilon)$, а функции $\breve{\theta}^b_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ определены как $\breve{\theta}^b_\varepsilon = \theta_\varepsilon$ на Ω_ε и $\breve{\theta}^b_\varepsilon = b$ на T_ε. Здесь $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2_0(\Omega_\varepsilon); L^2_0(\Omega))$ — оператор продолжения, отмеченный в замечании 3.4. Поскольку $\mathbf{y}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon)$ и $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, то при таком продолжении имеем $\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathbf{H}^1_0(\Omega)$.

Как следует из определения множества Ξ_ε и априорных оценок для слабых решений задачи Бенара (2.1)–(2.6) (см. [5]), последовательность $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ равномерно ограничена в $\mathbb{X}_\varepsilon$. Следовательно, будет ограниченной, а значит и слабо предкомпактной в $\mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$, последовательность ее прототипов (4.7). Пусть $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ — ее слабый предел.

Покажем, что $\mathbf{y} - \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega)$. Учитывая, что

$$\operatorname{div} : \mathbf{H}^1_0(\Omega_\varepsilon) \mapsto L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R} = \left\{ g \in L^2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} g(x)\, dx = 0 \right\},$$

приходим к справедливости включения $\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,,\Omega_\varepsilon)\ \forall\,\varepsilon$. Таким образом,

$$0 = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi \,\mathrm{div}(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\,dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,dx,$$
$$\forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \forall\,\varepsilon > 0. \quad (4.8)$$

Принимая во внимание лемму 1.1, можем записать

$$\int\limits_{\Omega} \varphi\,\chi_\varepsilon \,\mathrm{div}\,(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\,dx = -\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,dx, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Поскольку $\mathrm{div}\,[\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon] = \mathrm{div}\,[\chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)] = \chi_\varepsilon\,\mathrm{div}(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)$, отсюда находим $\chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \in \mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$. В результате, переходя в (4.8) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая при этом лемму 4.1, получим

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{y} - \mathbf{u})\nabla\varphi\,dx, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Следовательно, $(\mathbf{y} - \mathbf{u}) \in H^1_{0,sol}(\Omega)$, что и требовалось установить. $\square$

5. Определение субоптимальных управлений

Как было отмечено во введении, численное решение задачи оптимального управления (2.8)–(2.10) при малых значениях параметра ε практически несостоятельно. Поэтому возникает естественная необходимость в построении таких законов управления в задаче Бернара, при которых ее характеристики были бы в определенном смысле близкими к оптимальным. В связи с этим, введем следующее понятие.

Определение 5.1. *Будем говорить, что функция* $\overline{\alpha}^{sub}_\varepsilon = (\alpha^{sub}_{\mathbf{k}_1}, \alpha^{sub}_{\mathbf{k}_2}, \dots, \alpha^{sub}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}_\varepsilon}})$ *является асимптотически субоптимальным управлением для задачи* $(\mathbb{P}_\varepsilon)$*, если*

$$\alpha^{sub}_{\mathbf{k}_j} \in \mathbf{H}^{1/2}(\widetilde{\partial}\mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon), \qquad \int\limits_{\widetilde{\partial}\mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon} \mathbf{n}\cdot\alpha^{sub}_{\mathbf{k}_j}\,d\mathcal{H}^2 = 0, \quad \forall\,j = 1,\dots,\mathrm{J}_\varepsilon, \qquad (5.1)$$

и при этом для любого $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что*

$$\left|\inf_{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon} \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) - \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}^{sub}_\varepsilon, \mathbf{y}^{sub}_\varepsilon, p^{sub}_\varepsilon, \theta^{sub}_\varepsilon)\right| < \delta, \quad \forall\,\varepsilon < \varepsilon_0,$$
$$(5.2)$$

где через

$$(\mathbf{y}_\varepsilon^{sub}, p_\varepsilon^{sub}, \theta_\varepsilon^{sub}) = \big(\mathbf{y}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon^{sub}), p_\varepsilon^{sub}(\overline{\alpha}_\varepsilon^{sub}), \theta_\varepsilon^{sub}(\overline{\alpha}_\varepsilon^{sub})\big)$$

обозначено соответствующее решение краевой задачи (2.1)–(2.6).

В основу построения субоптимальных управлений положим подход, основанный на вариационной сходимости задач условной минимизации (см. [8,15,25–27,33]). С этой целью изучим асимптотическое поведение задачи ($\mathbb{P}_\varepsilon$) при $\varepsilon \to 0$, представив ее при различных значениях параметра ε в форме следующей последовательности задач условной минимизации:

$$\Big\{\Big\langle \inf_{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon} \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\Big\rangle\,;\, \varepsilon > 0\Big\}. \tag{5.3}$$

Определение 5.2. *Будем говорить, что задача условной минимизации*

$$\Big\langle \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)\in\,\Xi_0} \mathcal{I}_0(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)\Big\rangle \tag{5.4}$$

является вариационным $w-$пределом последовательности (5.3) *при $\varepsilon \to 0$, если имеют место следующие свойства:*

(1) *из того, что последовательность $\{(\overline{\alpha}_k, \mathbf{y}_k, p_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ w-сходится к $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)$ при $k \to \infty$ и для нее существует последовательность значений $\{\varepsilon_k\}$ параметра $\{\varepsilon\}$ такая, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $(\overline{\alpha}_k, \mathbf{y}_k, p_k, \theta_k) \in \Xi_{\varepsilon_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, следует*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \Xi_0, \quad \mathcal{I}_0((\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{I}_{\varepsilon_k}(\overline{\alpha}_k, \mathbf{y}_k, p_k, \theta_k); \tag{5.5}$$

(2) *для любого набора функций $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \Xi_0$ найдется последовательность допустимых решений $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ такая, что*

$$\begin{gathered}(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{\ w\ } (\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \quad \textit{и}\\ \mathcal{I}_0(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \ge \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon).\end{gathered} \tag{5.6}$$

Основные свойства w-предельной задачи (5.4) представлены в следующей теореме (см. [11, 12, 28, 29])

Теорема 5.1. *Пусть* (5.4) *есть вариационным $w-$пределом последовательности* (5.3). *Пусть также* $\left\{(\overline{\alpha}_\varepsilon^0, \mathbf{y}_\varepsilon^0, p_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ *последовательность оптимальных решений задач* $\mathbb{P}_\varepsilon$. *Тогда существует набор* $(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0) \in \Xi_0$ *такой, что*

$$(\overline{\alpha}_\varepsilon^0, \mathbf{y}_\varepsilon^0, p_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0) \xrightarrow{w} (\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0), \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\inf_{(\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta)\in\Xi_0} \mathcal{I}_0(\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta) &= \mathcal{I}_0\left(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon} \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Далее будет показано, что любое оптимальное решение для w-предельной задачи (5.4) может быть взято в качестве основы для построения субоптимального управления в смысле определения 5.1.

6. Теорема сходимости

Цель данного раздела состоит в изучении асимптотического поведения решений краевой задачи (2.1)–(2.6) при $\varepsilon \to 0$. Везде далее будем предполагать выполненными гипотезы (H1)–(H8). Обозначим через μ_{kj} составляющие вектор-функций $\mu_k \in \mathbf{W}^{-1,\infty}(\Omega)$ $(1 \le k \le 3)$, существование которых оговорено в гипотезе (H1). Начнем с ряда вспомогательных результатов.

Лемма 6.1. $\mu_{ij} \in \mathcal{M}_b(\Omega), \quad \forall\, i,j \ : (1 \le i,j \le 3)$.

Доказательство. Покажем, что для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ с нулевой емкостью, верно равенство $\mu_{ij}(K) = 0$. Из элементарных свойств мер Радона следует, что $\mu_{ij}(D) = 0$ для любого борелевого множества $D \subset \Omega$ нулевой емкости.

Далее, пусть K — компактное подмножество Ω. Тогда очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется функция $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\varphi_k \ge \chi_K,\ 0 \le \varphi_k \le 1,\ \|\varphi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1/k$. В силу гипотезы (H4), имеем:

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0, \\ \forall\, \mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\ :\ \mathbf{v}_\varepsilon \rightharpoonup 0 \ \text{ в } \ \mathbf{H}^1(\Omega) \ \text{ и } \ \mathbf{v}_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \mathrm{T}_\varepsilon.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Применяя это свойство к последовательности вида $\{\mathbf{v}_{\varepsilon,k} = \varphi_k \mathbf{w}_j^\varepsilon\}$, получим, что для любого $\delta > 0$ найдутся $\varepsilon_0(\delta)$ и $k_0(\delta)$, при которых

$$\begin{aligned}\left|\,\langle \nabla q_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)}\right| + \left|\,\langle -\Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)}\right| \le \delta,& \\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0(\delta),\ k > k_0(\delta).&\end{aligned}$$

Тогда, следуя гипотезе (H2), находим

$$\langle \nabla q_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = -\int\limits_\Omega q_i^\varepsilon \mathbf{w}_j^\varepsilon \cdot \nabla\varphi_k \, dx.$$

Учитывая, что

$$\left| \langle \nabla q_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right| \le \|q_i^\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega)} \| \|\mathbf{w}_j^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\mathrm{div},\Omega)} \|\varphi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C}{k},$$

$$\langle -\Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \varphi_k \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon \, dx + \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_j^\varepsilon \nabla\varphi_k \, dx,$$

и

$$\left| \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_j^\varepsilon \nabla\varphi_k \, dx \right| \le \|\mathbf{w}_i^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{w}_j^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla\varphi_k\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \frac{C}{k} \ ,$$

получаем

$$\int\limits_\Omega \left| \varphi_k \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon \right| \, dx \le 2\delta, \quad \forall\, \varepsilon < \varepsilon_1(\delta), \ k > k_1(\delta). \tag{6.2}$$

В силу гипотезы (H3), каждая из последовательностей $\{\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\}$ $(1 \le i,j \le 3)$ ограничена в $L^1(\Omega)$. Тогда, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно предположить существование симметрической матрицы $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{1\le i,j\le 3}$ ограниченных мер Радона μ_{ij} таких, что $\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon$ сходится к μ_{ij} в $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{M}_b(\Omega)$. В результате, предельный переход в неравенстве (6.2) при $\varepsilon \to 0$ дает: $\int_\Omega \varphi_k \, d\mu_{ij} \le 2\delta$, $\forall\, k > k_1(\delta)$. Однако, так как $\varphi_k \ge \chi_K$, то справедливо неравенство $\mu_{ij}(K) \le 2\delta$, $\forall\, \delta > 0$, что и завершает доказательство леммы. □

Лемма 6.2. *Для любой функции* $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *и любых* i,j : $(1 \le i,j \le 3)$, *справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \varphi \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon \right) \, dx = \int\limits_\Omega \varphi \, d\mu_{ij}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда, следуя рассуждениям из [9], рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)\}$, обладающих свойствами:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty, \quad \varphi_k \to \varphi \ \text{ in } \ H_0^1(\Omega) \ \text{ и } \ \mu_{ij} - \text{п.в. в } \ \Omega.$$

(существование такой последовательности функций доказано в [37]). Далее, верно неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega \varphi \left|\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right| \, dx - \int\limits_\Omega \varphi \, d\mu_{ij}\right| \\ \leq \int\limits_\Omega \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) |\varphi - \varphi_k| \, dx \\ + \left|\int\limits_\Omega \varphi_k \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \, dx - \int\limits_\Omega \varphi_k \, d\mu_{ij}\right| + \int\limits_\Omega |\varphi_k - \varphi| \, d\mu_{ij}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при фиксированном k и учитывая $*$-слабую сходимость $(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon)$ к μ_{ij} в $\mathcal{M}_b(\Omega)$, получим

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left|\int\limits_\Omega \varphi \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \, dx - \int\limits_\Omega \varphi \, d\mu_{ij}\right| \\ \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left|\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right| |\varphi - \varphi_k| \, dx \\ + \limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega |\varphi_k - \varphi| \, d\mu_{ij}.$$

Теперь, переходя к пределу при $k \to \infty$, находим

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left|\int\limits_\Omega \varphi \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \, dx - \int\limits_\Omega \varphi \, d\mu_{ij}\right| \\ \leq \lim_{k \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega \left|\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right| |\varphi - \varphi_k| \, dx.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства равна нулю. Применим свойство (6.1) к последовательности $\{\mathbf{v}_{\varepsilon,k} = \pm|\varphi_k - \varphi|\mathbf{w}_j^\varepsilon\}$. Имеем,

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} \left[\pm \int\limits_\Omega |\varphi_k - \varphi| \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \, dx \right. \\ \left. \pm \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_j^\varepsilon \nabla |\varphi_k - \varphi| \, dx\right] = 0.$$

Далее, т.к. $\int_\Omega \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_j^\varepsilon \nabla |\varphi_k - \varphi|\, dx \le 2\|\mathbf{w}_i^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{w}_j^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla|\varphi_k - \varphi|\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ и $\varphi_k \to \varphi$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \left| \int_\Omega \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_j^\varepsilon \nabla |\varphi_k - \varphi|\, dx \right| = 0.$$

Таким образом, $\lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon||\varphi - \varphi_k|\, dx = 0$, что и требовалось доказать. □

Лемма 6.3. *Если последовательность* $\{\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\}$ *и функция* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *такие, что* $\mathbf{v}_\varepsilon = 0$ *на* T_ε *и* $\mathbf{v}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}$ *в* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, *тогда* $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^1(\Omega, d\mu_i)$ *для любого* $i\ : (1 \le i \le 3)$.

Доказательство. Для любого $k > 0$ определим скалярную функцию срезки $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, чтобы $T_k(s) = k$, если $s \ge k$; $T_k(s) = s$, если $-k \le s \le k$; и $T_k(s) = -k$, если $s \le -k$. Векторный вариант такой функции обозначим через $\mathbf{T}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Пусть $\{\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\}$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ — заданные выше функции. Покажем, что имеет место следующее равенство

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \left| \langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \mathbf{T}_k(\mathbf{v})\, d\mu_i \right| = 0, \quad (6.4)$$

из которого следует, в частности, что величина $\int_\Omega \mathbf{T}_k(\mathbf{v})\, d\mu_i$ ограничена по k, и поэтому применяя теорему Беппо–Леви о монотонной сходимости, получаем $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^1(\Omega, d\mu_i)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{R}$, определим функцию $\mathbf{v}_{\varepsilon,k}$ по правилу $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon) + \mathbf{v}_{\varepsilon,k}$ и заметим, что

$$\begin{aligned} &\left| \langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \mathbf{T}_k(\mathbf{v})\, d\mu_i \right| \\ &\qquad \le \left| \langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{v}_{\varepsilon,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right| \\ &\qquad + \left| \langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_i^\varepsilon, \mathbf{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \mathbf{T}_k(\mathbf{v})\, d\mu_i \right| \\ &\qquad = I_1 + I_2. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Тогда, для каждого фиксированного k, I_2 стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ согласно гипотезе (H4) (см. доказательство леммы 6.1). Учитывая свойство (6.1), находим $I_1 \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Тем самым, соотношение (6.4) доказано, что и требовалось установить. □

Следующий шаг касается идентификации матрицы $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{1\le i,j\le 3}$, где μ_{ij} — $*$-слабые пределы последовательностей $\{\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\}$ в пространстве $\mathcal{M}_b(\Omega)$.

Лемма 6.4. *Пусть функции* $\mathbf{w}_j^\varepsilon = (w_{j,1}^\varepsilon, w_{j,2}^\varepsilon, w_{j,3}^\varepsilon)^t \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ $(1 \le j \le 3)$ *такие, что*

$$w_{j,k}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad j \ne k. \tag{6.6}$$

Тогда $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33})$.

Доказательство. Согласно гипотезе (H3) и теореме Реллиха-Кондрашева заключаем, что $\mathbf{w}_j^\varepsilon = (w_{j,1}^\varepsilon, w_{j,2}^\varepsilon, w_{j,3}^\varepsilon)^t$ сходится к $\mathbf{e}_j$ сильно в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Кроме того, в силу свойства (6.6), имеем $w_{j,k}^\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $H_0^1(\Omega)$, $w_{j,k}^\varepsilon \to 0$ в $L^2(\Omega)$, $\forall\, j \ne k$. Поэтому, используя неравенство Фридрихса, находим

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla w_{j,k}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C \limsup_{\varepsilon\to 0} \|w_{j,k}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, j \ne k. \tag{6.7}$$

Пусть пара индексов (i,j) есть такой, что $i \ne j$ и $1 \le i,j \le 3$. Тогда, переходя при необходимости к подпоследовательности, заключаем: найдется ограниченная мера Радона μ_{ij} такая, что $\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon \rightharpoonup \mu_{ij}$ в $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{M}_b(\Omega)$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \varphi\, dx = \int\limits_\Omega \varphi\, d\mu_{ij}, \quad \forall\, \varphi \in C_0(\Omega).$$

Учитывая, что $\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon = \sum_{k=1}^3 \nabla w_{i,k}^\varepsilon \cdot \nabla w_{j,k}^\varepsilon$, приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon\right) \varphi\, dx \le \|\varphi\|_{C_0(\Omega)} \sum_{k=1}^3 \|\nabla w_{i,k}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla w_{j,k}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{6.8}$$

Далее, используя свойство (6.7) и переходя к пределу в (6.8) при $\varepsilon \to 0$, окончательно получаем: $\mu_{ij} = 0$. $\square$

Для проверки гипотез (H1)–(H5) и идентификации мер μ_{ij}, покроем множество $\widetilde{\Omega}$ непересекающимися квадратами со сторонами ε, обозначив их символами $\varepsilon \widetilde{Y}_j$. Соответствующие цилиндрические ячейки $\varepsilon \widetilde{Y}_j \times (0,\ell)$ обозначим через Z_j^ε. Следуя идеям работ Cioranescu & Murat [10] и Allaire [3], введем в рассмотрение функции $\mathbf{w}_k^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(Z_j^\varepsilon)$, $\omega_\varepsilon \in \mathrm{H}^1(Z_j^\varepsilon)$, и $q_k^\varepsilon \in L^2(Z_j^\varepsilon)$, где $\int_{Z_j^\varepsilon} q_k\, dx = 0$ и $(k = 1,2,3)$, по следующему правилу:

(1) если ячейка Z_j^ε имеет непустое пересечение с границей Γ_3, то

$$\{\mathbf{w}_k^\varepsilon = \mathbf{e}_k, \quad \omega_\varepsilon = 1, \quad q_k^\varepsilon = 0\} \quad \text{в} \quad Z_j^\varepsilon \cap \Omega. \tag{6.9}$$

(2) если ячейка Z_j^ε целиком принадлежит множеству Ω (т.е. для всех $\mathbf{k} \in \Theta_\varepsilon$), то

$$\begin{gathered}
\{\mathbf{w}_k^\varepsilon = \mathbf{e}_k,\ \omega_\varepsilon = 1,\ q_k^\varepsilon = 0\} \ \text{ в } \ Z_{\mathbf{k}}^\varepsilon \setminus [\varepsilon\,(A + \mathbf{k}) \times (0,\ell)]\,, \\
\{-\Delta \mathbf{w}_k^\varepsilon + \nabla q_k^\varepsilon = 0,\ -\Delta\omega_\varepsilon = 0,\ \nabla\cdot \mathbf{w}_k^\varepsilon = 0\} \\
\text{в } \ \varepsilon\,(A \setminus Q^{r_\varepsilon} + \mathbf{k}) \times (0,\ell), \\
\{\mathbf{w}_k^\varepsilon = 0,\ \omega_\varepsilon = 0,\ q_k^\varepsilon = 0\} \ \text{ в } \ \varepsilon\,(Q^{r_\varepsilon} + \mathbf{k}) \times (0,\ell).
\end{gathered} \tag{6.10}$$

Ясно, что исходя из специфики перфорации множества Ω_ε, функции $\mathbf{w}_k^\varepsilon$, ω_ε и q_k^ε, согласно их определениям (6.9)–(6.10), можно взять независящими от координаты x_3. Таким образом, далее будем полагать, что

$$\mathbf{w}_k^\varepsilon = \mathbf{w}_k^\varepsilon(x_1,x_2),\ \omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon(x_1,x_2),\ q_k^\varepsilon = q_k^\varepsilon(x_1,x_2) \tag{6.11}$$

для всех $1 \le k \le 3$. В результате такого выбора функций $\mathbf{w}_k^\varepsilon$, ω_ε и q_k^ε, как показано в работах [3, 10], будет справедливым следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть поперечный размер $\varepsilon r_\varepsilon$ цилиндров $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}$ удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \left(\log 1/r_\varepsilon\right) > 0, \tag{6.12}$$

а функции $(\mathbf{w}_k, q_k^\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ $(k = 1,2,3)$ определены равенствами (6.9)–(6.10)*. Тогда найдутся распределения*

$$\mathbf{M} = (\mu_1, \mu_2, \mu_2) \in \left[\mathcal{M}_0^+(\Omega)\right]^{3\times 3}, \quad \mu \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$$

и оператор $R_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)\right)$ такие, что гипотезы (H1)–(H8) *будут выполнены. При этом $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33})$ является диагональной положительно определенной матрицей, а линейный оператор R_ε связан соотношением* (3.4) *с оператором продолжения $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega_\varepsilon); L_0^2(\Omega))$ следующего вида:*

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) = p_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) = \frac{1}{\ell |A^\varepsilon \setminus Q^{\varepsilon r_\varepsilon}|} \int\limits_{(A^\varepsilon \setminus Q^{\varepsilon r_\varepsilon} + \varepsilon\mathbf{k}) \times (0,\ell)} p_\varepsilon\, dx \quad \text{на цилиндрах} \ \ \mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}.$$

С целью идентификации матрицы $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33})$, которая определяется как *-слабый предел последовательностей $\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \mathbf{w}_i^\varepsilon$ в пространстве $\mathcal{M}_b(\Omega)$, установим следующий результат.

Лемма 6.5. *Пусть граница* ∂Q *множества* Q *является гладким многообразием* ($\partial Q \in C^\infty$) *и содержит точку* $(0,0)$. *Пусть также выполняется* (6.12). *Тогда для последовательности* $\left\{\mathbf{w}_i^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)\right\}$ $(1 \le i \le 3)$, *которая определена соотношениями* (6.9)–(6.10), *имеет место сходимость* $(\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon) \rightharpoonup \mu_{ii}^*$ *$*$-слабо в* $\mathcal{M}_b(\Omega)$, *где*

$$\mu_{ii}^* = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon^{-1}, \quad \forall\, i : 1 \le i \le 3. \tag{6.13}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся подходом, предложенным в работе [13]. Пусть всюду далее $|\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2 = (\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon)$. Обозначим через εY_j кубическую ячейку со стороной ε, на которые разбита исходная область Ω. Ясно, что $|\varepsilon Y_j| = \varepsilon|\varepsilon \widetilde{Y}_j| = \varepsilon^3$ и $|\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2 = \sum_{k=1}^3 |\nabla w_{i,k}^\varepsilon|^2$, где $w_{i,i}^\varepsilon \rightharpoonup 1$ в $H^1(\Omega)$, и $w_{i,k}^\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $H_0^1(\Omega)$ для любого $k \ne i$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi\, |\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2\, dx \\ &= \int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi\, |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx + \sum_{k \ne i} \int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi\, |\nabla w_{ik}^\varepsilon|^2\, dx \\ &= \int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi\, |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx + S_j(\varepsilon)\end{aligned}$$

для любой функции $\varphi \in C_0(\Omega)$. Следовательно, основываясь на представлении (6.11), имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x_j^\varepsilon)\varepsilon \int\limits_{\varepsilon \widetilde{Y}_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx \\ &= \varphi(x_j^\varepsilon) \int\limits_{\varepsilon Y_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx \le \int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi\, |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx \\ &\le \varphi(y_j^\varepsilon) \int\limits_{\varepsilon Y_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx = \varphi(y_j^\varepsilon)\varepsilon \int\limits_{\varepsilon \widetilde{Y}_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2\, dx,\end{aligned}$$

при некоторых $x_j^\varepsilon, y_j^\varepsilon \in \varepsilon Y_j$. Объединяя это отношение с предыдущим, получим

$$\varepsilon \int\limits_{\varepsilon\widetilde{Y}_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2 \, dx + S_j(\varepsilon) \leq \int\limits_{\varepsilon Y_j} |\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2 \varphi \, dx$$
$$\leq \varphi(y_j^\varepsilon)\varepsilon \int\limits_{\varepsilon\widetilde{Y}_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2 \, dx + S_j(\varepsilon). \quad (6.14)$$

Из определения емкости множества следует, что

$$\int\limits_{\varepsilon\widetilde{Y}_j} |\nabla w_{ii}^\varepsilon|^2 \, dx = \operatorname{cap}\big(Q^{\varepsilon r(\varepsilon)}, A^\varepsilon\big) = \operatorname{cap}\left(r_\varepsilon Q, A\right) = \operatorname{cap}\left(Q, r_\varepsilon^{-1} A\right). \quad (6.15)$$

Однако, согласно лемме 3.3 из [13], справедливо представление

$$\operatorname{cap}\left(K, r_\varepsilon^{-1} A\right) = \frac{2\pi}{\log(1/r_\varepsilon)} \left(1 + c_\varepsilon\right) = 2\pi\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^{-1}\left(1 + c_\varepsilon\right), \text{ где } \lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon = 0. \quad (6.16)$$

Теперь, объединяя соотношения (6.14)–(6.16), приходим к следующему неравенству

$$2\pi\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^{-1}\left(1 + c_\varepsilon\right) \sum_j \varepsilon^3 \varphi(x_j^\varepsilon) + \sum_j S_j(\varepsilon) \leq \sum_j \int\limits_{\varepsilon Y_j} |\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2 \varphi \, dx$$
$$\leq 2\pi\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^{-1}\left(1 + c_\varepsilon\right) \sum_j \varepsilon^3 \varphi(y_j^\varepsilon) + \sum_j S_j(\varepsilon). \quad (6.17)$$

Учитывая, что

$$-\|\varphi\|_{C_0(\Omega)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\nabla w_{ik}^\varepsilon|^2 \, dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_j \int\limits_{\varepsilon Y_j} \varphi \, |\nabla w_{ik}^\varepsilon|^2 \, dx$$
$$\leq \|\varphi\|_{C_0(\Omega)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\nabla w_{ik}^\varepsilon|^2 \, dx,$$

и принимая во внимание лемму 6.4 (а также свойства римановых сумм для $\int_\Omega \varphi \, dx$), можем перейти в (6.17) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Как результат, имеем

$$2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^{-1} \int\limits_\Omega \varphi \, dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\nabla \mathbf{w}_i^\varepsilon|^2 \varphi \, dx \leq 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^{-1} \int\limits_\Omega \varphi \, dx,$$
$$\forall\, \varphi \in C_0(\Omega).$$

Следовательно, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla w_\varepsilon|^2 \varphi \, dx = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^{-1}$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

В полной аналогии к предыдущему, можно установить результат (см. также [9, 10, 12]).

Лемма 6.6. *Пусть выполняются все условия леммы* 6.5. *Пусть функции* $\{w_\varepsilon \in H^1(\Omega)\}$ *определены как в* (6.9)–(6.10). *Тогда* $|\nabla w_\varepsilon|^2 \to \mu^*$ $*$*-слабо в* $\mathcal{M}_b(\Omega)$, *где* $\mu^* = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^{-1}$, *т.е.* $\int_\Omega \varphi\,|\nabla w_\varepsilon|^2\,dx \to \int_\Omega \varphi\mu^*\,dx$ *для любых* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Перейдем к рассмотрению основного вопроса данного раздела, а именно к изучению предела при $\varepsilon \to 0$ в следующих соотношениях:

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \mathbf{y}_\varepsilon : \nabla \mathbf{v})\,dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{y}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{y}_\varepsilon\cdot\mathbf{v}\,dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \\ \qquad\qquad\displaystyle = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \overrightarrow{\mathbf{e}_3}\cdot\mathbf{v}\,dx,\ \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega_\varepsilon} q \operatorname{div}\mathbf{y}_\varepsilon\,dx = 0, \quad \forall\, q\in L_0^2(\Omega_\varepsilon), \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon\cdot\nabla\varphi_\varepsilon dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{y}_\varepsilon\cdot\nabla\theta_\varepsilon\varphi_\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \overrightarrow{\mathbf{e}_3}\cdot\mathbf{y}_\varepsilon\varphi_\varepsilon\,dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi_\varepsilon\in H_0^1(\Omega_\varepsilon). \end{cases} \tag{6.18}$$

Схема дальнейших рассуждений стандартна и основана на энергетическом методе Tartar [35] и его адаптации для уравнений Навье–Стокса (см. Allaire [3]).

Теорема 6.2. *Пусть* $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *последовательность допустимых решений задачи* $\mathbb{P}_\varepsilon$ *такая, что*

$$(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \tag{6.19}$$

и пусть поперечный размер $\varepsilon r_\varepsilon$ *цилиндров* $\mathrm{T}_\varepsilon^{\mathbf{k}}$ *удовлетворяет соотношению* (6.12). *Тогда* $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$, *и тройка* $(\mathbf{y}, p, \theta)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ *является решением следующей вариационной задачи:*

$$\mathbf{y}-\mathbf{u}\in\mathbf{H}_{0,sol}^1(\Omega), \quad \theta - b\in H_0^1(\Omega), \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega (\nabla\mathbf{y} : \nabla\mathbf{v})\,dx + \frac{2\pi}{C_0}\int\limits_\Omega (\mathbf{y}-\mathbf{u})\mathbf{v}\,dx + \int\limits_\Omega (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}\,dx \\ &\qquad + \int\limits_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{v}\,dx = \int\limits_\Omega \theta\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\cdot\mathbf{v}\,dx, \quad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\int\limits_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{y}\, dx = 0, \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla\varphi\, dx + \frac{\pi}{2C_0} \int\limits_{\Omega} (\theta - b)\, \varphi\, dx + \int\limits_{\Omega} \mathbf{y} \cdot \nabla\theta\varphi\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \mathbf{y} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_3}\varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1\,(\Omega)\,. \quad (6.22)$$

Замечание 6.1. Соответствующая краевая задача для (6.20)–(6.22) может быть представлена как

$$-\triangle\mathbf{y} + \frac{2\pi}{C_0}(\mathbf{y} - \mathbf{u}) + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \theta\overrightarrow{\mathbf{e}_3} \text{ в } \Omega; \quad (6.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0 \quad \text{ в } \Omega; \quad (6.24)$$

$$\mathbf{y}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}; \quad (6.25)$$

$$-\Delta\theta + \frac{2\pi}{C_0}\,(\theta - b) + \mathbf{y} \cdot \nabla\theta = \mathbf{y} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_3}; \quad (6.26)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = b|_{\partial\Omega}. \quad (6.27)$$

Как следует из (6.23)–(6.27), в случае, когда тонкие цилиндры имеют, так называемый, критический размер ($0 < C_0 < +\infty$), предельная система уравнений движения дополняется двумя новыми слагаемыми $\frac{2\pi}{C_0}(\mathbf{y} - \mathbf{u})$ и $\frac{2\pi}{C_0}(\theta - b)$. Эти соотношения выражают закон Биркмана движения вязкой несжимаемой жидкости в условиях теплоподвода (см. [6]).

Доказательство. Пусть $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — заданная последовательность допустимых решений задачи $\mathbb{P}_\varepsilon$, и пусть $\{(\mathbf{u}_\varepsilon, \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon, \breve{p}_\varepsilon, \breve{\theta}_\varepsilon^b) \in \widehat{\Xi}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность их прототипов. Будем полагать, что $\{\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограничена в $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\{\breve{\theta}_\varepsilon^b\}_{\varepsilon>0}$ ограничена в $H^1(\Omega)$, а каждая из функций $\breve{p}_\varepsilon$ определена как $P_\varepsilon(p_\varepsilon) \in L_0^2(\Omega)$ (см. замечание 3.4). Тогда, последовательность $\{(\mathbf{u}_\varepsilon, \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon, \breve{p}_\varepsilon, \breve{\theta}_\varepsilon^b) \in \widehat{\Xi}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограничена в переменном пространстве $\mathbb{X}_\varepsilon$, а значит, учитывая (6.19), она сходится к

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \left[\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega)\right] \times \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

в смысле определения 4.3.

Далее, пусть $\left\{(\mathbf{w}_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность пробных функций, определенная гипотезами (H1)–(H4). Пусть также $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{f}_\varepsilon = \theta_\varepsilon\overrightarrow{\mathbf{e}_3}$. Ясно, что $\varphi\mathbf{w}_k^\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega)$ и

$\varphi q_k^\varepsilon \in L_0^2(\Omega)$ для любого $\varepsilon > 0$. Теперь, подставляя в соотношения (6.18) функции $\mathbf{v} = \varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega_\varepsilon)$, $q = \varphi q_k^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla(\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla(\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon ((\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\cdot \nabla)(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx - \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div}(\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx = \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_{\mathbf{k}}^\varepsilon)\, dx\,; \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi\, q_k^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{y}_\varepsilon\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi\, q_k^\varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\, dx = 0. \tag{6.29}$$

Учитывая в (6.28) бездивергентность функции $\mathbf{w}_k^\varepsilon$, находим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) : \mathbf{w}_k^\varepsilon \nabla\varphi\, dx \\ + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \mathbf{w}_k^\varepsilon \nabla\varphi\, dx \\ + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon ((\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\cdot \nabla)(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx \\ - \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon)\, dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \mathbf{w}_k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx \\ = \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varphi \mathbf{w}_{\mathbf{k}}^\varepsilon\, dx. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Тогда, интегрируя по частям в (6.29), имеем

$$\langle \nabla q_k^\varepsilon, \varphi\, \chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon q_k^\varepsilon\, \nabla\varphi \cdot (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\, dx = 0. \tag{6.31}$$

Складывая два последних соотношения и учитывая тот факт, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla(\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \,:\, \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon \, dx$$
$$= - \langle \Delta \mathbf{w}_k^\varepsilon, \varphi \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)}$$
$$- \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \nabla \varphi : \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon \, dx, \quad (6.32)$$

получим

$$\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_k^\varepsilon, \varphi \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \,:\, \mathbf{w}_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon q_k^\varepsilon \nabla \varphi \cdot (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \, dx - \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \nabla \varphi : \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon \, dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \nabla (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \,:\, \mathbf{w}_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \varphi (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon \,:\, \nabla \mathbf{w}_k^\varepsilon) \, dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon ((\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla)(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon) \, dx + \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon) \, dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon) \, dx - \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot (\varphi \mathbf{w}_k^\varepsilon) \, dx$$
$$- \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \breve{p}_\varepsilon \mathbf{w}_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varphi \mathbf{w}_{\mathbf{k}}^\varepsilon \, dx. \quad (6.33)$$

Теперь перейдем к пределу в (6.33) при $\varepsilon \to 0$, учитывая следующие факты: $\mathbf{w}_k^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{e}_k$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$; $\nabla \mathbf{w}_j^\varepsilon$ сходится поточечно и слабо в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ к нулю; $\chi_\varepsilon \to 1$ в $L^2(\Omega)$; $q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $L_0^2(\Omega)$; $\breve{p}_\varepsilon = P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p$ в $L_0^2(\Omega)$; последовательность $\{\chi_\varepsilon(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)\}$ удовлетворяет гипотезе (H4); нелинейный член $((\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla)(\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon)$ сходится сильно к $((\mathbf{y} - \mathbf{u}) \cdot \nabla)(\mathbf{y} - \mathbf{u})$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$; из соотношения (6.19) следует, что $\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. В результате, имеем

$$\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_k^\varepsilon, \varphi \chi_\varepsilon (\breve{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)}$$
$$\to \langle \mu_k, \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{u}) \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} \overset{\text{согласно леммы 6.5}}{=} \frac{2\pi}{C_0} \int\limits_{\Omega} \varphi \, \overrightarrow{\mathbf{e}_k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{u}) \, dx,$$

и, следовательно, применяя теорему Реллиха к (6.33), получим

$$\frac{2\pi}{C_0}\int\limits_{\Omega}\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{u})\,dx+\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{y}\,:\,\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\nabla\varphi\,dx$$
$$+\int\limits_{\Omega}(\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y}\cdot(\varphi\overrightarrow{\mathbf{e}_k})\,dx-\int\limits_{\Omega}p\,\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\cdot\nabla\varphi\,dx=\int\limits_{\Omega}\mathbf{f}\cdot\varphi\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\,dx,$$
$$\forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\ \text{ для любого }\ k=1,2,3, \quad (6.34)$$

где $\mathbf{f}=\theta\overrightarrow{\mathbf{e}_3}$, $\theta=\theta^*+b$, $\breve{\theta}_\varepsilon^b-b\rightharpoonup\theta^*$ в $H_0^1(\Omega)$.

Далее, интегрируя по частям в выражении $\int_\Omega p\,\overrightarrow{\mathbf{e}_k}\cdot\nabla\varphi\,dx$, и учитывая соотношения (6.34) и (4.6), окончательно получаем: четверка $(\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{y}\,:\,\nabla\Phi\,dx+\frac{2\pi}{C_0}\int\limits_{\Omega}(\mathbf{y}-\mathbf{u})\cdot\Phi\,dx+\int\limits_{\Omega}(\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y}\cdot\Phi\,dx$$
$$+\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot\Phi\,dx=\int\limits_{\Omega}\theta\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\cdot\Phi\,dx,\quad\forall\,\Phi\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \quad (6.35)$$

$$\mathbf{y}-\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega),\quad \mathbf{u}\in\mathbf{U}. \quad (6.36)$$

Теперь рассмотрим последнее из соотношений (6.18), полагая в нем $\varphi_\varepsilon=\omega_\varepsilon\varphi$. Получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\theta_\varepsilon\cdot\nabla[\omega_\varepsilon\varphi]\,dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathbf{y}_\varepsilon\cdot\nabla\theta_\varepsilon[\omega_\varepsilon\varphi]\,dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\cdot\mathbf{y}_\varepsilon[\omega_\varepsilon\varphi]\,dx. \quad (6.37)$$

Поскольку

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\theta_\varepsilon\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx=\int\limits_{\Omega}\nabla\breve{\theta}^*_\varepsilon\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx+\int\limits_{\Omega}\nabla b\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx,$$

где положено $\breve{\theta}^*_\varepsilon=\breve{\theta}^b_\varepsilon-b$, $\breve{\theta}^*_\varepsilon\rightharpoonup\theta^*$ в $H_0^1(\Omega)$, и при этом

$$\int\limits_{\Omega}\nabla b\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx\to\int\limits_{\Omega}\nabla b\cdot\nabla\varphi\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\theta^*_\varepsilon\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx=\int\limits_{\Omega}\nabla\theta^*_\varepsilon\cdot\omega_\varepsilon\nabla\varphi\,dx+\int\limits_{\Omega}\nabla\theta^*_\varepsilon\cdot\varphi\nabla\omega_\varepsilon\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\theta^*_\varepsilon\cdot\omega_\varepsilon\nabla\varphi\,dx\to\int\limits_{\Omega}\nabla\theta^*\cdot\nabla\varphi\,dx,$$

$$\int_\Omega \nabla\theta_\varepsilon^* \cdot \varphi\nabla\omega_\varepsilon\,dx = \langle -\Delta\omega_\varepsilon, \varphi\theta_\varepsilon^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \theta_\varepsilon^*\nabla\varphi\cdot\nabla\omega_\varepsilon\,dx,$$

$$\int_\Omega \theta_\varepsilon^*\nabla\varphi\cdot\nabla\omega_\varepsilon\,dx \to \int_\Omega \theta^*\nabla\varphi\cdot\nabla 1\,dx = 0,$$

а также, согласно гипотезе $(H8)$,

$$\langle -\Delta\omega_\varepsilon, \varphi\theta_\varepsilon^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \to \langle \mu, \varphi\theta^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,,$$

то окончательно получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\theta_\varepsilon\cdot\nabla\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx \to \int_\Omega \nabla\theta\cdot\nabla\varphi\,dx + \langle \mu, \varphi\theta^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,, \tag{6.38}$$

где положено $\theta = \theta^* + b$. Следовательно,

$$\int_\Omega \check{\mathbf{y}}_\varepsilon\cdot\nabla\theta_\varepsilon\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx = \int_\Omega \check{\mathbf{y}}_\varepsilon\cdot\nabla\theta_\varepsilon^*\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx + \int_\Omega \check{\mathbf{y}}_\varepsilon\cdot\nabla b\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx$$

$$\to \int_\Omega \mathbf{y}\cdot\nabla\theta^*\varphi\,dx + \int_\Omega \mathbf{y}\cdot\nabla b\varphi\,dx,$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{y}_\varepsilon\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx = \int_\Omega \check{\mathbf{y}}_\varepsilon\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\left[\omega_\varepsilon\varphi\right]dx \to \int_\Omega \mathbf{y}\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\varphi\,dx.$$

В результате, получаем:

$$\int_\Omega \nabla\theta\cdot\nabla\varphi\,dx + \langle \mu, \varphi\theta^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_o^1(\Omega)} + \int_\Omega \mathbf{y}\cdot\nabla\theta\varphi\,dx$$

$$= \int_\Omega \mathbf{y}\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_3}\varphi\,dx, \quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,, \tag{6.39}$$

где $\theta_\varepsilon^b \rightharpoonup \theta = \theta^* + b$ в $H^1(\Omega)$, что и требовалось установить. □

7. Вариационный предел функционала стоимости $\mathcal{I}_\varepsilon$

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении функционала качества $\mathcal{I}_\varepsilon : \Xi_\varepsilon \to \mathbb{R}$ (2.10) при $\varepsilon \to 0$, следуя рекомендациям работы [26]. Заметим, что функционал $\mathcal{I}_\varepsilon$ имеет смысл и определен только на множестве допустимых пар Ξ_ε, в то время как вне этого множества его можно считать неопределенным. В связи с этим воспользуемся концепцией вариационной сходимости таких функционалов, так как в этом случае предельный функционал, вообще говоря, может не совпадать с соответствующим Г-пределом последовательности $\{\mathcal{I}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ [27].

Определение 7.1. *Функционал $\mathcal{I}_o : \Xi_o \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть вариационным пределом последовательности $\{\mathcal{I}_\varepsilon : \Xi_\varepsilon \to \mathbb{R}\}_{\varepsilon>0}$ относительно* w*-сходимости, если:*

(i) *Ξ_o является топологическим* w*-пределом по Куратовскому системы множеств $\{\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$;*

(ii) *для любого набора $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \Xi_o$ найдется постоянная $\varepsilon_o > 0$ и* w*-сходящаяся последовательность $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ такая, что $(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$, и при этом*

$$\mathcal{I}_o(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon\right);$$

(iii) *для любой подпоследовательности $\{\Xi_{\varepsilon_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и любой* w*-сходящейся к некоторой четверке $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta)$ последовательности $\{(\overline{\alpha}_i, \mathbf{y}_i, p_i, \theta_i) \in \Xi_{\varepsilon_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, справедливо*

$$\mathcal{I}_o(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathcal{I}_{\varepsilon_i}\left(\overline{\alpha}_i, \mathbf{y}_i, p_i, \theta_i\right).$$

Отметим, что в силу (3.3), функционал $\mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon\right)$ можно представить в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon\left(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon\right) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{z}^\partial_\varepsilon\right|^2 dx + \beta|\partial Q|_H \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \, d\eta^{r_\varepsilon}_\varepsilon. \tag{7.1}$$

Следующее утверждение касается проблемы идентификации предельного функционала $\mathcal{I}_o : \Xi_o \to \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathbf{z}^\partial_\varepsilon \to \mathbf{z}_\partial$ сильно в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Тогда вариационный предел последовательности $\{\mathcal{I}_\varepsilon : \Xi_\varepsilon \to \mathbb{R}\}_{\varepsilon>0}$ представим в виде:*

$$\mathcal{I}_o(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) = \int\limits_{\Omega} \left|\mathbf{y} - \mathbf{z}_\partial\right|^2 dx + \beta|\partial Q|_H \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \tag{7.2}$$

Доказательство. Начнем с проверки условия (iii) определения 7.1. Пусть

$$\Xi_{\varepsilon_i} \ni (\overline{\alpha}_i, \mathbf{y}_i, p_i, \theta_i) \stackrel{\mathrm{w}}{\to} (\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \Xi_o.$$

Тогда согласно теоремам вложения и свойству полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости, имеем:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}_i}(\mathbf{y}_i) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_i, \text{ при } x \in \Omega_{\varepsilon_i} \\ \mathbf{u}_i, \text{ при } x \in \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_i} \end{array} \right\} \to \mathbf{y}$$

сильно в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ и слабо в $\mathbb{H}^2(\Omega)$, причем справедливо неравенство

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_i|^2 \, d\eta^r_{\varepsilon_i} \geq \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\liminf_{i\to\infty} \mathcal{I}_{\varepsilon_i}\left(\overline{\alpha}_i, \mathbf{y}_i, p_i, \theta_i\right) \\ &\quad = \liminf_{i\to\infty} \left\{ \int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon_i} \left|\mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\varepsilon_i}}\left(\mathbf{y}_{\varepsilon_i}\right) - \mathbf{z}^{\partial}_{\varepsilon_i}\right|^2 dx + \beta \left|\partial Q\right|_H \int\limits_{\Omega} \left|\mathbf{u}_{\varepsilon_i}\right|^2 d\eta^r_{\varepsilon_i} \right\} \\ &\quad \geq \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon_i} \left|\mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\varepsilon_i}}\left(\mathbf{y}_{\varepsilon_i}\right) - \mathbf{z}^{\partial}_{\varepsilon_i}\right|^2 dx + \beta \left|\partial Q\right|_H \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx \\ &\quad = \int\limits_{\Omega} |\mathbf{y} - \mathbf{z}_{\partial}|^2 \, dx + \beta \left|\partial Q\right|_H \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, через χ_ε обозначена характеристическая функция множества Ω_ε. Итак, свойство (iii) доказано. Перейдем к проверке свойства (ii). Пусть $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta) \in \Xi_o$ — произвольный фиксированный набор функций. Тогда найдется последовательность допустимых решений $\{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}$ такая, что

$$(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon) \xrightarrow{\mathrm{w}} (\mathbf{u}, \mathbf{y}).$$

Значит, $\overline{\alpha}_\varepsilon \xrightarrow{\mathrm{w}_a} \mathbf{u}$. Тогда, в силу теоремы о компактном вложении $\mathbb{H}^2(\Omega) \subset \mathbb{C}(\Omega)$ имеем: $\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u}$ в норме пространства $\mathbb{C}(\Omega)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \, d\eta^{r_\varepsilon}_\varepsilon \to \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx \quad \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{z}^{\partial}_\varepsilon\right|^2 dx + \beta \left|\partial C\right|_H \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \, d\eta^r_\varepsilon \right] = \mathcal{I}_o\left(\mathbf{u}, \mathbf{y}, p, \theta\right),$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, в случае перфорации области Ω тонкими цилиндрами критического поперечного сечения $0 < C_0 < +\infty$ (см. условие (6.12)), для семейства задач оптимального управления (2.8)–(2.10) существует предельная вариационная задача (5.4), которая может быть представлена в форме следующей задачи оптимального управления:

$$\text{Минимизировать } \mathcal{I}_o(\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta) = \int\limits_\Omega |\mathbf{y}-\mathbf{z}_\partial|^2\,dx + \beta|\partial Q|_H \int\limits_\Omega |\mathbf{u}|^2\,dx \tag{7.3}$$

при ограничениях

$$(\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta) \in \Xi_o, \tag{7.4}$$

где множество допустимых решений Ξ_o определяется соотношениями

$$\Xi_0 = \left\{ (\mathbf{u},\mathbf{y},p,\theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} p \in L^2_0(\Omega),\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega),\ \mathbf{y}-\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{0,sol}(\Omega), \\ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma^3} = 0, \\ -\triangle\mathbf{y} + \frac{2\pi}{C_0}(\mathbf{y}-\mathbf{u}) + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \theta\overrightarrow{\mathbf{e}_3} \ \text{ in } \Omega; \\ \operatorname{div}\,\mathbf{y} = 0 \ \text{ in } \Omega; \\ \mathbf{y}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \\ -\Delta\theta + \frac{2\pi}{C_0}(\theta - b) + \mathbf{y}\cdot\nabla\theta = \mathbf{y}\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_3} \ \text{ in } \Omega; \\ \theta|_{\partial\Omega} = b|_{\partial\Omega}. \end{array} \right\} \tag{7.5}$$

Всюду далее задачу (7.3)–(7.5) будем называть предельной (или усредненной) задачей оптимального управления.

8. Субоптимальные управления и их асимптотические свойства

В данном разделе изучим структуру субоптимальных управлений для исходной задачи оптимального управления (2.1)–(2.10) в случае, когда поперечный размер $\varepsilon r_\varepsilon$ цилиндров $\mathrm{T}^{\mathbf{k}}_\varepsilon$ удовлетворяет соотношению (6.12). Прежде всего заметим, что, согласно гипотезе (H5), существует оператор $\Lambda_\varepsilon : \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega) \mapsto \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon)$, обладающий свойствами:

$$\text{если } \ \mathbf{y} \in \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon), \ \text{ тогда } \ \Lambda_\varepsilon(\check{\mathbf{y}}) = \mathbf{y} \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \tag{8.1}$$

$$\|\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)} \le C\|\mathbf{u}\|^1_{\mathbf{H}}(\Omega), \ \text{ где константа } C > 0 \text{ не зависит от } \varepsilon. \tag{8.2}$$

Тем самым приходим к следующему результату:

Теорема 8.1. *Пусть* $\Lambda_\varepsilon : \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega) \mapsto \mathbf{H}^1_{sol}(\Omega_\varepsilon)$ *— линейный непрерывный оператор, для которого имеют место соотношения* (8.1)–(8.2), *и пусть также* $(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0) \in \Xi_0$ *является оптимальным решением предельной задачи (5.4). Тогда функция*

$$\overline{\alpha}_\varepsilon^{sub} = \left(\alpha^{sub}_{\mathbf{k}_1}, \alpha^{sub}_{\mathbf{k}_2}, \dots, \alpha^{sub}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}_\varepsilon}}\right) = \Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon} \tag{8.3}$$

является асимптотически субоптимальным управлением для исходной задачи $(\mathbb{P}_\varepsilon)$ *в смысле определения* 5.1.

Доказательство. Как следует из результатов работы [12, теорема 9.3] верны следующие свойства: пусть четверка $(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0)$ является оптимальным решением предельной задачи (5.4). Тогда имеют место соотношения

$$\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0) \in \mathbf{L}^2(\Omega, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)}), \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{8.4}$$

$$\begin{gathered} \Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon} \xrightarrow{w_a} \mathbf{u}^0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \\ \text{и} \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega \left|\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\right|^2 \, d\eta_\varepsilon^{r(\varepsilon)} = \int\limits_\Omega \left|\mathbf{u}^0\right|^2 \, dx. \end{gathered} \tag{8.5}$$

Далее, введем в рассмотрение последовательность $\{(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}, \widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, где тройка

$$(\widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon) = \left(\widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}), \widehat{p}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}, \widehat{\theta}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon})\right)$$

является соответствующим слабым решением краевой задачи (2.1)–(2.6). Теперь, повторяя почти дословно рассуждения работы [12] (см. теорема 9.3), можно заключить, что эта последовательность относительно компактна в смысле w-сходимости. Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, получим

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon) = \big(\widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}), \widehat{p}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}, \widehat{\theta}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon})\big) \\ \xrightarrow{\varepsilon \to 0} (\mathbf{u}^0, \widehat{\mathbf{y}}^0, \widehat{p}^0, \widehat{\theta}^0), \end{aligned}$$

где $(\mathbf{u}^0, \widehat{\mathbf{y}}^0, \widehat{p}^0, \widehat{\theta}^0)$ и $(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0)$ принадлежат одному классу эквивалентности. Поэтому, $\mathcal{I}_0(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0) = \mathcal{I}_0(\mathbf{u}^0, \widehat{\mathbf{y}}^0)$.

Пусть $\left\{(\overline{\alpha}^0_\varepsilon, \mathbf{y}^0_\varepsilon, p^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon > 0}$ — оптимальное решение задачи $(\mathbb{P}_\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\Big| \inf_{(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon} \mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon, p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) - \mathcal{I}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}, \widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon)\Big| \\ &\qquad = \Big|\mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}^0_\varepsilon, \mathbf{y}^0_\varepsilon, p^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon) - \mathcal{I}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\big|_{\widetilde{\partial \mathrm{T}}_\varepsilon}, \widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon, \widehat{\theta}_\varepsilon)\Big| \end{aligned}$$

$$\le \left|\mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha}^0_\varepsilon, \mathbf{y}^0_\varepsilon, p^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon) - \mathcal{I}_0(\mathbf{u}^0, \mathbf{y}^0, p^0, \theta^0)\right|$$
$$+ \left| \int\limits_\Omega |\widehat{\mathbf{y}}^{\,0} - \mathbf{z}_\partial|^2\, dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\widehat{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{z}^\partial_\varepsilon|^2\, dx \right|$$
$$+ \beta \left| |\partial Q|_H \int\limits_\Omega \left|\mathbf{u}^0\right|^2\, dx - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_{\widetilde{\partial} \mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon} \left|\, \Lambda_\varepsilon(\mathbf{u}^0)\right|_{\widetilde{\partial}\mathrm{T}^{\mathbf{k}_j}_\varepsilon} \left.\right|^2 d\mathcal{H}^2 \right|$$
$$= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3.$$

Для завершения доказательства заметим, что зафиксировав произвольное $\delta > 0$ можно указать: (1) $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $\mathcal{I}_1 < \delta/3$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_1$, согласно теоремы 7.1 и известных свойств вариационной сходимости; (2) $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\mathcal{I}_2 < \delta/3$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_2$, что следует из соотношений приведенных в доказательстве теоремы 7.1; (3) $\varepsilon_3 > 0$ такое, что $\mathcal{I}_3 < \delta/3$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_3$, согласно свойству (8.5). Для завершения доказательства достаточно положить $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ и воспользоваться определением 5.1. □

9. Выводы

Анализ полученных результатов показывает, что в случае критического способа перфорации цилиндрической области, предельная задача оптимального управления (7.3)–(7.5), которая служит основой для построения субоптимальных законов управления, существенным образом отличается от исходной. Во-первых, объектом управления выступает установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в однородной цилиндрической области, подчиняющееся термодинамическому закону Биркмана (за счет появления дополнительных слагаемых $\frac{2\pi}{C_0}(\mathbf{y} - \mathbf{u})$ и $\frac{2\pi}{C_0}(\theta - b)$ в уравнениях состояния (6.20) и (6.26)). Во-вторых, управление реализуется через граничное условие Дирихле на верхнем и нижнем основаниях цилиндрической области. При этом допустимыми управлениями выступают функции класса $\mathbf{H}^2(\Omega)$, подчиненные ограничениям

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_3} = 0.$$

В результате, в предельной задаче меняется тип и свойства множества допустимых управляющих воздействий. И в-третьих, несмотря на то, что управление является как граничным, так и распределенным по всей области, предельный функционал качества (7.3) содержит квадрат взвешенной нормы управления в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Таким образом, с точки зрения математической теории оптимальных систем, предельная задача (7.3)–(7.5) является принципиально отличной от исходной задачи управления в перфорированной области. Вместе с тем, ее отличительной чертой есть то обстоятельство, что она рассматривается в области с существенно более простой геометрией. Это позволяет для ее анализа, а значит для реализации субоптимальных управлений, эффективно использовать существующие численные алгоритмы.

Литература

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.

[2] F. Abergel, R. Temam, *On some control problems in fluids mechanics* // Theoret. Comput. Fluid Dynamics, (1990), 303–325.

[3] G. Allaire, *Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. Abstract frameworks, a volume distribution of holes* // Arch. Ration. Mech. Anal., (1991), N 3, 209–259.

[4] I. Babuška, *The finite element method with penalty* // Math Comm., (1973), 221–228.

[5] B. Birnir, N. Svanstedt, *Existence theory and strong attractors for the Rayleigh–Bénard problem with a large aspect ratio* // Discrete and Continuous Dynamical Systems, **10** (2004), N 1–2, 55–74.

[6] H. C. Brinkman, *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles* // Appl. Sci. Res., (1947), 27–34.

[7] G. Bouchitté, I. Fragala, *Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures* // SIAM J. Math. Anal., (2001), N 6, 1198–1226.

[8] G. Buttazzo, G. Dal Maso, Γ-*convergence and optimal control problems* // J. Optim. Theory Appl., (1982), 385–407.

[9] J. Casado-Díaz, *Existence of a sequence satisfying Cioranescu–Murat conditions in homogenization of Dirichlet problems in perforated domains* // Rend. di Matem. – Roma, (1996), Ser. VII, 387–413.

[10] D. Cioranescu, F. Murat, *Un terme étrage venu d'ailleurs* // Nonlinear Partial Differential Equations and their applications. Collége de France Seminar, Vol. **II**, 58–138; Vol. **III**, 157–178, Research Notes in Mathematics, Pitman, London, 1981.

[11] C. D'Apice, U. De Maio, P. I. Kogut, *Suboptimal boundary controls for elliptic equation in critically perforated domain* // Annales de l'institut Henri Poincaré :(C) Analyse non Linéare, **25** (2008), Issue 6, 1073–1101.

[12] C. D'Apice, U. De Maio, P. I. Kogut, *Boundary velocity suboptimal control of incompressible flow in cylindrically perforated domain* // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, **11** (2009), N 2, 283–314.

[13] A. Corbo Esposito, C. D'Apice, A. Gaudiello, *A homogenization problem in a perforated domain with both Dirichlet and Neumann conditions on the boundary of the holes* // Asymp. Anal, **31** (2002), 297–316.

[14] G. Dal Maso, F. Murat, *Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators* // Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (1997), N 4, 239–290.

[15] Z. Denkowski, S. Mortola, *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations* // J. Optimiz. Theory Appl., (1993), N 2, 365–391.

[16] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les Inéquations en Méchanique et en Physique*, Paris: Dunon, 1971.

[17] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[18] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and applications*, AMS, 2000.

[19] A. V. Fursikov, M. D. Gunzburger, L. S. Hou, *Boundary value problems and optimal boundary control for the Navier–Stokes system* // SIAM J. Control Optim. (1998), N 3, 852–894.

[20] M. D. Gunzburger, L. S. Hou, T. Svobodny, *Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction* // SIAM J. Control Optim., **30** (1992), 167–181.

[21] В. И. Иваненко, В. И. Мельник, *Вариационные методы в задачах оптимального управления распределенными системами*, Киев: Наукова думка, 1989.

[22] L. S. Hou, T. Svobodny, *Optimization problems for the Navier-Stokes equations with regular boundary controls* // J. Math. Anal. Appl. (1993), 342–367.

[23] L. S. Hou, S. S. Ravindran, *A penalized Neumann control approach for solving an optimal Dirichlet control problem for the Navier–Stokes equations* // SIAM J. Control Optim. (1998), N 5, 1795–1814.

[24] A. V. Kapustyan, J. Valero, *Global continuous solutions, uniqueness and attractors for the 3D Navier–Stokes systems* // Preprint I-2005-24, Universidad Miguel Hernández, Centro de Investigación Operativa, 2005, 26 p.

[25] П. И. Когут, *S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства* // Проблемы управления и информатики, (1997), N 4, 64–79.

[26] P. I. Kogut, G. Leugering, *S-convergence of optimal control problems in Banach spaces* //Math. Nachr., **233–234** (2002), 141–169.

[27] P.I. Kogut, G. Leugering, *On S-homogenization of an optimal control problem with control and state constraints* // J. Analysis and its Applications, (2001), N 2, 395–429.

[28] P. I. Kogut, G. Leugering, *On the homogenization of optimal control problems on periodic graphs* // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **252** (2007), 55–74.

[29] P. I. Kogut, G. Leugering, *Asymptotic Analysis of State Constrained Semilinear Optimal Control Problems* // Journal of Optimization Theory and Applications (JOTA), **135** (2007), N 2, 301–321.

[30] A. A. Kovalevskii, *G-convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain* // Russian Acad. Sci. Izv. Math., **44** (1995), N 3, 431–460.

[31] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.* К.: Наукова думка, 1974.

[32] F. F. Reuss, *Notice sur un nouvel effect de l'électricité galvanique*, Mémoire Soc. Sup. Imp. de Moscou, 1809.

[33] J. Saint Jean Paulin, H. Zoubairi, *Optimal control and "strange term" for the Stokes problem in perforated domains* //Portugaliac Mathematica, (2002), N 2, 161–178.

[34] E. Sanches-Palencia, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics: Springer-Verlag, 1980.

[35] L. Tartar, *Convergence of the homogenization process*, Appendix of [34].

[36] R. Temam, *Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Methods*, Amsterdam: North-Holland, 1979.

[37] W. P. Ziemmer, *Weakly Differentiable Functions*, New York: Springer-Verlag, 1989.

[38] V. V. Zhikov, *On an extension of the method of two-scale convergence and its applications* // Sbornik Math., (2000), N 7, 973–1014.

[39] M. Z. Zgurovski, V. S. Mel'nik, *Nonlinear Analysis and Control Problems for Systems with Distributed Parameters*, Kyiv: Naukova Dumka, 1999.

Сведения об авторах

Петр Ильич Когут
Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара
ул. Научная, 13
49050, Днепропетровск
Украина
E-Mail: p.kogut@i.ua

Владимир В. Гоцуленко
Днепропетровский национальный
университет железнодорожного
транспорта
ул. Академика Лазаряна, 2
49010, Днепропетровск
Украина
E-Mail: gosul@ukr.net