УДК 517.95.32

С. И. Тимченко

МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе изучаются первая и вторая начально-краевые задачи в цилиндрической области для уравнения

$$b(u)\,u_t - \operatorname{div} \vec{a}(u, \nabla u) + f(x, t, u, \nabla u) = 0,$$

в котором $b(u)$ — кусочно-гладкая функция. С помощью метода сглаживания разрывной нелинейности доказана гельдеровость решений рассматриваемых задач.

В настоящей работе с помощью метода сглаживания разрывных нелинейностей [1; 2] изучаются вопросы разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного параболического уравнения. Подобные задачи возникают, например, при описании теплофизического и термодиффузионных процессов при фазовых превращениях. К рассматриваемому виду задач принадлежит также модель кристаллизации в двухкомпонентных средах [3].

1. **Постановка задачи.** В цилиндре $Q_{t_0} = \Omega \times (0, t_0)$, $t_0 > 0$, где $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с $\partial\Omega \subset C^{2+\beta}$, рассмотрим уравнение

$$b(u)\,u_t - \operatorname{div} \vec{a}(u, \nabla u) + f(x, t, u, \nabla u) = 0, \tag{1}$$

к которому присоединим начальное условие

$$u(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2}$$

и граничное условие

$$\vec{a}(u, \nabla u) \cdot \vec{n} + \psi(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0], \tag{3}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Будем предполагать, что выполнено условие согласования начального и граничного условий

$$\vec{a}(\psi_0, \nabla\psi_0) \cdot \vec{n} + \psi(x, 0, \psi_0) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Предположим также, что $\vec{a}(u, p) = (a_1(u, p), \ldots, a_n(u, p))$ и $f(x, t, u, p)$, где $p = (p_1, \ldots, p_n)$, непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов, а $b(u)$ непрерывна всюду, за исключением конечного числа точек $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$, $u \geqslant 1$, обладает предельными значениями $b(u_j \pm \pm 0)$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяет условию

$$0 < c_1 \leqslant b(u) \leqslant c_2 < +\infty. \tag{5}$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что имеется лишь одна точка разрыва $u = u_1$.

Наконец, предположим, что

$$\begin{gathered} \vec{a}(u, p)\, p \geqslant \nu(|u|)\,|p|^2, \\ |\vec{a}(u, p)| \leqslant \mu(|u|)\,|p|, \\ |f(x, t, u, p)| \leqslant \mu_1(|u|)\,|p|^2/(1+\gamma) + \varphi_0(x, t), \gamma > 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\nu(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\mu_1(\xi)$ — положительные непрерывные функции $\xi \geqslant 0$, причем $\nu(\xi)$ — монотонно убывающая, а $\mu(\xi)$ и $\mu_1(\xi)$ — монотонно возрастающая. Относительно функции $\varphi_0(x, t)$ будем предполагать, что она ограничена сверху и снизу.

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, t)$ такую, что

$$\begin{gathered} u(x, t) \in C(\overline{Q}_{t_0}), \quad |\nabla u(x, t)| \in L_2(Q_{t_0}), \\ u_t(x, t) \in L(Q_{t_0}), \quad u(x, t) \in L(0, t_0;\ W_1^2(\Omega)), \end{gathered} \tag{7}$$

для которой соотношение (1) выполняется почти всюду на множестве $\{(x, t) \in Q_{t_0} : u(x, t) > u_1\} \cup \{x, t) \in Q_{t_0} : u(x, t) < u_1\}$. На самом деле уравнение (1) выполняется почти всюду в Q_{t_0} (см. [2]).

Начальное условие (2) выполняется всюду, а (3) почти всюду в $\partial\Omega \times \times [0, t_0]$, если предположить, что

$$\psi_0(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \psi(x, t, u) \in C(Q_{t_0} \times \mathbb{R}^1). \tag{8}$$

2. Метод сглаживания. Рассмотрим функцию $b(u, \varepsilon)$, определенную в $\mathbb{R}^1 \times (0, \varepsilon_0]$ и непрерывно дифференцируемую в области своего определения, обладающую свойством

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} b(u, \varepsilon) = b(u), \quad u \neq u_1. \tag{9}$$

Метод сглаживания заключается в замене функции $b(u)$ в (1) на $b(u, \varepsilon)$ и рассмотрении начально-краевой задачи

$$b(u, \varepsilon) u_t - \operatorname{div} \vec{a}(u, \nabla u) + f(x, t, u, \nabla u) = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \tag{10}$$

$$u = \psi_0(x), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}, \tag{11}$$

$$\vec{a}(u, \nabla u) \cdot \vec{n} + \psi(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0], \tag{12}$$

решение которой $u = u(x, t, \varepsilon)$ зависит от ε, единственно и принадлежит классу $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$ [4].

Функцию $b(u, \varepsilon)$ можно построить таким образом, чтобы было выполнено одно из неравенств [2]:

$$[b(u_1 + 0) - b(u_1 - 0)] \frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \leqslant 0,$$

$$[b(u_1 + 0) - b(u_1 - 0)] \frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \geqslant 0, \tag{13}$$

$$u \in \mathbb{R}^1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Предположим, что выполнены условия $\frac{\partial a_i(u, p)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geqslant 0$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный вещественный вектор,

$$\vec{a}(u, p) \cdot \vec{n} \geqslant 0, \quad \psi(x, t, u) \geqslant a_1 u^2 - a_2, \; a_1, \; a_2 > 0,$$

$$|f(x, t, u, p)| \leqslant c_2 < +\infty, \quad |\psi_0(x)| \leqslant c_2, \tag{14}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{a}(u, p)}{\partial u} \right| \leqslant c_2, \quad \left| \frac{\partial \vec{a}(u, p)}{\partial p_j} \right| \leqslant c_2,$$

где $(x, t) \in \overline{Q}_{t_0}$, $u \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$, а по парам одинаковых индексов здесь и всюду предполагается суммирование от 1 до n. Тогда имеет место следующая оценка решения задачи (10) — (12):

$$|u(x, t, \varepsilon)| \leqslant M_0. \tag{15}$$

Для доказательства запишем уравнение (10) в виде

$$b(u, \varepsilon) u_t - \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} u_{x_i x_j} - \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u} u_{x_i} + f(x, t, u, \nabla u) = 0,$$

и введем в рассмотрение функцию $w(x, t, \varepsilon) = \varphi(x) u(x, t, \varepsilon)$, где $\varphi(x) \in C^2(\overline{Q})$ и $\min \varphi(x) \geqslant 1$, $x \in \overline{\Omega}$.

Она удовлетворяет соотношениям

$$b(u, \varepsilon) w_t - \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} w_{x_i x_j} + \left(2 \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} - \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u} \right) w_{x_i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_i(u, \Delta u)}{\partial u_{x_j}} \frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} - 2 \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} \frac{\varphi_{x_i} \varphi_{x_j}}{\varphi^2} + \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial u} \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} \right) w +$$

$$+ f(x, t, u, \nabla u) = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0},$$

$$\vec{a}(u, \nabla u) \, \vec{n} + \psi(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0],$$

$$w = \varphi(x) \psi_0(x), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}.$$

Если положительный максимум функции $w(x, t, \varepsilon)$ достигается на боковой поверхности Q_{t0}, то из граничного условия с учетом (14) следует оценка

$$w(x, t, \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}},$$

что вместе с результатами [4, гл. 1, § 2] дает оценку

$$\sup_{\lambda > a_0} \min \left\{ 0, e^{\lambda t} \min_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \psi_0(x); \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \min_{\partial\Omega \times [0, t]} e^{\lambda(t-\tau)} \varphi(x); \right.$$

$$\left. \frac{1}{a_0 - \lambda} \min_{Q_t} f e^{\lambda(t-\tau)} \right\} \leqslant u(x, t, \varepsilon) \varphi(x) \leqslant \inf_{\lambda > a_0} \max \{0;$$

$$e^{\lambda t} \max_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \psi_0(x); \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \max_{\partial\Omega \times [0, t]} e^{\lambda(t-\tau)} \varphi(x); \frac{1}{a_0 - \lambda} \max_{\overline{Q}_t} f e^{\lambda(t-\tau)} \};$$

$$t \in [0, t_0]; \quad a_0 = \max_{Q_{t_0}} \left(- \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} + 2 \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\varphi_{x_i} \varphi_{x_j}}{\varphi^2} - \frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} \right).$$

Если теперь функцию $\varphi(x)$ выбрать такой, чтобы $a_0 > c_0$ (что всегда можно сделать в условиях (14)), то утверждение леммы сразу будет следовать из приведенной выше оценки.

Лемма 2. Пусть снова выполняются все условия (14) и, кроме того,

$$\left| \frac{\partial \psi(x, t, u)}{\partial u} \right| \leqslant c_2. \tag{16}$$

Тогда в случае

$$f_t(x, t, u, p) \geqslant 0, \quad \psi_t(x, t, u) \geqslant 0, \quad u_t(x, 0, \varepsilon) \leqslant 0 \tag{17}$$

справедливо неравенство

$$u_t(x, t, \varepsilon) \leqslant 0, \tag{18}$$

а в случае

$$f_t(x, t, u, p) \leqslant 0, \quad \psi_t(x, t, u) \leqslant 0, \quad u_t(x, 0, \varepsilon) \geqslant 0 \tag{19}$$

неравенство

$$u_t(x, t, \varepsilon) \geqslant 0, \tag{20}$$

$$(x, t) \in \overline{Q}_{t_0}, \quad |u| \leqslant M_0, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Для доказательства продифференцируем (10)—(12) по t и обозначим $w(x, t, \varepsilon) = u_t(x, t, \varepsilon)$. В результате будем иметь

$$b(u, \varepsilon) w_t - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} w_{x_j} + \frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u} w \right) + \frac{\partial f(x, t, u, \nabla u)}{\partial u_{x_i}} w_{x_i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f(x, t, u, \nabla u)}{\partial u} + \frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial u} u_t \right) w + f_t(x, t, u, \nabla u) = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0};$$

$$w(x, 0, \varepsilon) = \frac{\operatorname{div} \vec{a}(\psi_0, \nabla \psi_0) - f(x, 0, \psi_0, \nabla \psi_0)}{b(\psi_0, \varepsilon)}, \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} \vec{n} w_{x_j} + \left(\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u} \vec{n} + \frac{\partial \psi(x, t, u)}{\partial u} \right) w + \psi_t = 0.$$

$$(x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0].$$

Точно также, как при доказательстве леммы 1, введя в рассмотрение функцию $z(x, t, \varepsilon) = \varphi(x) w(x, t, \varepsilon)$ и выписав соответствующую смешанную задачу для нее, с помощью принципа максимума [4, гл. 1, § 2] нетрудно убедиться, что в условиях (17) и (19) она имеет тот или иной знак, что в силу неотрицательности гарантирует выполнение неравенства (18) и (20).

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

Теорема 1. Предположим, что выполнены все условия (14) и (16) и, кроме того, функция $b(u, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тогда при выполнении условий (17) или (19) существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} u(x, t, \varepsilon) = u(x, t), \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \tag{21}$$

Доказательство. С помощью принципа максимума [4] можно показать, что в условиях теоремы решение задачи (10) — (12) непрерывно дифференцируемо по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и производная $\frac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = w(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям

$$b(u, \varepsilon) w_t - \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} w_{x_j} + \frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u} w\right) + \left(\frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial u} u_t + \frac{\partial f(x, t, u, \nabla u)}{\partial u}\right) w + \frac{\partial f(x, t, u, \nabla u)}{\partial u_{x_i}} w_{x_i} + u_t \frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0}; \tag{22}$$

$$\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u_{x_j}} \vec{n} w_{x_j} + \left(\frac{\partial \vec{a}(u, \nabla u)}{\partial u} \vec{n} + \frac{\partial \psi(x, t, u)}{\partial u}\right) w = 0;$$

$$(x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0],$$

$$w(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

В силу свойств (13) функции $b(u, \varepsilon)$, всегда можно добиться, чтобы в обоих случаях (17) и (19) было выполнено неравенство

$$-u_t \frac{\partial b(u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \geqslant 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тогда применяя к задаче (22) принцип максимума, получаем оценку

$$w(x, t, \varepsilon) = \frac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \geqslant 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0},$$

означающую монотонность возрастания $u(x, t, \varepsilon)$ по ε в каждой точке Q_{t_0}. Это с учетом результата (15) гарантирует существование предела (21). Теорема доказана.

3. Оценка константы Гельдера. Для доказательства гельдеровости предельной функции (21) достаточно получить равномерную по ε оценку константы Гельдера для решения задачи (10)—(12) и совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0+$ на основании (21).

Обозначим

$$U(x, t, \varepsilon) = \int_0^{u(x,t,\varepsilon)} b(\xi, \varepsilon)\, d\xi,$$

и перепишем задачу (10) — (12) в виде

$$U_t - \operatorname{div} \vec{a}\left(u, \frac{\nabla U}{b}\right) + f\left(x, t, u, \frac{\nabla U}{b}\right) = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \tag{23}$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) = \int_0^{\psi_0(x)} b(\xi, \varepsilon)\, d\xi, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{24}$$

$$\vec{a}\left(u, \frac{\nabla U}{b}\right)\vec{n} + \psi(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0]. \tag{25}$$

Умножим соотношение (23) на $U(x, t, \varepsilon)$ и полученное уравнение проинтегрируем по цилиндру $\Omega \times (0, t)$, $0 < t < t_0$. В результате будем иметь тождество

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} U^2(x,t,\varepsilon)\,dx\int_0^t + \int_0^t\int_{\Omega}\vec{a}\left(u,\frac{\nabla U}{b}\right)\nabla U\,dxdt + \int_0^t\int_{\Omega} Uf\left(x,t,u,\frac{\nabla U}{b}\right)dxdt =$$

$$= \int_0^t\int_{\partial\Omega} U\vec{a}\left(u,\frac{\nabla U}{b}\right)\vec{n}\,dxdt.$$

С учетом ограничений (6) и оценки (15) из него следует неравенство

$$\max_{0<t<t_0}\int_{\Omega} U^2(x,t,\varepsilon)\,dx + c_3\int_0^{t_0}\int_{\Omega} |\nabla U|^2\,dxdt \leqslant c_4 < +\infty, \tag{26}$$

$c_3 > 0$, c_4 не зависит от ε, из которого вытекает, что $u(x,t,\varepsilon)$ — ограниченное обобщенное решение уравнения (10) из $V_2^{1,0}(Q_{t_0})$ [4]. Тогда, рассуждая аналогично [4, гл. V], можно показать, что $u(x,t,\varepsilon)\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{t_0})$, причем ни константа Гельдера и ни показатель Гельдера не зависят от ε. Таким образом справедливо утверждение.

Теорема 2. Предположим, что $\partial\Omega\subset C^{2+\beta}$, $\beta>0$, функция $b(u)$ удовлетворяет условию (5) и дополнительно $b(u)\in C^2(-\infty,u_1]\cup C^2[u_1,+\infty)$, а функции $\vec{a}(u,p)\,f(x,t,u,p)$ и условию (6). Допустим также, что $\psi_0(x)\in C^2(\bar{\Omega})$, $\psi\in \in C^2(Q_{t0}\mathbb{R}^1)$. Кроме того, пусть выполняются все условия (14) и (16). Тогда если исходные данные задачи удовлетворяют одному из условий (17) или (19), то предельная функция $u(x,t)\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{t_0})$ и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в Q_{t_0}, $0<\alpha\leqslant\beta$.

4. *Замечание*. Доказанные выше теоремы имеют место и в случае следующей смешанной задачи

$$b(u)\,u_t - \operatorname{div}\vec{a}(u,\nabla u) + f(x,t,u,\nabla u) = 0,\quad (x,t)\in Q_{t_0};$$

$$u(x,0)=\psi_0(x),\quad x\in\bar{\Omega},\quad u=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,t_0].$$

1. *Данилюк И. И.* О смешанной задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 7.— С. 3—7.
2. *Данилюк И. И., Тимченко С. И.* Начально-краевая задача для квазилинейного параболического уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами // Там же.— 1988.— № 11.— С. 6—9.
3. *Данилюк И. И.* Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах // Там же.— 1984.— № 12.— С. 10—13.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.

Ин-т прикл. математики и
механики АН УССР, Донецк

Получено 15.09.89