

УДК 531.38; 531.39

©2020. Г.В. Горп

О ЗНАЧЕНИИ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЗАДАЧЕ О ПОНИЖЕНИИ ИХ ПОРЯДКА

Рассмотрена задача понижения порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой. Приведен пример решения уравнений Эйлера–Пуассона, который показывает, что при их редукции вместо уравнений Пуассона в общем случае нельзя использовать первые интегралы. Выполнен краткий обзор результатов, полученных в проблеме понижения порядка уравнений движения тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. Указаны публикации, в которых свойства особых решений в редукции уравнений не учитываются.

Ключевые слова: уравнения Эйлера–Пуассона, редуцированные уравнения, особые решения, инвариантные соотношения.

Введение. К роли критики в процессе роста знаний, полученных в научных задачах, отношение неоднозначное (некоторые авторы публикаций считают ее необходимой, некоторые авторы публикаций полагают, что она носит необъективный и предвзятый характер). Аналогичная проблема имеет место и в механике. Достаточно, по-видимому, привести статьи А.Ю. Ишлинского [1] и Л.И. Седова [2], в которых рассматривались проблемы описания сил инерции при движении тел. Полемика академиков А.Ю. Ишлинского и Л.И. Седова подробно обсуждена П.В. Харламовым [3].

В монографиях по динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, как правило, отсутствуют специальные разделы, которые бы были посвящены критическому анализу работ по динамике твердого тела. Исключением, пожалуй, является монография [4], содержащая такой раздел.

В монографии [5] также имеются комментарии, имеющие важное значение для динамики твердого тела. На стр. 10 авторы [5] дают свою критическую оценку результатов некоторых публикаций: *“Свои усовершенствования интерпретаций Пуансо предложили также Якоби, Сильвестр, Мак-Куллаг. Они, хотя и являются более общими, но еще более искусственными... Эти результаты имеют лишь теоретическое значение”*.

В настоящее время, как и прежде, появляются публикации по динамике твердого тела, актуальность которых целесообразно обсуждать в научных журналах. К таким работам относятся и статьи 2014–2019 г.г., автором и соавтором которых является С.В. Ершков. Поскольку в указанных работах С.В. Ершкова рассмотрены решения уравнений Эйлера–Пуассона, редукция данных уравнений к системам другого типа и изучаются инвариантные соотношения редуцированных уравнений, то в данной статье проведен анализ построенных С.В. Ершковым решений и их новизны.

Для указанных целей приведены примеры редуцированных уравнений В. Гесса [6], П.В. Харламова [7] и обзор существующих форм редуцированных

уравнений [8–10]. Особое внимание уделено тем формам, в получении которых используются уравнения Пуассона, и результатам работ [11, 12], которые посвящены исследованию особых решений уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку.

1. Динамические модели. Приведем известные динамические модели задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой.

Уравнения в переменных ω, ν . Рассмотрим *первую* задачу – задачу о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Уравнения движения запишем в виде [3, 4, 7, 8]

$$A\dot{\omega} = (A\omega \times \omega) + s(e \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где введены следующие обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = (A_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – тензор инерции, построенный в неподвижной точке O ; s – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки до центра тяжести C ; $e = (e_1, e_2, e_3) = \frac{OC}{|OC|}$; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t .

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$A\omega \cdot \omega - 2s(e \cdot \nu) = 2E, \quad A\omega \cdot \nu = k, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad (2)$$

где E, k – произвольные постоянные.

Вторая задача – задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. Если гиростатический момент $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ постоянен, то уравнения движения тяжелого гиростата таковы [7]:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + s(e \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (3)$$

Они имеют первые интегралы

$$A\omega \cdot \omega - 2s(e \cdot \nu) = 2E, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu = k, \quad \nu \cdot \nu = 1. \quad (4)$$

Как отмечено выше, особые решения уравнений (1) и (3) изучены в [11, 12].

Д. Гриоли обобщил уравнения (3), (4) при рассмотрении задачи о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил [13] (*третья* задача)

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \omega + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad (5)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (6)$$

Запишем первые интегралы уравнений (5), (6):

$$A\omega \cdot \omega - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad A\omega \cdot \nu + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k, \quad \nu \cdot \nu = 1. \quad (7)$$

В уравнении (5) через $\frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu}$, $\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu}$ обозначены градиенты функций $L = L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U = U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Если эти функции имеют вид

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \lambda \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu), \quad U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = s(e \times \nu) - \frac{1}{2}(C\nu \cdot \nu), \quad (8)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянный вектор, то из (5)–(7) получим уравнения и интегралы *четвертой* модели:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + \nu \times C\nu + s \times \nu, \quad (9)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (10)$$

$$A\omega \cdot \omega - 2s(e \cdot \nu) + C\nu \cdot \nu = 2E, \quad (11)$$

$$(A\omega + \lambda) \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu) = k, \quad \nu \cdot \nu = 1. \quad (12)$$

Отметим, что матрица $C = (C_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) характеризует потенциальные силы, а матрица $B = (B_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – гироскопические силы, под действием которых происходит движение гиростата. Особые решения уравнений (9), (10) изучены в статье [13]. Уравнения (9), (10) с первыми интегралами (11), (12) допускают две механические интерпретационные модели. В первой модели заряженное и намагниченное тело–носитель движется в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского поля, магнитного и кулоновского полей.

Приведу известный результат (вторая интерпретация): уравнения (9), (10) с интегралами (11), (12) линейным преобразованием можно привести к уравнениям движения тела в жидкости (В.А. Стеклов, П.В. Харламов, Х.М. Яхья). Результаты этих авторов указаны в монографиях [8, 9].

Все приведенные основные формы уравнений динамики (1), (3), (5) содержат уравнения Пуассона, что существенно влияет на интегрирование указанных динамических уравнений. Но замена уравнений Пуассона первыми интегралами при отыскании решений уравнений динамики не всегда допустима.

Уравнения движения гиростата в переменных x, ν . Основное внимание в статье будет уделено уравнениям (1)–(4). Выберем в качестве переменных $x = (x_1, x_2, x_3) = A\omega$ – момент количества движения гиростата и вектор ν , указывающий направление силы тяжести. Тогда уравнение (3) с интегралами (4) запишем так

$$\dot{x} = (x + \lambda) \times ax + s(e \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times ax, \quad (13)$$

$$x \cdot ax - 2s(e \cdot \nu) = 2E, \quad (x + \lambda) \cdot \nu = k, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad (14)$$

где a – гирационный тензор. Обращаясь к истории развития динамики гиростата, приведу лишь некоторые современные публикации, посвященные анализу полученных решений уравнений движения гиростата [5, 6, 8, 9].

2. Редукция уравнений движения. На взгляд автора данной статьи, без исторических сведений о редукции уравнений Эйлера–Пуассона теряются важные обстоятельства при обсуждении некоторых современных работ по данной тематике.

Краткий исторический комментарий. Редукцию проводят разными методами. В первом методе (В. Гесс, П.А. Шифф, П. Штекель) редукция основана на использовании первых интегралов. В. Гесс, найдя компоненты вектора ν из первых интегралов, динамическое уравнение преобразовал к уравнению, которое содержит только компоненты кинетического момента. При этом уравнение Пуассона из (1) не принималось во внимание. Сосредоточив основное внимание на особых решениях в предложенном им преобразовании, В. Гесс нашел новый случай интегрируемости уравнения Эйлера–Пуассона. Редуцированные уравнения П.А. Шиффа [14] только обозначениями отличаются от уравнений В. Гесса, а решение, которое он предлагает, не является полным, так как для него не получены зависимости компонент вектора угловой скорости от времени (на это обстоятельство обратил внимание Гамель [15]). П. Штекель [16], исследуя вопросы эквивалентности редуцированных уравнений, формулирует ряд теорем: в частности, он утверждает, что при постоянных значениях инвариантов Гесса компоненты кинетического момента тоже постоянны. В [11, 15] показано, что данное утверждение в общем случае неверно. Полный разбор работ П.А. Шиффа и П. Штекеля дал Гамель [15], который показал, что исследования указанных авторов неполные. Исчерпывающее доказательство этого факта дано в статьях [11, 12], в которых показано, что не всегда особые решения редуцированных уравнений движения тяжелого твердого тела удовлетворяют уравнениям Пуассона.

Второй метод в редукции уравнений движения тяжелого гиростата применил П.В. Харламов [7]. Для получения новой формы уравнений движения он рассматривал два первых интеграла (интеграл моментов и интеграл энергии) и одно из скалярных динамических уравнений. Из этих уравнений определялись компоненты вектора вертикали и на их основе строились с привлечением двух оставшихся скалярных динамических уравнений и геометрического интеграла новые формы уравнений движения гиростата. Частным случаем первой формы уравнений П.В. Харламова являются уравнения Н. Ковалевского [17].

Уравнение А.И. Докшевича [10] можно отнести к редуцированным уравнениям, полученным в результате применения второго метода, так как они содержат в качестве основных переменных комбинации компонент кинетического момента.

Третий метод преобразования уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой применен в статье [18]. Отличительной особенностью его является использование в редуцированном уравнении компонент единичного вектора ν . Уравнение [18] представляет собой иррациональное уравнение второго порядка относительно функции $\nu_2(\nu_1)$.

Представляют определенный интерес редуцированные формы уравнений динамики твердого тела [19, 20], так как в них уравнения получены на инва-

риантных многообразиях, в которые не входят множества особых решений. Отметим, что в [19] получена не только новая форма уравнений Эйлера–Пуассона, но и открыто новое свойство в классическом решении В.А. Стеклова, состоящее в том, что существуют значения параметров решения, при выполнении которых годограф вектора кинетического момента лежит на круговом цилиндре.

Четвертый метод основан на уравнениях Гамильтона, полученных в аналитической механике. Он использован во многих публикациях (приведем только статью А.Д. Билимовича [21] и обзоры [5, 22, 23]). Указаний метод эффективен в задачах [24, 25] и, как правило, основывается на переменных Андуайе–Депри [24].

3. Примеры редуцированных уравнений. При решении задачи редукации уравнений Эйлера–Пуассона должны быть достигнуты две цели: понижение порядка исходных уравнений и получение при некоторых условиях новых решений этих уравнений. В связи с этими требованиями остановимся на некоторых формах уравнений динамики.

Уравнение Гесса (первая форма). Рассмотрим уравнение движения гиростата (13) и их первые интегралы (14). Следуя В. Гессу в [8], из интегралов (14) определим вектор ν :

$$\nu = \frac{1}{\vartheta - \rho^2} \left[(\kappa - \mu\rho)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) - (\kappa\rho - \mu\vartheta)\mathbf{e} + N^{1/2}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{e} \right], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{e}, & \vartheta &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2, & \mu &= \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - 2E}{2s}, \\ N &= (1 - \mu^2)(\vartheta - \rho^2) - (\kappa - \mu\rho)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка выражения (15) в первое уравнение системы (13) приводит к аналогу уравнения В. Гесса [10]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \frac{s}{\vartheta - \rho^2} \left[(\kappa - \mu\rho)\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + N^{1/2}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} - \rho\mathbf{e}) \right]. \quad (17)$$

Соотношения из системы (16) В. Гесс назвал **инвариантами**. Таким образом, он понизил порядок уравнений (3), (4) (имеем ввиду, что он это делал при $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$). Кроме этого, В. Гесс [6] получил новое решение, исследования которого указаны в обзорах [5, 8]. После интегрирования уравнения (17) вектор ν находим из уравнения (15).

Уравнения П.В. Харламова. Другой подход в понижении порядка уравнений (13), предложил П.В. Харламов [7]. Действительно, умножив векторно обе части первого уравнения системы (13) на вектор $\mathbf{s}$ и используя интеграл энергии (14), получим

$$\nu = \frac{1}{s^2} \left[(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{s} + (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}))) + \frac{s(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - 2E)}{2} \right], \quad (18)$$

где $\mathbf{s} = s\mathbf{e}$.

Первое скалярное уравнение этой редукции является результатом умножения первого уравнения из (13) скалярно на $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{s} \cdot [(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}]. \quad (19)$$

Подстановка выражения (18) в интегралы (14) дает второе и третье уравнение *первой* формы уравнений П.В. Харламова:

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{s} + (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})) + \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - 2E)}{2} \right]^2 - s^4 = 0, \\ & (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left[\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{s} + (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})) + \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - 2E)}{2} \right] - ks^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (19), (20) составляют систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент вектора $\mathbf{x}$.

Вторую форму уравнений П.В. Харламова получим [7], внося выражение (18) в уравнение Пуассона из системы (13).

Уравнения П.В. Харламова в значительной степени оказали влияние на получение новых решений уравнений (13), которые обсуждены и изучены в [4, 7–9]. То есть П.В. Харламов успешно достиг тех целей в научных исследованиях динамики, которые обозначены выше.

4. Особые решения уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку. В задачах понижения порядка исходных уравнений (13) часто уравнения Пуассона заменяются первыми интегралами, как и в статье С.В. Ершкова [26]. Однако, если при этом уравнения Пуассона из (13) отбрасываются, то могут возникнуть решения, которые удовлетворяют динамическим уравнениям из (13) и интегралам из (14), но уравнениям Пуассона не удовлетворяют. Проблема эквивалентности системы, состоящей из динамических уравнений и уравнений Пуассона и системы, состоящей из динамических уравнений и интегралов из (14), решена в работах [11, 12].

Приведем пример. Пусть в уравнениях (первом уравнении из (13) и интегралах из (14)) выполняются условия

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} \neq 0, \\ e_1 &= 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad s^2 = n_0^2 a_{13}^2 (\mu_0^2 + n_0^2), \\ sk &= n_0 a_{13} (\mu_0^2 + n_0^2), \quad 2E = \mu_0^2 (a_{11} \mu_0^2 + a_{33} n_0^2), \end{aligned} \quad (21)$$

где μ_0, n_0 – постоянные, а решение, удовлетворяющее динамическим уравне-

ниям и интегралам, зададим в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_0 \cos \sigma, & x_2 &= \mu_0 \sin \sigma, & x_3 &= n_0, \\ s\nu_1 &= n_0\mu_0 a_{13} \cos \sigma, & s\nu_2 &= n_0\mu_0 a_{13} \sin \sigma, & s\nu_3 &= a_{13}n_0^2, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\mu_0 a_{13} \cos \sigma + n_0(a_{11} - a_{33}). \end{aligned} \quad (22)$$

Нетрудно установить, что при условиях (21) решение (22) удовлетворяет динамическим уравнениям из (13) и первым интегралам (14), а уравнениям Пуассона из (13) не удовлетворяет.

Условия, при выполнении которых система уравнений (13) (система 1) и система, состоящая из динамических уравнений из (13) и интегралов (14) (система 2) – эквивалентны, устанавливаются сравнительно просто. Для этого достаточно продифференцировать интегралы (14) только в силу динамического уравнения из (13):

$$\mathbf{s} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (\mathbf{s} = s\mathbf{e}). \quad (23)$$

Когда векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\nu}$ некопланарны, из системы (23) вытекает, что системы 1 и 2 эквивалентны, так как из (23) следует уравнение $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}$. Особого рассмотрения требует случай, когда система (23) допускает инвариантное соотношение

$$\mathbf{s} \cdot [\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] = 0.$$

Тогда, умножив обе части первого уравнения из (13) скалярно на $\mathbf{s}$, получим

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = c^2 \quad (c = \text{const}). \quad (24)$$

Вывод. В силу (23), (24) имеем следующий результат: если модуль момента количества движения постоянен, то уравнения Пуассона в процессе редукции и получения решений отбрасывать нельзя. Если условие (24) на исследуемом решении не выполняется, то уравнения Пуассона можно не рассматривать [11]. Случай (24) для уравнений (3) полностью изучен в статье [12].

Техника получения данного результата применима и к уравнения (5), (6). По аналогии с уравнениями (23), имеют место и уравнения

$$\begin{aligned} \left(A\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) &= 0, \\ \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) &= 0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что особые решения для уравнений (5), (6) возникают при выполнении условия

$$\left(A\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nu} \times \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) = 0.$$

Если в данном равенстве и уравнении (5) функция $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv 0$, то из уравнения (5) следует, что в задаче о движении твердого тела в потенциальном силовом поле особые решения также характеризуются постоянством модуля момента количества движения.

5. Анализ работ [26,27]. В статьях [26,27] С.В. Ершков рассматривает уравнения (13), (14), используя другие обозначения. Сопоставим их следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3) \Rightarrow (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3), \\ \boldsymbol{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ se_1 &= Pa, \quad se_2 = Pb, \quad se_3 = Pc, \quad k = C_0, \quad E = C_1. \end{aligned}$$

Для краткости изложения уравнения (13), (14) в новых переменных и параметрах не будем записывать. С.В. Ершков решение (см. формулы (2.1) статьи [27]) уравнений Эйлера–Пуассона (13) ищет в виде (будем использовать векторный подход)

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{c_0} \mathbf{x}. \quad (25)$$

Запишем (13) в абсолютной системе координат ($\frac{d}{dt}$ – абсолютная производная):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Подставим выражение (25) во второе уравнение (26):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Из (27) следует, что вектор $\mathbf{x} = \mathbf{g}_0$, т. е. вектор $\mathbf{x}$ не изменяется с течением времени. Тогда из (26) получим равенство

$$s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Случай из (28), который определен равенством $s = 0$, соответствует случаю Эйлера. Этот случай изучен в полном объеме (см., напр., книгу Г.К. Суслова [28]).

Рассмотрим *второй* случай: $\boldsymbol{\nu} = \mu_0 \mathbf{e}$. В силу геометрического интеграла $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$ получим, что μ_0 – постоянная. Подставим это значение в (25) и результат представим в виде: $c_0\mu_0 A \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}$, т. е. вектор угловой скорости постоянен в подвижной системе координат. В силу известной формулы: $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$. Следовательно, вектор угловой скорости постоянен в теле и в неподвижном пространстве, т. е. тело совершает равномерное вращение (этот вариант исключается). Таким образом, векторное равенство (25), которое в

скалярном виде можно представить в виде $\mathbf{x}^2 = g_0^2$, может выполняться только в случае Эйлера.

Замечание 1. Если использовать и результаты п. 3 настоящей статьи и статей [11, 12], то приходим к выводу о том, что результаты [26, 27] в той части, которая изложена выше, являются ошибочными.

Во второй части [27] С.В. Ершков решает задачу интегрирования уравнений Эйлера–Пуассона (13), (14), сохраняя параметр b (см. формулы (2.3) статьи [27]), что является ошибочным, поскольку $b = 0$. Убедиться в этом весьма просто: достаточно проанализировать формулы (2.2)–(2.4). Это же обстоятельство присуще выводу в [27] формул для углов Эйлера, его формулы для углов Эйлера отличаются от классических формул для этой задачи (см., напр., [28]).

Утверждение 1. Статьи С.В. Ершкова [26, 27] полностью ошибочны.

Замечание 2. Это же утверждается и в статьях [29, 30] по поводу работ [26, 27].

Статьи [29] и [30] вышли из печати в 2017 г. Но отличие статьи [30] от [29] состоит в том, что в [30] ошибочность результата С.В. Ершкова доказывается не на основе теории особых решений уравнений Эйлера–Пуассона, рассмотренных в [29], которые необходимо учитывать при построении решений данных уравнений. То есть нахождение решений уравнений динамики твердого тела в потенциальном поле сил должно всегда сопровождаться проверкой условия $\mathbf{x}^2 = c_*^2 = \text{const}$.

6. Анализ работ [31, 32]. Статьи [31, 32] имеют много общего в изучении уравнений Эйлера–Пуассона. В начале каждой статьи выводятся первые интегралы уравнений Эйлера–Пуассона. Целесообразность этого вызывает большое недоумение, поскольку первые интегралы рассматриваемых уравнений приведены во всех учебниках по теоретической механике и поэтому их вывод **не приводится в научных статьях** по динамике твердого тела (в статье [31] этот вывод приведен после формул (1.3), в статье [32] – после формул (1.3)).

Далее в [31] (формулы (3.4)), в [32] (формулы (3.1)) вместо компонент ν_i ($i = \overline{1, 3}$) (в [31, 32] они обозначены через γ_i) вводятся переменные $a(t)$, $b(t)$:

$$\nu_1 = -\frac{2a\sigma}{1+a^2+b^2}, \quad \nu_2 = -\frac{2b\sigma}{1+a^2+b^2}, \quad \nu_3 = -\frac{\sigma(1-a^2-b^2)}{1+a^2+b^2} \quad (29)$$

и рассматриваются уравнения Пуассона. Запишем их в обозначениях данной статьи:

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \quad (30)$$

Так как соотношения параметризуют при $\sigma = \pm 1$ геометрический интеграл, то в статьях [31, 32] после подстановки величин (29) в уравнения (30) полу-

чаются два дифференциальных уравнения (запишем их по статье [32]):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2}a^2\omega_2 - \omega_1ab - \frac{\omega_2}{2}(b^2 - 1) + b\omega_3, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2}b^2\omega_1 + \omega_2ab + \frac{\omega_1}{2}(a^2 - 1) - a\omega_3,\end{aligned}\tag{31}$$

и рассматривается их линейная комбинация. В статьях [31, 32] она представлена в одинаковой форме:

$$\omega_2\dot{a} - \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)a^2 + \omega_1\omega_3a + \frac{\omega_1^2}{2} = -\omega_1\dot{b} - \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)b^2 + \omega_1\omega_2b + \frac{\omega_2^2}{2}.\tag{32}$$

Причем, в [31] уравнение (32) имеет нумерацию (3.8), в статье [32] – (3.3). Уравнение (32) в [31, 32] автор записывает в виде

$$a' = Aa^2 + Ba + D,\tag{33}$$

где

$$A = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_2}, \quad B = -\frac{\omega_1\omega_3}{\omega_2}, \quad D = -\frac{\omega_1}{\omega_2}b' - \frac{b^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2\omega_2}b^2 + b\omega_3 - \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2\omega_2}.\tag{34}$$

Вычислительная часть, используемая в [31], заканчивается формулой (33). А далее в [31] автор утверждает, что полученные им уравнения (31)–(33) являются новыми, а уравнение (33) может рассматриваться как уравнение Риккати. По его мнению, в [31] он выполнил редукцию уравнений Эйлера–Пуассона к новым редуцированным уравнениям. В этой же статье он ограничивается общим рассуждением о том, что в качестве функции $\omega_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) могут рассматриваться функции, описывающие решения Лагранжа, Ковалевской и Эйлера.

С.В. Ершков в [31] рассматривает только общие решения уравнений Эйлера–Пуассона, в то время, как данные уравнения допускают 14 частных решений, а уравнения движения тяжелого гиростата имеют еще больше решений. Они изучены в [7–10, 34], классификация инвариантных соотношений всех решений уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона приведена в монографии [33].

По тем требованиям, которые предъявляются к редуцированным уравнениям, С.В. Ершков в [31] не добился понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона, так как количество уравнений движения фактически не изменилось. Он не использовал переменные $a(t)$, $b(t)$ в динамических уравнениях Эйлера, не привел ни одного нового решения уравнений (32), (33), не указал известные частные решения в приведенных уравнениях. Яркие примеры вывода новых форм уравнений Эйлера–Пуассона представили А.И. Докшевич [10] и Е.И. Харламова [34], которые не только указали способ получения известных решений уравнений Эйлера–Пуассона для гиростата, но и нашли их новые решения.

Утверждение 2. Таким образом, уравнения С.В. Ершкова [31] не представляют интереса для динамики твердого тела не только в силу своей незамкнутой формы, но и в силу чрезмерного отрыва от динамических уравнений. Примеры замкнутых редуцированных уравнений приведены в п. 2 данной статьи.

Замечание 3. Данное утверждение относится к использованию уравнений Пуассона. Известно, что при использовании методов, применяемых при выводе уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона, эти уравнения, как правило, не используются [22–25].

О результатах статьи [32]. Данная статья написана С.В. Ершовым в соавторстве с Д.Д. Лещенко, но в ней отмечается, что идея получения редуцированных уравнений Эйлера–Пуассона принадлежит С.В. Ершову (данное обстоятельство является важным при обсуждении и оценке результатов [32]).

Следует отметить, что статья [32] действительно посвящена редукции уравнений Эйлера–Пуассона в классическом понимании данной проблемы. Вначале в статье [32] с помощью параметризации (29) уравнения Пуассона приводятся к виду (31). Затем в ней с помощью первых интегралов из (22) определяются функции $a(t)$, $b(t)$. Собственно говоря, в этом приеме присутствуют, очевидно, элементы методов В. Гесса и П.В. Харламова (см. п. 2 наст. статьи). К уравнениям (31) в [32] добавляется третье скалярное уравнение из динамических уравнений Эйлера–Пуассона. Запишем эти уравнения в скалярной форме, поскольку они будут использованы дальше

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3), \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, в качестве редуцированной системы уравнений в [32] рассматривается следующая система:

$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1), \quad (36)$$

$$\dot{a} = \frac{1}{2}a^2\omega_2 - \omega_1ab - \frac{\omega_2}{2}(b^2 - 1) + b\omega_3, \quad (37)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2}b^2\omega_1 + \omega_2ab + \frac{\omega_1}{2}(a^2 - 1) - a\omega_3, \quad (38)$$

где ν_1 , ν_2 определены равенствами из системы (29), а функции $a(t)$, $b(t)$ имеют вид, записанный в [32] после формул (4.5). Естественно, в силу того, что они определены из первых интегралов, их структура (как и в случае В. Гесса) иррациональна. В принципиальной оценке формул, написанных в [32] после системы (4.5), возникают некоторые вопросы, поскольку выражения $a(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $b(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеют две особенности, вызванные тем, что содержат знаменатели, имеющие вид линейных и квадратичных многочленов по

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Однако, здесь поставим задачу более общего характера: всегда ли система уравнений Эйлера–Пуассона может быть заменена системой (36)–(38)? Докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. Система уравнений Эйлера–Пуассона может быть редуцирована к системе (36)–(38), исключая случай $a^2 + b^2 = \text{const}$, который в переменных ν_i ($i = \overline{1, 3}$) означает $\nu_3 = \text{const}$, а в переменных ω_i, ν_i приводится к условию

$$\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2 = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим динамическую систему (35), уравнения Пуассона

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2 \quad (39)$$

и первые интегралы из (2)

$$\begin{aligned} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= 2E, \\ A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + A_3\omega_3 &= k. \end{aligned} \quad (40)$$

Будем, следуя [32], полагать, что вместо трех уравнений (35) выполняется третье уравнение и выполняются уравнения (39), поскольку именно эти уравнения составляют редуцированную систему. Продифференцируем левые и правые части системы (40) в силу уравнений (36) и (39). Тогда получим два дифференциальных уравнения

$$A_1\nu_1\dot{\omega} + A_2\nu_2\dot{\omega}_2 = \omega_3[A_2\nu_1\omega_2 - A_1\nu_2\omega_1 - A_3(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)] + s(e_2\nu_1 - e_1\nu_2), \quad (41)$$

$$A_1\omega_1\dot{\omega} + A_2\omega_2\dot{\omega}_2 = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + se_3(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2) + s\nu_3(e_1\omega_2 - e_2\omega_1). \quad (42)$$

Из уравнений (41), (42) однозначно можно найти производные $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ только в случае $\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2 \neq 0$. Тогда из (41), (42) следует первое и второе уравнения системы (35). В этом варианте решения, которые получены для системы (36)–(38), будут удовлетворять всем динамическим уравнениям (35).

Когда выполняется соотношение

$$\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2 = 0, \quad (43)$$

система (41), (42) приводится только к одному уравнению на производные $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ и поэтому в случае (43) невозможно из системы (41), (42) получить два первых уравнения из (35). Если обратиться к системе уравнений (37), (38), то нетрудно убедиться в том, что при наличии уравнения (43) она допускает интеграл $a^2 + b^2 = \text{const}$. Таким образом, утверждение 3 доказано полностью.

Дальнейшее обсуждение статьи [32] приведем в краткой форме. Авторы [32] рассматривают систему (36)–(38) в некоторых предположениях относительно порядка входящих в эту систему величин. В результате они приводят ее к приближенной системе (в общем виде она, как известно, не интегрируется в замкнутой по Якоби форме, так как авторы не приводят нового дополнительного интеграла). Далее они предлагают применение асимптотических методов из [35,36]. Однако в этом подходе тоже имеются определенные сомнения в силу того, что приведенная ими форма не относится к стандартной форме, которая используется в [35,36].

Особое замечание автора данной статьи относится к приложениям, которые используются в [32]. К примеру, на основании формул (29) и уравнений Пуассона (39) авторы делают подробный вывод уравнений (37), (38). Такие тривиальные преобразования в научных публикациях по механике не целесообразны.

Оценивая статью [32] в целом, считаю, что в ней получена некоторая редукция уравнений Эйлера–Пуассона, которую в дальнейшем они могут использовать с учетом утверждения 3 автора данной статьи, и, что важно, необходимо исследовать особенности, возникающие при обращении в нуль знаменателей используемых ими формул.

7. Некоторые комментарии к статье [37]. Авторы [37] изучают уравнения Эйлера задачи о движении твердого тела применительно к задаче небесной механики о движении астероида с учетом эффекта “YORP”. Запишем их в виде

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + K_1, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + K_2, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + K_3, \end{aligned} \quad (44)$$

где ω_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненты угловой скорости, A_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненты тензора инерции, K_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненты момента внешних сил. Существенным обстоятельством исследований, проведенных в [37], является применение приближенных методов, которые отличаются от строгих приближенных методов, применяемых в динамике твердого тела, например, метода малого параметра. Однако, в силу применения уравнений Эйлера, представляет определенный интерес анализ результатов [37]. Особенно это касается вопроса редукции уравнений (44).

Остановимся кратко на основных преобразованиях уравнений (44), которые используются в [37]. *Первое* преобразование состоит в том, что из второго уравнения системы определяется величина ω_3 , которая подставляется в первое уравнение из (44). Запишем результат:

$$\omega_3 = \frac{1}{\omega_1(A_3 - A_1)}(A_2 \dot{\omega}_2 - K_2), \quad (45)$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A_1(A_3 - A_1)\omega_1} \left\{ K_1(A_3 - A_1)\omega_1 + (A_2 - A_3)\omega_2(A_2 \dot{\omega}_2 - K_2) \right\}. \quad (46)$$

Второе преобразование – внесение величины (45) в третье уравнение и получение зависимости

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A_3(A_2\dot{\omega}_2 - K_2)} \left\{ A_3\omega_1(A_2\ddot{\omega}_2 - \dot{K}_2) - \omega_1^2(A_3 - A_1)[(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + K_3] \right\}. \quad (47)$$

Далее в [37] приравняются правые части из (46) и (47):

$$A\omega_1^4 - B\omega_1^3 + C\omega_1^2 - D\omega_1 - E = 0, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \omega_2 A_1 (A_3 - A_1)^2 (A_2 - A_1), \\ B &= A_1 K_3 (A_3 - A_1)^2, \quad C = A_1 A_3 (A_3 - A_1) (A_2 \ddot{\omega}_2 - \dot{K}_2), \\ D &= A_3 K_1 (A_3 - A_1) (A_2 \dot{\omega}_2 - K_2), \quad E = \omega_2 A_3 (A_2 - A_3) (A_2 \dot{\omega}_2 - K_2)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Для получения изменения кинетической энергии в [37] рассматривается вытекающее из (44) уравнение

$$\frac{1}{2} (A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2)^\bullet = Y_1 \omega_1 + Y_2 \omega_2 + Y_3 \omega_3, \quad (50)$$

где через Y_i ($i = \overline{1, 3}$) обозначены величины K_i ($i = \overline{1, 3}$), интерпретирующиеся как крутящие моменты. Авторы на основании (50) делают очевидный вывод, что для диссипации энергии при движении тела вектор “YORP” должен быть приближенно ортогонален вектору угловой скорости. Поскольку в рассматриваемой задаче предполагается

$$\{\omega_2, \omega_3\} \ll 1, \quad A_1 \geq A_2 \geq A_3,$$

то основное внимание уделяется исследованию вращения астероида вокруг первой координатной оси.

В дальнейшем не будем переходить к обозначениям Y_i ($i = \overline{1, 3}$), так как уравнения (44) при таком переходе должны быть записаны еще раз.

Для выполнения полной редукции уравнений (44) к дифференциальному уравнению на переменную $\omega_2(t)$ необходимо найти из (48) переменную ω_1 и полученное значение подставить, например, в первое уравнение системы (44), используя при этом соотношение (45) (об этом авторы статьи [37] только упоминают).

Для получения явного уравнения на переменную $\omega_2(t)$ в [37] уравнение (48) рассматривается в предположении $K_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), обосновывая такое упрощение некоторыми особенностями эффекта YORP. Очевидно, с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений метод, применяемый в [37], должен быть основан на теории малого параметра.

Авторы [37] не ограничиваются принятыми условиями ($K_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$)) и дополнительно полагают $A_2 = A_3$. Запишем окончательный результат из [37]:

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) + \frac{1}{A_1} \int K_1(t) dt, \quad \omega_3(t) = \frac{A_3 \dot{\omega}_2(t)}{\omega_1(t)(A_3 - A_1)}, \quad (51)$$

$$A_3 \ddot{\omega}_2(t) + \frac{(A_3 - A_1)^2}{A} \omega_1^2(t) \omega_2(t) - \dot{K}_2 = 0. \quad (52)$$

В статье [37] утверждается, что уравнение (52) относится к уравнению класса Риккати. Но если уравнение (52) трактовать как уравнение на переменную $\omega_2(t)$, то очевидно, что оно относится к классу уравнений Хилла.

Поскольку главная цель данной статьи состоит в исследовании особых решений в редукции уравнений класса Эйлера–Пуассона, то приведем эти решения для системы (44).

Первый пример особого решения характеризуется условиями

$$\omega_1 = 0, \quad A_2 = A_3, \quad K_1 = 0. \quad (53)$$

В силу (53) из (44) имеем

$$\omega_2(t) = \frac{1}{A_2} \int K_2(t) dt, \quad (54)$$

$$\omega_3(t) = \frac{1}{A_2} \int K_3(t) dt. \quad (55)$$

Если обращаться к формулам (51), (52), то вторая формула из (51) теряет смысл, а из формулы (52) получим

$$\omega_2(t) = \frac{1}{A_3} (\mu_0 t + \int K_2(t) dt), \quad (56)$$

где μ_0 – постоянная. То есть (54) и (56) не совпадают.

Второй пример такой:

$$\omega_2(t) = 0, \quad \omega_1(t) = \frac{1}{A_1} \int K_1(t) dt, \quad \omega_3(t) = \frac{1}{A_3} \int K_3(t) dt,$$

$$K_2(t) + \frac{(A_3 - A_1)}{A_1 A_3} \left(\int K_1(t) dt \right) \left(\int K_3(t) dt \right) = 0.$$

Таким образом, первое особое решение (53)–(55) системы (44) связано с тем, что при $\omega_1 = 0$ преобразование (45) теряет смысл; второе решение обусловлено выбором в [37] в качестве независимой функции $\omega_2(t)$. Исключая эти варианты, а также вырожденные случаи, которые возникают при решении уравнения (48), можно сделать вывод о том, что результаты [37] представляют определенный интерес в прикладной области аналитической динамики – небесной механике.

Заклучение. В статье рассмотрено значение особых решений в понижении порядка дифференциальных уравнений динамики твердого тела. Проведен анализ различных подходов в данной задаче и указаны особые решения некоторых форм редуцированных уравнений.

1. *Ишлинский А.Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. – М.: Наука, 1981. – 191 с.
2. *Седов Л.И.* Отдельные краткие замечания в связи с рецензией А.А.Илюшина на книгу А.Ю.Ишлинского “Механика относительного движения и силы инерции” // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1984. – № 1. – С. 86–90.
3. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. – Киев: Наук. думка, 1995. – 407 с.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 384 с.
6. *Hess W.* Über die Euler’schen Bewegungsgleichungen und über eine particulare Lösung des Problems der Bewegung um eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – В. 37, Н. 2. – S. 153–181.
7. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч.1. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
8. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
9. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
10. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
11. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И.* Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
12. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела в линейном поле сил и в поле сил Лоренца // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 33–42.
14. *Шифф П.А.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Матем. сб. кружка любителей мат. наук. – 1903. – **24**, № 2. – С. 169–177.
15. *Hamel G.* Über den allgemeinen schweren Kreisel // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1947. – S. 5–6.
16. *Stackel P.* Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels // Math. Ann. – 1909. – **67**. – S. 399–431.
17. *Kowalewski N.* Eine neue particulare Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – В. 65. – S. 528–537.
18. *Яхья Х.М.* О сведениях уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки к одному дифференциальному уравнению // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 64–67.
19. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Новая форма в моделировании движения тяжелого твердого тела // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – **8**, № 6. – С. 873–884.
20. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* О редукции уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в потенциальном поле сил // Ж. теор. и прикл. механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 3–15.
21. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Сб. статей, посвященный Г.К. Сусливу. – К., 1911. – С. 23–74.
22. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 232 с.

23. Козлов В.В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теор. и прикл. механика. – Белград: Югославское об-во механики, 1982. – № 8. – С. 59–65.
24. Садов Ю.А. Переменные действие–угол в задаче Эйлера–Пуансо // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 5. – С. 962–964.
25. Deprit A., Elipe A. Complete reduction of the Euler–Poinso problem // J. Astronaut. Sci. – 1993. – **41**, no. 4. – P. 603–628.
26. Ershkov S. New exact solution of Euler’s equations (rigid body dynamics) in the case of rotation over the fixed point // Arch. Appl. Mech. – 2014. – **84**, no. 3. – P. 385–389.
27. Ershkov S. On the invariant motions of rigid body rotation over the fixed point, via Euler’s angles // Arch. Appl. Mech. – 2016. – **86**, no. 11. – P. 1797–1804.
28. Суслиов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат. – 1946. – 665 с.
29. Gorr G.V., Amer T.S. Comments on two papers by Ershkov: Archive of applied Mechanics, 84 (2014), and 86 (2016) // Ж. теор. и прикл. механики. – 2017. – № 1 (58). – P. 16–18.
30. Sanduleanu S., Petrov A. Comment on “New exact solution of Euler’s equations (rigid body dynamics) in the case of rotation over the fixed point” // Arch. Appl. Mech. – 2017. – **87**, no. 1. – P. 41–43.
31. Ershkov S.V. A Riccati-type solution of Euler–Poisson equations of rigid body rotation over the fixed point // Acta Mech. – 2017. – **228**(7). – P. 2719–2723.
32. Ershkov S.V., Leshchenko D. On a new type of solving procedure for Euler–Poisson equations (rigid body rotation over the fixed point) // Acta Mech. – 2019. – 230. P. 871–883.
33. Гопп Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). – М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. – 434 с.
34. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
35. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Perturbed motions of a body that are to regular precession // Mech. Solids. – 1986. – **21**(5). – P. 1–8.
36. Leshchenko D.D., Shamaev A.S. Perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case // Mech. Solids. – 1987. – **22**(6). – P. 6–15.
37. Ershkov S.V., Shamin R.V. The dynamics of asteroid rotation, governed by YORP effect: the kinematic ansatz // Acta Astronaut. – 2018. – **149**. – P. 47–54.

G.V. Gorr

On importance of special solutions of rigid body dynamics equations in the problem of their depression

The problem of depression of differential equations of motion of a rigid body with a fixed point is considered. An example of solution of Euler–Poisson equations is given, which shows that the first integrals cannot be used for reduction of these equations instead of Poisson equations in the general case. A brief review of the results obtained in the problem of depression of the equations of motion of a heavy gyrostat with a fixed point is performed. Publications are indicated, where properties of special solutions of equations are not taken into account at their reduction.

Keywords: Euler–Poisson equations, reduced equations, special solutions, invariant relations.

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
gvgorr@gmail.com

Получено 03.08.20