УДК 531.38

©2016. **Г.В. Горр, А.М. Ковалев**

МЕТОДЫ ИСТОЛКОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Предложен комплексный подход в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Дан анализ результатов исследований движения свободного твердого тела, полученных Л. Пуансо, И. Мак-Куллагом, К. Якоби, Ж. Сильвестром, Г. Дарбу. Предложен модифицированный метод годографов. Указаны аналитические зависимости между углами Эйлера, параметрами Родрига–Гамильтона и переменными неподвижного годографа.

Ключевые слова: *метод Пуансо, кинематические уравнения Харламова, углы Эйлера, параметры Родрига–Гамильтона.*

Введение. Заключительным этапом в исследовании случая интегрируемости дифференциальных уравнений задач динамики твердого тела служит геометрическое истолкование движения тела. Важность такого истолкования отмечали многие ученые. Л. Пуансо [1] говорил о том, что получение аналитических решений недостаточно для того, чтобы представить движение тела в течение всего времени наблюдения. Н.Е. Жуковский [2] утверждал, что любой аналитический результат должен быть объяснен в наглядной форме с помощью существующих в теоретической механике методов моделирования и истолкования. В связи с актуальностью проведения геометрических исследований в аналитической механике проблемами истолкования движения тел с неподвижной точкой занимались многие ученые. Г.К. Суслов [3] с исчерпывающей полнотой проанализировал движение свободного твердого тела в случае Эйлера. Особый успех в истолковании движения тела в общем случае был достигнут благодаря уравнениям неподвижного годографа, полученным П.В. Харламовым [4]. С помощью метода годографов П.В. Харламова теорема Пуансо была реализована во многих решениях уравнений движения тяжелого гиростата и тяжелого твердого тела. Получена обширная информация о свойствах движения в задачах динамики твердого тела (см. [5–8]).

В последние годы предложены новые модифицированные методы истолкования движения тела с неподвижной точкой. В [9] получен метод годографов, позволяющий представить движение тела качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному годографу этого вектора. Этот метод позволяет, например, в качестве неподвижного годографа данного вектора выбрать плоскую кривую и получить картину движения тела, близкую по наглядности к истолкованию Пуансо случая Эйлера. На основе метода [9] в [10] предлагается истолкование движения тела с помощью качения без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному, приняв в качестве подвижного годограф вектора, конец которого принадлежит эллипсоиду инерции тела.

В [11] предложен комплексный подход в истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой. Данная статья посвящена описанию различных методов истолкования движения твердого тела с неподвижной точкой.

1. Постановка задачи. Случай Эйлера. Запишем уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей, в которых происходит движение тела; $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ – вектор-функция переменных $\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\nu}(t)$.

Например, уравнения (1) для задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, имеют вид

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор, направленный из неподвижной точки O в центр тяжести тела C; $s = mg|\mathbf{OC}|$ (m – масса тела, g – ускорение свободного падения); $A = (A_{ij})$ – тензор инерции тела в неподвижной точке; точка над $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ обозначает дифференцирование по t в подвижной системе координат.

Полагаем, что в результате интегрирования уравнений (1), (2) найдены вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\mathbf{i}_j, \qquad \boldsymbol{\nu}(t) = \sum_{j=1}^{3} \nu_j(t)\mathbf{i}_j. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы подвижной системы координат $Oxyz$. Через э_1, э_2, э_3 обозначим единичные векторы неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$.

Случай Л. Эйлера характеризуется условием $s = 0$, т. е. в этом случае центр масс неподвижен. Кинематическим истолкованием движения тела в решении Эйлера занимались многие ученые (см. [3, 5–7]). Дадим краткую характеристику результатов, полученных в исследовании движения тела в этом решении.

Л. Пуансо [1] ввел понятие эллипсоида инерции и дал следующее истолкование движения тела в случае Эйлера: эллипсоид инерции тела для точки опоры во время движения катится без скольжения по неподвижной в пространстве касательной плоскости, перпендикулярной к главному моменту количества движения тела, мгновенная угловая скорость по величине пропорциональна радиусу-вектору точки касания, а по направлению с ним совпадает.

Л. Пуансо предлагал и вторую интерпретацию, на основе которой Г. Дарбу и Ж. Кениг построили прибор, названный ими герпологрофом, с помощью которого воспроизводится движение тела по инерции.

Обобщением геометрических результатов Л. Пуансо является его теорема: движение твердого тела с неподвижной точкой можно представить качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу этого вектора.

Интерпретация И. Мак-Куллага основана на введенном им понятии гирационного эллипсоида тела. Он доказал, что гирационный эллипсоид, построенный в точке опоры, проходит во все время движения через неподвижную точку в пространстве, лежащую на неизменном главном моменте количества движения; при этом мгновенная ось направлена по перпендикуляру, опущенному из точки опоры на касательную плоскость к гирационному эллипсоиду в этой неподвижной точке и мгновенная скорость тела обратно пропорциональна величине этого перпендикуляра.

Ж. Сильвестр доказал теорему о том, что вращение Пуансо, будучи сложено с постоянным вращением около перпендикуляра из точки опоры на плоскость катания, дает снова вращение Пуансо.

К. Якоби установил, что всякое вращение Эйлера может быть разложено на постоянное вращение около нормали, опущенной из неподвижной точки на плоскость катания, и на некоторое колебательное движение Пуансо (последнее представляется катанием однополостного гиперболоида по плоскости, параллельной плоскости катания во вращении Эйлера). Следует отметить его результат для случая Лагранжа: движение гироскопа Лагранжа может быть разложено на два движения Пуансо.

Заметим, что многие ученые не ограничивались теоретическими исследованиями, а предлагали конкретные конструкции для интерпретации движения: отмеченный выше прибор Дарбу и Кенига; прибор Боненбергера, демонстрирующий некоторые движения гироскопа Лагранжа; модель Г. Шварца, описывающая гироскоп Ковалевской, и другие. Остановимся более подробно на приборе Г. Шварца. Он представляет собой следующую модель: тело, состоящее из двух цилиндров, оси которых параллельны и находятся на расстоянии $2b$ одна от другой и у которых окружности оснований в одной и той же плоскости имеют одинаковые диаметры. Н.Б. Делоне дал более простой пример. Его утверждение таково: "Примером такого движения служит движение прямоугольного параллелепипеда размером $2a \times 2b \times 2c$, подчиненного условию $c = b\sqrt{3}$ и подпертого в точке, лежащей на прямой, проходящей через центр тяжести параллельно ребру $2a$ и отстоящей от центра тяжести на расстоянии $x_0 = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{3}}$. Такая опора может быть сделана посредством спицы, пропущенной сквозь параллелепипед".

Н.И. Мерцалов построил гироскоп, удовлетворяющий приближенно условиям Н.Б. Делоне и сфотографировал движение светящейся точки, помещенной на оси Oz.

В монографии [6] изложен подход в истолковании движения тела, который предложил Н.Е. Жуковский. Он основан на свойствах момента количества движения.

Таким образом, в период становления геометрических методов в динамике твердого тела применялись различные подходы истолкования движения твердого тела с неподвижной точкой.

2. Истолкование движения с помощью углов Эйлера. Если найдены вектор-функции (3), то из соотношений [12]

$$\omega_1(t) = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \qquad \omega_2(t) = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_3(t) = \dot\varphi + \dot\psi \cos\varphi; \tag{4}$$

$$\nu_1(t) = \sin\theta \sin\varphi \qquad \nu_2(t) = \sin\theta\cos\varphi \qquad \nu_3(t) = \cos\theta \tag{5}$$

можно определить функции $\theta(t), \varphi(t), \psi(t)$. Используя векторную запись, из равенств (4), (5) получим

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot \mathbf{i}_1}{\boldsymbol{\nu}(t)\cdot \mathbf{i}_2}, \qquad \theta(t) = \arccos(\boldsymbol{\nu}(t)\cdot \mathbf{i}_3), \\ \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(\boldsymbol{\omega}(t)\times \mathbf{i}_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(t)\times \mathbf{i}_3)^2}\, d\tau. \tag{6}$$

Функции (6) имеют геометрический смысл углов Эйлера. Они позволяют определить положение тела в любой момент времени. Матрица ориентации $B(\theta, \varphi, \psi)$ приведена во многих книгах по теоретической механике (см., например, [12]). Существенным моментом в ее использовании является задание функций $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ в начальный момент времени t_0.

Как показано Г. Дарбу, нахождение функций $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ только через компоненты вектора угловой скорости $\omega_i(t)$ из (4) приводит к решению уравнения класса Рикатти. Следовательно, в общем случае определение ориентации тела в пространстве через компоненты угловой скорости не представляется возможным [12, 13].

3. Параметры Родрига–Гамильтона. В задачах ориентации твердого тела с неподвижной точкой используют численные алгоритмы [14, 15]. Поскольку использование углов Эйлера в этом случае может привести к особенностям, то применяются параметры Родрига–Гамильтона. Если известны функции $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$, то параметры Родрига–Гамильтона находятся из соотношений [12]

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \tag{7}$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}. \tag{8}$$

Параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют кинематическому соотношению

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{9}$$

Укажем зависимости углов Эйлера и компонент $\omega_i(t)$ и $\nu_i(t)$ от параметров $\lambda_i \quad (i=\overline{0,3}) \quad [12,13]$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}, \quad \cos\theta = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \omega_1 = 2(\lambda_0\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_0 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3), \\ \omega_2 = 2(\lambda_1\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_1 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1), \quad \omega_3 = 2(\lambda_2\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_2 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \tag{12}$$

Параметры Родрига–Гамильтона в задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, применялись в [12–17]. В этих параметрах может быть записана и матрица ориентации тела [12, 13].

4. Кинематические уравнения П.В. Харламова. Модифицированная формула для полярного угла. В [4] П.В. Харламов получил уравнения неподвижного годографа, которые оказались эффективными в методе годографов, основанном на теореме Пуансо. Первая формула из (3) определяет подвижный годограф вектора угловой скорости. В [4] указано следующее уравнение неподвижного годографа:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi(t)\,\boldsymbol{\unicode{x044D}}_1 + \omega_\eta(t)\,\boldsymbol{\unicode{x044D}}_2 + \omega_\zeta(t)\,\boldsymbol{\unicode{x044D}}_3, \tag{13}$$

где

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t), \quad \omega_\zeta(t) = \sum_{i=1}^{3}\omega_i(t)\nu_i(t), \tag{14}$$

$$\omega_\rho^2(t) = \sum_{i=1}^{3}\omega_i^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \quad \alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)}\big[\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau)\cdot(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau))\big]d\tau. \tag{15}$$

Примеры кинематического истолкования движения твердого тела и гиростата по методу П.В. Харламова приведены в [5–8].

Определенную сложность в применении формулы для полярного угла из (15) представляет зависимость этого угла от производной угловой скорости – $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$. В [9] получена более простая формула. Она основана на соотношении [9]

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \delta\frac{\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)\cdot\big(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}_3\big)}{\mathbf{i}_3\cdot\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)}, \tag{16}$$

где $\delta = 0$, если угол θ между векторами $\boldsymbol{\nu}(t)$ и $\mathbf{i}_3$ постоянен и $\delta = 1$ в противном случае. Если учесть в (16) выражение $\psi(t)$ из (6), то получим формулу [9]

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \delta\ \operatorname{arctg}\frac{\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)\cdot\big(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}_3\big)}{\mathbf{i}_3\cdot\big(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)\big)} + \int\limits_{t_0}^{t}\frac{\big(\boldsymbol{\omega}(\tau)\times\mathbf{i}_3\big)\cdot\big(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}_3\big)}{\big(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\mathbf{i}_3\big)^2}d\tau. \tag{17}$$

Преимущество формулы (17) перед формулой для $\alpha(t)$ из (15) очевидно, так как в (17) не входит производная $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$. Формула (16) показывает, что функции $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ связаны между собой алгебраической зависимостью от $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$. Данное обстоятельство можно использовать в задачах нахождения угла прецессии $\psi(t)$ в тех многочисленных случаях кинематического истолкования [5–8], в которых свойства функции $\alpha(t)$ достаточно полно изучены. Полученные результаты могут быть использованы в кинематическом истолковании движения тела с помощью углов Эйлера.

5. Комплексный подход в истолковании движения тела с неподвижной точкой. Данный подход предложен в [11] и основан на формулах (7)–(12), (16), (17) и на уравнениях ($\theta \neq \text{const}$):

$$\omega_\xi(t) = \dot{\psi}(t) + \varphi(t)\cos\theta(t), \quad \omega_\rho^2(t) = \dot{\theta}^2(t) + \varphi^2(t)\sin^2\theta(t), \tag{18}$$

$$\alpha(t) = \psi(t) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{\dot{\varphi}(t)\sin\theta(t)}{\dot{\theta}(t)}\Big), \tag{19}$$

$$\omega_\zeta = 4\big[(\lambda_0^2+\lambda_3^2)(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0) + (\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\lambda_1\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_1)\big], \tag{20}$$

$$\omega_\rho^2 = 4\Lambda + \big[(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^\bullet\big]^2, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_0\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\dot{\lambda}_3}{\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_2\dot{\lambda}_3} + \operatorname{arctg}\frac{2\Lambda}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^\bullet}, \tag{21}$$

$$\Lambda = (\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\dot{\lambda}_0\lambda_3 - \lambda_0\dot{\lambda}_3) + (\lambda_0^2+\lambda_3^2)(\lambda_1\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_1). \tag{22}$$

Суть комплексного подхода в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, состоит в том, что при рассмотрении дифференциальных уравнений движения могут быть использованы различные переменные задачи и различные формы уравнений движения. Первую форму уравнений можно записать, используя (1):

$$\dot{\omega}_i = F_i(\omega_i, \nu_i), \qquad \dot{\nu}_i = \varphi_i(\omega_i, \nu_i) \quad (i = \overline{1,3}). \tag{23}$$

После интегрирования уравнений (23) углы Эйлера можно определить по формулам (6), параметры Родрига–Гамильтона – по формулам (7), (8), уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости – по формулам (13)–(15) (с учетом представления угла $\alpha(t)$ в виде (17)).

Вторая форма уравнений движения твердого тела имеет вид [13, 17]:

$$\dot{\omega}_i = U_i(\omega_i, \lambda_0, ..., \lambda_3), \qquad \dot{\lambda}_j = V_j(\omega_i, \lambda_0, ..., \lambda_3) \quad (i = \overline{1,3},\ j = \overline{0,3}). \tag{24}$$

Если известно решение уравнений (24), то углы Эйлера определяются из (10), уравнения неподвижного годографа находятся из (20)–(22).

Третья форма уравнений движения содержит в качестве переменных углы Эйлера и имеет второй порядок:

$$\ddot{\varphi} = W_1(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}), \quad \ddot{\psi} = W_2(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}), \quad \ddot{\theta} = W_3(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}). \tag{25}$$

Решение уравнений (25) может быть использовано для кинематического истолкования движения тела. Оно позволяет из (7), (8) найти параметры $\lambda_j \quad (j = \overline{0,3})$, а с помощью уравнений (18), (19) применить теорему Пуансо для истолкования движения тела методом годографов.

6. Модифицированный метод Пуансо [9, 10]. Рассмотрим подвижный и неподвижный годографы вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ (см. формулы (3), (13)). Если через Ω_0 обозначить начальную точку (при $t = t_0$) на подвижном годографе, а через Ω_0' – на неподвижном годографе и Ω^* – точку касания годографов в момент времени t, то из равенства абсолютной и относительной производных $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$ следует, что $\smile \Omega_0\Omega^* =\smile \Omega_0'\Omega^*$. Из последнего равенства и вытекает теорема Пуансо о том, что движение тела воспроизводится качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Введем в рассмотрение вектор, коллинеарный вектору угловой скорости [5]

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t) \quad (b(t) > 0), \tag{26}$$

где $b(t)$ – дифференцируемая функция времени t. На основании условия $d\mathbf{b}(t)/dt = d'\mathbf{b}(t)/dt$, вытекающего из (26), следует, что подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ имеют общую касательную, а длины дуг, описанных за одинаковый промежуток времени концом вектора $\mathbf{b}(t)$ на подвижном и неподвижном годографах, равны. Движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижному годографу этого вектора [5]. Указанное свойство позволяет для кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой использовать вектор $\mathbf{b}(t)$.

Первый вариант. Пусть в уравнениях (14) функция $\omega_\zeta(t) \neq 0$. Выберем в (26) функцию $b(t)$ в виде

$$b(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}. \tag{27}$$

В силу (13), (26), (27) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ имеет представление

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta(t)}\,\text{э}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta(t)}\,\text{э}_2 + \text{э}_3. \tag{28}$$

Подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ с учетом (3), (26), (27) запишем в виде

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)} \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\mathbf{i}_j. \tag{29}$$

Движение тела воспроизводим качением без скольжения аксоида с направляющей (29) по аксоиду с направляющей (28). В силу (28) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является плоской кривой. Использование вектора $\mathbf{b}(t)$ позволяет получить картину движения тела, близкую по наглядности к картине движения, указанной Л. Пуансо. В [8] показано, что в решении А.И. Докшевича [14] движение тела можно представить качением без скольжения двух плоских кривых.

Замечание. Указанный вариант интерпретации движения может быть обобщен и на случай, когда подвижный годограф является плоской кривой.

Второй вариант. Представляется актуальным получение такого метода в истолковании движения, который бы не содержал субъективных факторов конкретного подхода, а был бы универсальным для любых решений уравнений динамики твердого тела. Так как при истолковании движения тела не используется его конструктивное строение, то вполне естественно представляется применить объективный фактор в истолковании движения (как это осуществил Л. Пуансо), а именно свойство движения эллипсоида инерции. Положим, что конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежит эллипсоиду инерции в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции тела. Тогда уравнение эллипсоида инерции таково:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = \sigma_0^2, \tag{30}$$

где x, y, z – координаты точек, принадлежащих эллипсоиду, σ_0^2 – постоянная. Потребуем, чтобы конец вектора $\mathbf{b}(t)$ из формулы (26) принадлежал эллипсоиду (30). Для нахождения функции $b(t)$ подставим в (30) вместо x, y, z величины $b_i = b(t)\omega_i(t)$. Тогда

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{A_1\omega_1^2(t) + A_2\omega_2^2(t) + A_3\omega_3^2(t)}}. \tag{31}$$

В силу (3), (26) подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ запишем в виде

$$\mathbf{b}(t) = b(t)(\omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3), \tag{32}$$

а неподвижный годограф – в виде

$$\mathbf{b}(t) = b(t)(\omega_\rho(t)\cos\alpha(t)\,\boldsymbol{\text{э}}_1 + \omega_\rho(t)\sin\alpha(t)\,\boldsymbol{\text{э}}_2 + \omega_\xi(t)\,\boldsymbol{\text{э}}_3). \tag{33}$$

Функция $b(t)$ определена выражением (31).

Движение тела будем воспроизводить качением годографа (32) по годографу (33).

7. Решение В.А. Стеклова. Рассмотрим для примера решение В.А. Стеклова [19] в обозначениях [20]:

$$\omega_1 = p_{10}\,\mathrm{cn}\chi t, \quad \omega_2 = -p_{20}\mathrm{sn}\chi t, \quad \omega_3 = p_{30}\mathrm{dn}\chi t; \qquad k_1 = \sqrt{\frac{b-1}{b-c}}, \tag{34}$$

где

$$p_{10} = p_{30}\sqrt{1-2c},\ \ p_{20} = \sqrt{\frac{1-2c}{(1-c)(b-1)(b-c)}},\ \ p_{30} = \sqrt{\frac{2b-1}{(1-c)^2(b-1)}},$$
$$\chi = \sqrt{\frac{1}{(1-c)k_1}}, \qquad b = \frac{A_2}{A_1}, \qquad c = \frac{A_3}{A_1}. \tag{35}$$

Следовательно, решение Стеклова выражается эллиптическими функциями Якоби (34), модуль которых k_1 определен последним равенством из (34). Величины p_{10}, p_{20}, p_{30} из (35) характеризуют вид подвижного годографа вектора угловой скорости.

В [10] дано истолкование движения гироскопа Стеклова с помощью метода годографов на основе первого способа (см. п. 6). Движение было представлено качением без скольжения векторов

$$\mathbf{b}(t) = \frac{p_{10}\mathrm{cn}\chi t}{\mathrm{dn}\chi t}\mathbf{i}_1 - \frac{p_{20}\mathrm{sn}\chi t}{\mathrm{dn}\chi t}\mathbf{i}_2 + p_{30}\mathbf{i}_3, \tag{36}$$

$$\mathbf{b}(t) = p_{30}\,\text{э}_1 + \frac{p_{20}\mathrm{sn}\chi t}{\mathrm{dn}\chi t}\,\text{э}_2 - \frac{p_{10}\mathrm{cn}\chi t}{\mathrm{dn}\chi t}\,\text{э}_3 \tag{37}$$

и показано, что кривые (36), (37) являются эллипсами.

Рассмотрим второй способ представления движения гироскопа Стеклова. Запишем вектор $\mathbf{b}(t)$ для случая (31) и решения (34). С точностью до постоянного множителя, который не влияет на общность задачи, получим

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{1+\mu_0\mathrm{sn}^2\chi t}}(p_{10}\mathrm{cn}\chi t, -p_{20}\mathrm{sn}\chi t, p_{30}\mathrm{dn}\chi t), \tag{38}$$

где $\beta_0 = \mathrm{const}$, $\mu_0 = \dfrac{2(1-b)}{(2b-1)}$, p_{i0} $(i=\overline{1,3})$ имеют значения из (35).

Из равенства (38), которое определяет годограф $\mathbf{b}(t)$ в теле, вытекает, что компоненты b_1, b_2 удовлетворяют уравнению

$$b_1^2p_{20}^2 + (1+\mu_0)b_2^2p_{10}^2 = \beta_0^2p_{10}^2p_{20}^2. \tag{39}$$

Второе уравнение, которому удовлетворяют компоненты b_i для случая Стеклова, найдем из соотношения (30):

$$b_1^2 + bb_2^2 + cb_3^2 = \sigma_1^2, \tag{40}$$

где σ_1 – постоянная. Таким образом, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является линией пересечения цилирдра (39) и эллипсоида инерции (40).

Неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ в силу (13) и формулы (26) имеет вид

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{1+\mu_0+\mathrm{sn}^2\chi t}}(p_{30}\mathrm{dn}\chi t,\ p_{20}\mathrm{sn}\chi t,\ -p_{10}\mathrm{dn}\chi t). \tag{41}$$

Движение гироскопа Стеклова [15] можно воспроизвести качением без скольжения годографа (38) по годографу (41), который в силу (41) является также линией пересечения эллипсоида инерции и цилиндра. Следовательно, движение эллипсоида инерции в рассматриваемом случае можно представить как качение по другому эллипсоиду. Нетрудно установить, что для данного способа сохраняется свойство симметричности аксоидов вектора относительно касательной к ним плоскости.

8. Выводы. В статье представлены методы истолкования движения тела с неподвижной точкой. Особое внимание уделено обсуждению новых подходов в представлении движения тела на основе годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости. Авторы полагают, что эти подходы позволят получить новые свойства движения в динамике твердого тела с неподвижной точкой.

1. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pur et Appl. – 1851. – Bd. 1, № 16. – P. 289–336.
2. *Жуковский Н.Е.* О значении геометрического истолкования в теоретической механике // Собр. соч.: в 7 т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 7. – С. 9–15.
3. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
4. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
5. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
7. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
8. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
9. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
10. *Горр Г.В., Синенко А.И.* О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 2014. – **20**, вып. 3. – С. 334–345.
11. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Применение параметров Родрига–Гамильтона при истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 2015. – **79**, вып. 5. – С. 635–643.
12. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
13. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
14. *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига–Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев: Наук. думка, 1986. – Вып. 69. – С. 47–52.
15. *Челноков Ю.Н.* К теории гирогоризонткомпаса в параметрах Родрига–Гамильтона // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 111–116.
16. *Козлов В.В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теор. и прикл. механика. – Белград: Югославское об-во механики. – 1982. – № 8. – С. 59–65.
17. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.
18. *Докшевич А.И.* Решение в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.

19. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, № 1. – С. 1–3.
20. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 194–202.

G.V. Gorr, A.M. Kovalev

The interpretation methods for the motions of the rigid body with the fixed point

The complex approach of the interpretation of the motion of the rigid body with fixed point was proposed. The analysis of the results along the research the free rigid body movements, obtained by Louis Poinsot, J. MacCullagh, C.G.J. Jacobi, J.J. Sylvester, G. Darboux, was done. The modified method of hodographs was proposed. The analytical dependences between the Euler angles, Rodrigues–Hamilton parameters and parameters of the fixed hodograph were indicated.

Keywords: *Poinsot method, Kharlamov equations, Euler angles, Rodrigues–Hamilton parameters.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 04.03.16

kovalev@iamm.su