УДК 517.944

А. В. Бабин, М. И. Вишик

АТТРАКТОРЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются параболические уравнения и системы реакции диффузии вида

$$\partial_t u(t, x) = \nu \Delta u(t, x) - f(u(t, x)) - \lambda_0 u(t, x) - g(x),$$

где $x \in R^n$, $t \geqslant 0$, $\lambda_0 > 0$, $\nu > 0$, а нелинейная функция f удовлетворяет некоторым естественным условиям. Установлено существование аттракторов таких уравнений в случае, когда x принадлежит ограниченной области $\Omega \subset R^n$. В данной работе изучается аналогичный вопрос во всем пространстве.

Введение. В статье рассматриваются параболические уравнения и системы реакции диффузии вида

$$\partial_t u(t, x) = \nu \Delta u(t, x) - f(u(t, x)) - \lambda_0 u(t, x) - g(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $t \geqslant 0$, $\lambda_0 > 0$, $\nu > 0$, а нелинейная функция f удовлетворяет некоторым естественным условиям, формулируемым ниже. Существование аттракторов таких уравнений доказано в случае, когда x принадлежит ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (см. [1—3]). При изучении уравнений во всем пространстве $\mathbf{R}^n$ существенную роль играют весовые функциональные пространства. Оказывается, что свойства соответствующих полугрупп различны в случае пространств с растущим и убывающим весом. В случае растущего веса (и соответственно быстро убывающих в бесконечности функций) аттрактор компактен, притяжение к нему происходит в сильной топологии, размерность аттрактора конечна. В случае убывающего веса притяжение к аттрактору происходит в слабой топологии, и его размерность может быть бесконечной.

Приведем формулировки результатов и краткие пояснения; подробные доказательства будут опубликованы в другой работе.

1. Полугруппа в пространствах растущих функций.

Обозначим при $\gamma \in \mathbb{R}$ через $\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(x)$ весовую функцию $\varphi_\gamma(x) = (1 + |x|^2)^\gamma$. Определим норму в пространстве $H_{l,\gamma}$ формулой

$$\|u\|_{l,\gamma}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|\varphi_\gamma^{1/2} \partial^\alpha u\|^2, \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)};$$

как обычно, $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, $|u|^2 = (u^1)^2 + \ldots + (u^m)^2$. Очевидно, при $\gamma > 0$ функции $u \in H_{0,\gamma}$ убывают в бесконечности быстрее, чем функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$, а при $\gamma < 0$ — медленнее. При $\gamma < -n/2$ в $H_{0,\gamma}$ содержится любая ограниченная измеримая функция.

Рассматривается случай, когда $\gamma < 0$.

Ниже предполагается, что функция $f = (f^1, \ldots, f^m)$ удовлетворяет условиям

$$f^1 u^1 + \ldots + f^m u^m \geqslant -C_0 |u|^2, \tag{2}$$

$$f(0) = 0, \quad f'(u) \geqslant -CI, \tag{3}$$

где f' — матрица первых производных; I — единичная матрица. Предполагается также, что при $n > 2$

$$|f'(u)| \leqslant C(1 + |u|^{p_2}), \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant p_0, \quad p_0 = \min(4/n, 2/(n-2)) \tag{4}$$

(при $n \leqslant 2$ $p_0 = 4/n$). В уравнении (1) ν — диагональная матрица с положительными диагональными элементами $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Уравнение (1) рассматриваем с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть $\gamma < 0$, $\gamma_1 = \max((\gamma - 1)/(p_2 + 1), \gamma)$, $\gamma_2 = \gamma(1 + p_2/2)$. Пусть $u_0 \in H_{0,\gamma_1} \cap H_{1,\gamma} = H$, $g \in H_{0,\gamma_1}$. Тогда $\forall T > 0$ существует решение $u(t, x) = u(t)$ задачи (1), (5), $u \in L_2([0, T], H_{2,\gamma}) \cap L_\infty([0, T], H_{1,\gamma})$, причем справедливы оценки

$$\|u(t)\|_{1,\gamma} \leqslant C \quad \forall t \in [0, T], \tag{6}$$

$$\int_0^T \|u(t)\|_{2,\gamma}^2 dt \leqslant C, \tag{7}$$

$$\left| \int_0^T \int \varphi_{\gamma_2} \partial_t u \cdot v dx dt \right| \leqslant C \left(\int_0^T \|\varphi_{\gamma_1}^{1/2} v\|_{1,0}^2 dt \right)^{1/2}, \tag{8}$$

$$\forall v \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n),$$

где C зависит от $\|u_0\|_{1,\gamma}$, $\|u_0\|_{0,\gamma_1}$, $\|g\|_{0,\gamma_1}$ и от T. Справедливы также оценки

$$\|u(t)\|_{0,\gamma_1} \leqslant C_1 \quad \forall t \in [0, T], \tag{9}$$

$$\int_0^T \|u(t)\|_{1,\gamma_1}^2 dt \leqslant C_1, \tag{10}$$

где C_1 зависит от $\|u_0\|_{0,\gamma_1}$, от $\|g\|_{0,\gamma_1}$ и T. Такое решение единственно. Если u_1 и u_2 — два решения (1) с начальными данными u_{01} и u_{02}, $u_{01}, u_{02} \in H$, то

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{0,\gamma_2} \leqslant C_2 e^{C_3 t} \|u_{01} - u_{02}\|_{0,\gamma_2}, \tag{11}$$

где C_2 и C_3 не зависят от t, u_{01}, u_{02}.

Доказательство теоремы 1 основано на выводе априорных оценок (6) — (10) для u. Сначала эти оценки получаем для решений u_R вспомогательной задачи в области $\Omega_R = \{x : |x| < R\}$, причем отыскивается решение $u = u_R$, удовлетворяющее граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$. Переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем решение задачи во всем пространстве.

В силу теоремы 1 уравнение (1) порождает в пространстве $H = H_{0,\gamma_1} \cap H_{1,\gamma}$ полугруппу $\{S_t\}$, $S_t : u(0) \to u(t)$.

Напомним определение (H, H_w)-аттрактора и (H, H)-аттрактора.

Определение 1. Множество $\mathfrak{A} \subset H$ является (H, H_w)-аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, действующей в гильбертовом пространстве H, если выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{A}$ строго инвариантно, т. е. $S_t\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ для любого $t \geqslant 0$.

2) $\mathfrak{A}$ компактно в топологии H_w (т. е. в слабой топологии H).

3) $\mathfrak{A}$ притягивает в топологии H_w множества, ограниченные в H. (Это означает, что для любого ограниченного в H множества B и для любой окрестности O (в H_w) множества $\mathfrak{A}$ найдется такое $t_0 > 0$, что при всех $t \geqslant t_0$ $S_tB \subset O$).

Если в п. 2 и 3 слабая топология H_w заменена на сильную топологию H, то $\mathfrak{A}$ называется (H, H)-аттрактором.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, пусть, кроме того, $\gamma_1 < -n/2$ и, помимо (2) — (4), f удовлетворяет условию

$$f^1(u)\,u^1 + \ldots + f^m(u)\,u^m \geqslant -C. \qquad (12)$$

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$, порождаемой уравнением (1), имеется (H, H_w)-аттрактор $\mathfrak{A}$.

Доказательство теоремы 2 основано на двух фактах. Во-первых, существует поглощающее множество B_0, ограниченное в H. Во-вторых, операторы S_t непрерывны из H_w в H_w. Из этих двух фактов и из теоремы о существовании аттрактора (см. [3]) следует, что существует (H, H_w) — аттрактор $\mathfrak{A}$.

2. **Существование сильного аттрактора при $\gamma > 0$.** Рассматривается полугруппа в пространствах сильно убывающих функций, то есть случай, когда $\gamma > 0$.

Теорема 3. Пусть $\gamma \geqslant 0$, $u_0 \in H_{1,\gamma}$, $g \in H_{0,\gamma}$. Тогда существует и единственно решение задачи (1), (5), удовлетворяющее оценкам (6) — (10), где $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Справедливо также неравенство (11).

В силу теоремы 3 в $H_{1,\gamma}$ и в $H_{0,\gamma}$ действует полугруппа $\{S_t\}$, порождаемая (1).

Теорема 4. Пусть $\gamma \geqslant 0$, пусть, помимо условий (2) — (4), выполнено условие

$$f^1u^2 + \ldots + f^m u^m \geqslant 0. \qquad (13)$$

Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порождаемая (1), имеет $(H_{1,\gamma}, (H_{1,\gamma})_w)$-аттрактор $\mathfrak{A}$.

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Теорема 5. Пусть $\gamma > 0$, а функция f, помимо условий (2), (3), (4), (13), удовлетворяет условию

$$|f(u)| \leqslant C_1 |u|^{1+\alpha_1}(1 + |u|^{q_0}), \qquad (14)$$

где $\alpha_1 > 0$, $q_0 + \alpha_1 < p_0$, p_0 — то же, что в (4). Тогда полугруппа $\{S_t\}$, действующая в $H_{0,\gamma}$, обладает $(H_{0,\gamma}, H_{0,\gamma})$-аттрактором, ограниченным в $H_{2,\gamma}$.

Доказательство теоремы 5 состоит из нескольких этапов. На первом этапе на основании оценки

$$\| u(t) \|_{0,\gamma} \leqslant Ce^{-\lambda_0 t/2} \| u(0) \|_{0,\gamma} + C_2 \qquad (15)$$

устанавливается, что множество

$$B_1 = \{u : \| u \|_{0,\gamma} \leqslant 2C_2\}$$

является поглощающим. На основании оценки

$$\tau \| u(\tau) \|^2_{1,\gamma} \leqslant C_3 (\| u(0) \|_{0,\gamma}), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{16}$$

устанавливается, что поглощающее множество $B_2 = S_1 B_1$ ограничено в $H_{1,\gamma}$. На основании оценки

$$\tau \| u(\tau) \|^2_{2,\gamma} \leqslant C_4 (\| u(0) \|_{1,\gamma}), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{17}$$

устанавливается, что поглощающее множество $B_3 = S_1 B_2$ ограничено в $H_{2,\gamma}$. Поглощающее множество $B_4 = \cup \{S_t B_3, t \geqslant 1\}$ инвариантно и ограничено в $H_{2,\gamma}$. Операторы S_t непрерывны на B_4 в топологии $H_{0,\gamma}$. Построим теперь притягивающее множество B_5, компактное в $H_{0,\gamma}$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\partial_t v = \nu \Delta v - \lambda_0 v - g, \quad v|_{t=0} = u_0 \in B_4. \tag{18}$$

Положим $w(t) = w(t, u_0) = S_t u_0 - v(t)$. Доказывается, что множество

$$B_6 = \cup \{h : h = w(t, u_0), \quad t \geqslant 0, \quad u_0 \in B_4\}$$

компактно в $H_{0,\gamma}$. Пусть g_0 — решение уравнения

$$\Delta g_0 - \lambda_0 g_0 = g, \quad g_0 \in H_{2,\gamma}.$$

Тогда множество $B_5 = g_0 + B_6$ является компактным в $H_{0,\gamma}$ притягивающим множеством. Из существования такого множества и непрерывности S_t следует (см. [3]) существование $(H_{0,\gamma}, H_{0,\gamma})$-аттрактора.

Замечание. Если $g \in H_{0,\gamma_0}$, $\gamma_0 > 0$, то полугруппы $\{S_t\}$ действуют в пространствах $H_{0,\gamma}$ при $0 < \gamma \leqslant \gamma_0$ и имеют там в силу теоремы 5 аттракторы $\mathfrak{A}(\gamma)$. Более подробное рассмотрение показывает, что эти аттракторы не зависят от γ, $\mathfrak{A}(\gamma) = \mathfrak{A}(\gamma_0)$.

3. **Конечность хаусдорфовой размерности аттрактора. Теорема 6.** Пусть $\gamma > 0$ и функция f удовлетворяет, помимо условий (2) — (4), (13), (14), условию

$$| f'(u) - f'(v) | \leqslant C | u - v |^{\alpha} (1 + | u | + | v |)^{q_0}, \tag{19}$$

где $\alpha > 0$, $q_0 + \alpha \leqslant p_0$, p_0 — то же, что в (4). Положим $\nu_0 = \min (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\nu_0 > 0$. Справедливы следующие утверждения:

1) Если

$$f'(u) \geqslant - | u |^{\alpha_0} C_1(u) I, \quad \alpha_0 > 0,$$

то

$$\dim \mathfrak{A} \leqslant C_1 \nu_0^{-n/2} \lambda_0^{-3-2/\alpha_0} \| g \|^2_{0,0}.$$

2) Если

$$f'(u) \geqslant - C | u |^{4/(n+2)} I,$$

то

$$\dim \mathfrak{A} \leqslant C_1 \nu_0^{-n/2} \lambda_0^{-3}.$$

Доказательство основано на оценке снизу d-мерного следа оператора $A_1(\tau)$,

$$A_1(\tau) v = - \nu \Delta v + f'(u(\tau)) v + \lambda_0 v,$$

где $u(\tau) = S_\tau u_0$, $u_0 \in \mathfrak{A}$, и на последующем использовании теоремы о конечности размерности аттрактора (см. [3, 4]).

В заключение приведем пример, показывающий, что при $\gamma < 0$, в отличие от случая, когда $\gamma > 0$, аттрактор может быть бесконечномерен. Этот же пример показывает, что при $\gamma > 0$ может не существовать конечномерного аттрактора, если не выполнено условие (13).

Пусть

$$\left.\begin{aligned} f_0(u) &= -u \quad \text{при } |u| \leqslant 1, \\ f_0(u) &= u - 2 \text{ при } u \geqslant 1, \\ f_0(u) &= 2 + u \text{ при } u \leqslant -1. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\partial_t u = \Delta u - f(u). \tag{21}$$

Это уравнение имеет вид (1), где $g = 0$, $f(u) = f_0(u) - \lambda_0 u$, причем при $|\lambda_0| < 1$ выполнено условие (12). При $\gamma_1 < -n/2$ это уравнение порождает полугруппу в $H = H_{0,\gamma_1} \cap H_{1,\gamma}$, где γ и γ_1 те же, что в теореме 1, $\gamma \leqslant \gamma_1 < -n/2$, и эта полугруппа имеет аттрактор $\mathfrak{A}$ в силу теоремы 2. Заметим, что если $\{u(t), -\infty < t < +\infty\} = \Gamma$-траектория S_t, ограниченная в H, то $\Gamma \subset \mathfrak{A}$. Это следует из инвариантности Γ и притяжения Γ к аттрактору $\mathfrak{A}$. Следовательно, если множество X лежит в объединении таких Γ, то $X \subset \mathfrak{A}$.

Построим бесконечномерное семейство ограниченных траекторий. Найдем решения $u(t) = u(t, x)$, $t \leqslant 0$, уравнения (21) удовлетворяющие следующим условиям:

$$|u(t)| \leqslant 1, \quad \forall t \leqslant 0, \tag{22}$$

$$|\nabla u(t)| \leqslant C, \quad \forall t \leqslant 0. \tag{23}$$

В силу определения f_0 решение $u(t)$, удовлетворяющее (22), при $t \leqslant 0$ является решением линейного уравнения

$$\partial_t u = \Delta u + u, \quad t \leqslant 0. \tag{24}$$

После преобразования Фурье по x (24) примет вид

$$\partial_t \tilde{u} = (-|\xi|^2 + 1)\tilde{u}, \quad t \leqslant 0, \tag{25}$$

где $\tilde{u}(t, \xi)$ — преобразование Фурье по x функции $u(t, x)$.

Возьмем такую функцию $\tilde{u}_0(\xi)$, что

$$\tilde{u}_0(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant 1/2, \tag{26}$$

$$|\tilde{u}_0(\xi)| \leqslant 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Решение (25) с начальным условием

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0 \tag{28}$$

дается формулой

$$\tilde{u}(t, \xi) = e^{(1-|\xi|^2)t}\tilde{u}_0(\xi) \quad \forall t \leqslant 0. \tag{29}$$

Для функции $\tilde{u}(t, \xi)$, удовлетворяющей (26), (27) и (29),

$$|u(t, x)| = (2\pi)^{-n}\left|\int e^{-ix\xi}\tilde{u}(t, \xi)\, d\xi\right| \leqslant \sup_{|\xi| \leqslant 1/2} e^{(1-|\xi|^2)t}|\tilde{u}_0(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{t/2}\sup_\xi |\tilde{u}_0(\xi)| \leqslant e^{t/2}. \tag{30}$$

Аналогично

$$|\partial_j u(t, x)| = (2\pi)^{-n}\int \xi_j e^{-ix\xi}\tilde{u}(t, \xi)\, d\xi \leqslant \sup_{|\xi| \leqslant 1/2} (\xi_j e^{(1-|\xi|^2)t}|\tilde{u}_0(\xi)|) \leqslant e^{t/2}/2. \tag{31}$$

Из (30) следует, что при $t \leqslant 0$ выполнено (27). Из (30) и (31) следует, что $\|u(t)\|_{0,\gamma_1} + \|u(t)\|_{1,\gamma} \leqslant C \quad \forall t \leqslant 0$. Действительно, при $\gamma_1 < -n/2$

$$\|u(t)\|^2_{0,\gamma_1} = \int (1 + |x|^2)^{\gamma_1}|u(t, x)|^2\, dx \leqslant \int (1 + |x|^2)^{\gamma_1} dx \leqslant C_0.$$

Аналогичная оценка верна и для $\|u(t)\|_{1,\gamma}$. Для решений (21) справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{1,\gamma} + \|u(t)\|_{0,\gamma_1} \leqslant C_1 \quad \forall t \geqslant 0 \tag{32}$$

при $\| u(0) \|_{1,\gamma} + \| u(0) \|_{0,\gamma_1} \leqslant C_2$. В силу этой оценки при выполнении (26), (27)

$$\| u(t) \|_{0,\gamma_1} + \| u(t) \|_{1,\gamma} \leqslant C_3 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, $\{u(t)\}$ является ограниченной траекторией полугруппы $\{S_t\}$, порождаемой (21). Следовательно, $u_0 = u(0) \in \{u(t), t \in \mathbf{R}\} \subset \mathfrak{A}$.

Очевидно, множество функций $\tilde{u}_0$, удовлетворяющих (26), (27), бесконечномерно. Поэтому множество соответствующих u_0 бесконечномерно, и, следовательно, аттрактор $\mathfrak{A}$ бесконечномерен.

1. *Генри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 352 с.
2. *Hale J. K.* Asymptotic behavior of dissipative systems. Amer. Math. Soc., Providence, R. I, 1988.— P. 283—288.
3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М. : Наука, 1989.— 380 с.
4. *Constantin P., Foias C., Temam R.* Attractors representing turbulent flows//Mem. Aer. Math. Soc.—1985,. — 53, N 314.— P. 36—48.

Моск. гос. ун-т Получено 26.10.89