УДК 517.946

Я. А. Ройтберг

ЗАДАЧА КОШИ, ГРАНИЧНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВСКИХ

Доказаны теоремы о разрешимости задачи Коши, граничных и смешанных задач для строго гиперболических в смысле Лере — Волевича систем в полной шкале пространств соболевских, зависящих от действительных параметров s и τ : s — порядок гладкости решения по всем переменным, τ характеризует дополнительную гладкость решения по тангенциальным переменным. Чем меньше s и τ, тем более обобщенным является решение; для достаточно больших s и τ решение является обычным классическим решением рассматриваемой задачи. Общие гиперболические системы изучаются также во всем R^{n+1}. В изучаемых задачах старшие коэффициенты — комплексные постоянные, младшие — комплекснозначные функции.

Данная работа примыкает к работам автора [1—3]. В ней задача Коши, граничные и смешанные задачи изучаются для строго гиперболических (по Лере — Волевичу) систем в полной шкале пространств типа соболевских, зависящих от параметров $s, \tau \in R$: s — порядок гладкости решения по всем переменным; τ характеризует дополнительную гладкость решения по тангенциальным переменным. Чем меньше s и τ, тем более обобщенным является решение; для достаточно больших s и τ решение является обычным классическим решением рассматриваемой задачи. В [1—3] такие задачи изучались для одного уравнения. По поводу более ранних работ см. приведенную в [1, 2] библиографию и обзор [4]; граничные и смешанные задачи для гиперболических уравнений в классах достаточно гладких функций изучались в работах [5—8].

1. Постановка задач. Пусть

$$l = l(D_t, D_x) = (l_{kj}(D_t, D_x))_{k, j=1,\dots,N} \tag{1}$$

— матричное дифференциальное выражение

$$\begin{aligned} l_{kj}(D_t, D_x) &= \sum_{p+|\alpha|=s_k+t_j} l_{p\alpha}^{kj} D_t^p D_x^\alpha \ (\forall k, j: s_k + t_j \geqslant 0), \\ l_{kj}(D_t, D_x) &\equiv 0 \quad (\forall k, j: s_k + t_j < 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $D_t = i\partial/\partial t$; $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$; $D_j = i\partial/\partial x_j$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $s_1, \dots, s_N$; $t_1, \dots, t_N$ — неотрицательные числа: $t_1 \geqslant \dots \geqslant t_N \geqslant 0 = s_1 \geqslant \dots \geqslant s_N$, $l_{p\alpha}^{kj}$ — комплексные числа.

Пусть $s_1 + \dots + s_N + t_1 + \dots + t_N = r$,

$$L(\sigma, \xi) = \det(l(\sigma, \xi)) = \sum_{j+|\alpha|=r} a_{j\alpha}\sigma^j\xi^\alpha. \tag{3}$$

Выражение (1) называют строго гиперболическим (по Лере — Волевичу), если полином (3) строго гиперболический в направлении t: коэффициент $a_{r,0,\ldots,0}$ при σ^r в (3) отличен от нуля и для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ корни уравнения $L(\sigma, \xi) = 0$ относительно σ вещественны и различны.

При изучении граничных и смешанных задач будем предполагать, что гиперплоскость $x_n = 0$ нехарактеристична относительно выражения (1), т. е. что коэффициент $a_{0,\ldots,0,r}$ полинома (3) при ξ_r^n отличен от нуля:

$$a_{0,\ldots,0,r} \neq 0. \tag{4}$$

Из строгой гиперболичности l следует, что для каждого $\gamma > 0$ уравнение

$$L(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = 0 \tag{5}$$

не имеет относительно ξ_n вещественных корней. Пусть

$$\zeta_1(\sigma + i\gamma, \xi'), \ldots, \zeta_r(\sigma + i\gamma, \xi') \tag{6}$$

$((\sigma + i\gamma, \xi') \neq (0, 0), \gamma \geqslant 0)$ — ξ_n — корни уравнения (5). Предположим для определенности, что при $\gamma > 0$ первые m корней (6) имеют отрицательную мнимую часть, остальные — положительную. Следовательно, m не зависит от $(\sigma + i\gamma, \xi')$. Положим

$$L(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = L_-(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n)\, L_+(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n),$$
$$L_-(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = \prod_{j=1}^{m} (\xi_n - \zeta_j(\sigma + i\gamma, \xi')). \tag{7}$$

В работе исследуются разрешимость в $\mathbb{R}^{n+1}$ задачи

$$l(D_t, D_x)\, u = f \quad (u = (u_1, \ldots, u_N),\ f = (f_1, \ldots, f_N)) \tag{8}$$

и разрешимость задачи Коши в полупространстве $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$:

$$l(D_t, D_x)\, u = f; \qquad D_t^{k-1} u_j|_{t=0} = u_{jk}\ (j : t_j \geqslant 1;\ k = 1, \ldots, t_j), \tag{9}$$

а также разрешимость этих задач для системы

$$(l(D_t, D_x) + l'(t, x, D_t, D_x))\, u = f, \tag{10}$$

полученной возмущением выражения l младшими членами с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены.

В полупространстве $G = \{(t, x', x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n \geqslant 0\}$ изучается граничная задача для системы (8):

$$lu = f \quad (\text{в } G),$$
$$(bu)_h \equiv b_h u \equiv \sum_{j=1}^{N} b_{hj}(D_t, D_x)\, u_j|_{x_n=0} = \varphi_h \quad (h = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Здесь $b_{hj}(D_t, D_x) = \Sigma_{k+|\mu|=\sigma_h+t_j} b_{hjk\mu} D_t D_x^{\mu}$ $(\forall h, j : \sigma_h + t_j \geqslant 0)$,

$$b_{hj}(D_t, D_x) \equiv 0 \quad (\forall h, j : \tau_h + t_j < 0),$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — заданные целые числа; $b_{hjk\mu}$ — комплексные числа.

Задачу (11) назовем гиперболической, если выражение (1) — строго гиперболическое, выполнено (4), число граничных условий на ∂G равно числу m корней (6) с отрицательными мнимыми частями и выполнено условие Лопатинского: для каждого $(\sigma + i\gamma, \xi') \neq (0, 0)$, $\gamma \geqslant 0$ строки матри-

цы
$$L(\sigma+i\gamma,\xi',\xi_n)\,(b(\sigma+i\gamma,\xi',\xi_n)\,l^{-1}(\sigma+i\gamma,\xi',\xi_n)),$$

элементы которой рассматриваются как полиномы от ξ_n линейно независимы по модулю $L_-(\xi_n)=L_-(\sigma+i\gamma,\xi',\xi_n)$.

В работе исследуется также граничная задача

$$\begin{gathered}(l(D_t,D_x)+l(t,x,D_t,D_x))\,u=f\ (\text{в } G),\\ (b(D_t,D_x)+b(t,x,D_t,D_x))\,u\,|_{x_n=0}=\varphi\quad(\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)).\end{gathered}\tag{12}$$

Здесь $\operatorname{ord} b_{hj}(t,x,D_t,D_x)\leqslant\sigma_h+t_j-1$, если $\sigma_h+t_j\geqslant1$; если $\sigma_h+t_j<1$, то $b_{hj}\equiv0$; $\operatorname{ord} l_{jk}(t,x,D_t,D_x)\leqslant s_j+t_k-2$, если $s_j+t_k\geqslant2$; $l_{jk}\equiv0$, если $s_j+t_k<2$. Задача (12) получена возмущением задачи (11) подчиненными членами с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограниченны.

Отметим здесь также, что если правые части (11), (12) аннулируются при $t\leqslant0$, то равны нулю при $t\leqslant0$ и решения этих задач. Поэтому из теорем о разрешимости задач (11), (12) следуют теоремы о разрешимости соответствующих смешанных задач в $G_+=\{(t,x)\in G: t>0\}$ с однородными (нулевыми) начальными данными при $t=0$.

2. **Функциональные пространства.** Пусть $s,\tau,\gamma\in\mathbb{R}$, $\Omega=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}: t>0\}$, $G=\{(t,x',x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}: x_n>0\}$. Через $H^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ обозначим как пространство распределений f с нормой

$$\|f,\mathbb{R}^{n+1},\gamma\|_{s,\tau}=\Big(\int(1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi|^2)^s(1+\gamma^2+|\xi|^2)^\tau\,|\tilde f(\sigma,\xi)|^2\,d\sigma d\xi\Big)^{1/2},\tag{13'}$$

так и пространство распределений f с нормой

$$\|f,\mathbb{R}^{n+1},\gamma\|_{s,\tau}=\Big(\int(1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi'|^2+\xi_n^2)^s(1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi'|^2)^\tau\times\\ \times|\tilde f(\sigma,\xi)|^2\,d\sigma d\xi\Big)^{1/2}.\tag{13''}$$

Здесь $\tilde f(\sigma,\xi)$ — преобразование Фурье элемента f, $\tilde f(\sigma,\xi)=\int f(t,x)\times\exp i(t\sigma+x\xi)\,dtdx$, если f — достаточно регулярная функция. При изучении задачи Коши в Ω будем пользоваться пространством с нормой (13′), а при изучении граничных и смешанных задач в G — пространством с (13″).

Если $s,\tau,\gamma\in\mathbb{R}$, $s\geqslant0$, то через $H^{s,\tau}(G,\gamma)$ обозначим пространство сужений на G функций из $H^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ с нормой фактор-пространства, а через $H^{-s,-\tau}(G,\gamma)$ — пространство, сопряженное $H^{s,\tau}(G,\gamma)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(G)$; $\|u,G,\gamma\|_{s,\tau}$ — норма в $H^{s,\tau}(G,\gamma)$ $(s,\tau\in\mathbb{R})$.

Через $H^s(\partial G,\gamma)$ $(s,\gamma\in\mathbb{R})$ обозначим пространство распределений g на ∂G, таких, что

$$\|g,\partial G,\gamma\|_s=\Big(\int\hat g(\sigma,\xi')\,(1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi'|^2)^s\,d\sigma d\xi'\Big)^{1/2}<\infty,\tag{14}$$

где $\hat g(\sigma,\xi')$ — преобразование Фурье на ∂G элемента g.

Пусть $C_0^\infty(G)$ — множество сужений на G функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Зафиксируем натуральное число r и пусть $s,\tau,\gamma\in\mathbb{R}$, $s\neq k+1/2$ $(k=0,\ldots,r-1)$. Через $H^{s,\tau,(r)}(G,\gamma)$ обозначим пополнение $C_0^\infty(G)$ по норме

$$|\!|\!|u,G,\gamma|\!|\!|_{s,\tau,(r)}=\Big(\|u,G,\gamma\|^2_{s,\tau}+\sum_{j=1}^{r}\|D_n^{j-1}u,\partial G,\gamma\|^2_{s-j+1/2+\tau}\Big)^{1/2}.\tag{15}$$

Если $s=k+1/2$ $(k=0,\ldots,r-1)$, то норма $|\!|\!|u,G,\gamma|\!|\!|_{s,\tau,(r)}$ и пространст во $H^{s,\tau,(r)}(G,\gamma)$ определяются с помощью интерполяции. Из (15) следует, что замыкание S отображения $u \to (u|_{\overline{G}}, u|_{\partial G}, \ldots, D_n^{r-1}u|_{\partial G})$ $(u \in C_0^\infty(\overline{G}))$ устанавливает изометрию между $\widetilde{H}^{s,\tau,(r)}(G,\gamma)$ и подпространством прямого произведения $H^{s,\tau}(G,\gamma)\Pi_{1\leqslant j\leqslant r}H^{s-j+1/2+\tau}(\partial G,\gamma)$ (см. [9]). Условимся ниже отождествлять элемент u с $Su = (u_0, u_1, \ldots, u_r) = (u_0, U)$; будем писать $u = (u_0, u_1, \ldots, u_r) = (u_0, U)$ для каждого $u \in \widetilde{H}^{s,\tau,(r)}(G,\gamma)$. Если $r = 0$, то положим по определению

$$\widetilde{H}^{s,\tau,(0)}(G,\gamma) = H^{s,\tau}(G,\gamma), |||u, G, \gamma|||_{s,\tau,(0)} = \| u, G, \gamma\|_{s,\tau}. \tag{16}$$

Введем еще пространства $\mathscr{H}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$, $\mathscr{H}^{s,\tau}(G,\gamma)$, $\mathscr{H}^{s}(\partial G,\gamma)$, $\widetilde{\mathscr{H}}^{s,\tau,(r)}(G,\gamma)$; нормы в них обозначим соответственно $|u, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, G, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, \partial G, \gamma|_s$, $|u, G, \varphi|_{s,\tau,(r)}$: $\mathscr{H}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+s},\gamma) = \{u : e^{-\gamma t}u \in H^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)\}$, $|u, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau} = \|e^{-\gamma t}u, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau}$; остальные пространства и нормы вводятся аналогично.

Лемма 1. Пусть $M = M(t, x, D_t, D_x)$ — линейное дифференциальное выражение порядка p с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены. Тогда для любых $s, \tau \in \mathbb{R}$ существует постоянная $c > 0$, не зависящая от u и γ, такая, что

$$|Mu, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s-p,\tau} \leqslant c\,|u, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})); \tag{17}$$

если $p \leqslant r$, то

$$|Mu, G, \gamma|_{s-p,\tau,(r-p)} \leqslant c\,|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)} \quad (u \in C_0^\infty(\overline{G})); \tag{18}$$

если $p \leqslant r-1$, то

$$|Mu, \partial G, \gamma|_{s-p-1/2+\tau} \leqslant c\,|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)} \quad (u \in C_0^\infty(\overline{G})). \tag{19}$$

Все утверждения остаются справедливыми после замены G на Ω.

Доказательство. Поскольку $M(t, x, D_t, D_x)u \equiv e^{\gamma t}M(t, x, D_t + i\gamma, D_x)(e^{-\gamma t})$, то

$$|Mu, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s-p,\tau} = \|e^{-\gamma t}Mu, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma\|_{s-p,\tau} = \|M(t, x, D_t + i\gamma, D_x)(e^{-\gamma t}u),$$
$$\mathbb{R}^{n+1}, \gamma\|_{s-p,\tau} \leqslant c\,\|e^{-\gamma t}u; \mathbb{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau} = c\,|u, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau},$$

и неравенство (17) установлено. Неравенства (18), (19) устанавливаются аналогично (ср. [2, 9]).

3. Строго гиперболические системы в $\mathbb{R}^{n+1}$. Из леммы 1 непосредственно следует, что для любых $s, \tau \in \mathbb{R}$ замыкание l отображения $u \to lu$ $(u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))^N)$ непрерывно действует в паре пространств

$$\mathscr{H}^{T+s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma) \equiv \Pi_{1\leqslant j\leqslant N}\mathscr{H}^{t_j+s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma) \to \mathscr{H}^{s-S,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma) \equiv$$
$$\equiv \Pi_{1\leqslant j\leqslant N}\mathscr{H}^{s-s_j,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma). \tag{20}$$

Возникает вопрос об обратимости оператора l.

Теорема 1. Пусть выражение (1) строго гиперболическое, $s, \tau, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$. Тогда для каждого $f \in \mathscr{H}^{s-S,\tau+1}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ существует один и только один элемент $u \in \mathscr{H}^{T+s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$, такой, что $lu = f$. При этом справедлива оценка

$$\Sigma_{1\leqslant j\leqslant N}|u_j, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{t_j+s,\tau} \leqslant \frac{c}{\gamma}\Sigma_{1\leqslant j\leqslant N}|f_j\, \mathbb{R}^{n+1}, \gamma|_{s-s_j,\tau+1} \tag{21}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от f, u и $\gamma(\gamma \geqslant \gamma_0 > 0)$. Если $\operatorname{supp} f \subset \subset \overline{\Omega}$, то и $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$.

Доказательство проводится по схеме работ [1, 2]. Оно основывается на том, что уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$l(D_t + i\gamma, D_x)(e^{-\gamma t}u) = e^{-\gamma t}f,$$

а матрица $l(\sigma + i\gamma, \xi)$ не вырождена при $\gamma \neq 0$ благодаря строгой гиперболичности l. Для получения оценки (21) используется.

Лемма 2. Пусть выражение (1) строго гиперболическое. Тогда существует постоянная $c > 0$, не зависящая от $(\sigma, \gamma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$ и такая, что $|L(\sigma + i\gamma, \xi)| \geqslant c|\gamma|(\sigma^2 + \gamma^2 + |\xi|^2)^{(r-1)/2}$.

Существует постоянная $M > 0$ такая, что на множестве $\{(\sigma, \gamma, \xi) \subset \subset \mathbb{R}^{n+2} : |\sigma| \geqslant M(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \vee |\xi_n| \geqslant M(\sigma^2 + \gamma^2 + |\xi'|^2)^{1/2}\}$ справедлива оценка

$$|L(\sigma + i\gamma, \xi)| \geqslant c(\sigma^2 + \gamma^2 + |\xi|^2)^{r/2}.$$

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы типа Палея — Винера (см. [2]).

Поскольку согласно теореме 1 норма оператора l^{-1} мала при больших γ, то легко следует

Теорема 2. Пусть выполнены предложения теоремы 1. Тогда существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$ задача (10) с $f \in \mathscr{H}^{s-S, \tau+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ имеет одно и только одно решение $u \in \mathscr{H}^{T+s, \tau}(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$; для него справедлива оценка (21) с постоянной $c > 0$, не зависящей от f, u и $\gamma(\gamma \geqslant \gamma_0 > 0)$. Если $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$, то $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$.

4. **Задача Коши**. Из леммы 1 непосредственно следует, что для любых $s, \tau, \gamma \in \mathbb{R}$ замыкание A отображения

$$u \to (lu, (D_t^{k-1} u_j|_{t=0} \forall j : t_j \geqslant 1; k = 1, \ldots, t_j) \quad (u \in (C_0^\infty(\Omega))^N)$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\tilde{\mathscr{H}}^{T+s, \tau, (T)}(\Omega, \gamma) \equiv \Pi_{1 \leqslant j \leqslant m} \tilde{\mathscr{H}}^{t_j+s, \tau, (t_j)}(\Omega, \gamma) \to K^{s, \tau} \equiv$$

$$\equiv \Pi_{1 \leqslant j \leqslant N} \tilde{\mathscr{H}}^{s-s_j, \tau, (-s_j)}(\Omega, \gamma) \times \Pi_{j : t_j \geqslant 1} \Pi_{1 \leqslant k \leqslant t_j} H^{t_j - k + 1/2 + \tau}(\partial\Omega, \gamma).$$

Возникает задача об обратимости оператора A. Отметим вначале, что если $Au = (f, U)$, $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \tilde{\mathscr{H}}^{T+s, \tau, T}(\Omega, \gamma)$; $u_j = (u_{j0}, U_j) = (u_{j0}, u_{j1}, \ldots \ldots, u_{j, t_j})(\forall j : t_j \geqslant 1)$; $f = (f_1, \ldots, f_N)$; $f_j = (f_{j0}, F_j) = (f_{j0}, f_{j1}, \ldots, f_{j, -s_j}) \times \times (\forall j : -s_j \geqslant 1)$, $U = (U_j : t_j \geqslant 1)$, то элементы $\{F_j\}$ вполне определяются элементами $\{U_j\}$ (ср. п. 2 и [9]). Поскольку $\{F_j\}$ и $\{U_j\}$ вполне определяются правыми частями (9), то для разрешимости задачи (9) в $\tilde{\mathscr{H}}^{T+s, \tau, (T)} \times \times (\Omega, \gamma)$ необходимо, чтобы $\{F_j\}$ определенным образом выражались через $\{u_j\}$. Соответствующие условия являются условиями совместности.

Теорема 3. Пусть выражение (1) строго гиперболическое, $s, \tau, \gamma \in \in \mathbb{R}$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$. Пусть $(f, U) \in K^{s, \tau+1}(\Omega, \gamma)$. Тогда существует один и только один элемент $u = (u_0, U) \in \tilde{\mathscr{H}}^{T+s, \tau, (T)}(\Omega, \gamma)$ такой, что $Au = (f, U)$. Существует постоянная $c > 0$, не зависящая от (f, U), $u, \gamma(\gamma \geqslant \gamma_0 > 0)$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j, \Omega, \gamma|_{t_j+s, \tau, (t_i)} \leqslant \frac{c}{\gamma} \|(f, U)\|_{K^{s, \tau+1}(\Omega, \gamma)}. \tag{22}$$

Существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$ утверждение теоремы справедливо для задачи Коши возмущенного уравнения (10).

5. **Граничные и смешанные задачи.** Рассмотрим граничную задачу

(11). Пусть $\varkappa = \max\{0, \sigma_1 + 1, \dots, \sigma_m + 1\}$. Из леммы 1 непосредственно следует, что для любых $s, \tau \in \mathbb{R}$ замыкание Λ отображения

$$u \to (lu, bu|_{\partial G}) \quad (u \in (C_0^\infty(G))^N)$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\tilde{\mathscr{H}}^{T+s,\tau,(T+\varkappa)}(G,\gamma) \equiv \Pi_{1\leqslant j\leqslant N} \mathscr{H}^{t_j+s,\tau,(t_j+\varkappa)}(G,\gamma) \to$$

$$\to \Pi_{1\leqslant j\leqslant N} \tilde{\mathscr{H}}^{s-s_j,\tau,(\varkappa-s_j)}(G,\gamma) \times \Pi_{1\leqslant h\leqslant m} \mathscr{H}^{s-\sigma_h-1/2+\tau}(\partial G,\gamma).$$

Возникает вопрос об обратимости оператора Λ.

Теорема 4. Пусть задача (11) гиперболическая. Пусть $s, \tau, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$. Тогда для каждого $(f, \varphi) = (f_1, \dots, f_N, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $f_j \in \tilde{\mathscr{H}}^{s-s_j,\tau+3/2,(\varkappa-s_j)}(G,\gamma)$ $(j = 1, \dots, N)$, $\varphi_h \in \mathscr{H}^{s-\sigma_h+\tau}(\partial G, \gamma)$ $(h = 1, \dots, m)$ существует один и только один элемент $u \in \tilde{\mathscr{H}}^{T+s,\tau,(T+\varkappa)}(G,\gamma)$ такой, что $\Lambda u = (f, \varphi)$. При этом справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j, G\,\gamma|_{t_j+s,\tau,(t_j+\varkappa)} \leqslant \frac{c}{\sqrt{\gamma}} \Big(\sum_{h=1}^{m} |\varphi_h, \partial G, \gamma|_{s-\sigma_h+\tau} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{N} |f_j, G, \gamma|_{s-s_j,\tau+3/2,(\varkappa-s_j)} \Big)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от u, f, φ и γ $(\gamma \geqslant \gamma_0 > 0)$. Если $\operatorname{supp}(f, \varphi) \subset \bar{G} \cap \bar{\Omega}$, то $\operatorname{supp} u \subset \bar{G} \cap \bar{\Omega}$.

Существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$ утверждение теоремы справедливо и для задачи (12).

Сравнение теорем 1 и 2 с леммой 1 показывает, что при обращении операторов l и $l + l'$ «теряется единица гладкости в тангенциальном направлении», при этом нормы операторов l^{-1} и $(l + l')^{-1}$ оцениваются через $c\gamma^{-1}$ и поэтому малы при больших γ. Это обстоятельство имеет место и для задачи Коши (см. теорему 3).

Для граничных задач (11), (12) согласно теореме 4 при переходе $(0, \varphi) \to u(f{=}0)$ «теряется половина единицы гладкости в тангенциальном направлении», что вполне согласуется с результатами работ [5, 7, 8] для одного уравнения и достаточно больших s и τ. При переходе же $(f, 0) \to u$ $(\varphi = 0)$ согласно теореме 4 «теряется 3/2 единиц гладкости», в то время, как в [5, 7, 8] для достаточно больших s и τ и одного уравнения «теряется одна единица гладкости в тангенциальном направлении». Открытым остается вопрос о возможности усиления теоремы 4 в указанном здесь направлении.

1. *Ройтберг Я. А.* Задача Коши для гиперболических уравнений в полной шкале пространств типа соболевских // Докл. АН СССР.— 1986.— **290**, № 2— С. 296—300.
2. *Ройтберг Я. А.* Разрешимость задачи Коши для гиперболических уравнений в полной шкале пространств типа соболевских // Спектральная теория дифференциально-разностных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1966.— С. 33—52.
3. *Ройтберг Я. А.* Гиперболические задачи в полной шкале пространств типа соболевских// Применения функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики.— Донецк, 1968.— С. 113.
4. *Волевич Л. Р., Ивриий В. Я.* Гиперболические уравнения // Петровский И. Г. Избр. тр.— М. : Наука, 1986.— С. 395—418.
5. *Сакомото Р.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений//Математика.— 1972.— **16**, № 1.— С. 62—99.
6. *Крайс Х.* Смешанные задачи для гиперболических систем // Там же.— 1970.— **14**, № 4.— С. 98—111.
7. *Шезарен Ж., Пириу А.* Описание корректно поставленных гиперболических смешанных задач // Там же.— 1974.— **18**, № 2.— С. 79—109.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Смешанная задача для гиперболических уравнений // Тр. ММО.— 1981.— **43**.— С. 197—257.
9. *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1971.— **86**, № 2.— С. 248—267.

Черниг. пед. ин-т им. Т. Г. Шевченко Получено 29.09.87