

УДК 531.38

©2020. Н.Н. Щепин

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ РАСТЯЖЕНИЯ

Рассмотрена замкнутая система твердых тел, связанных упругими цилиндрическими и телескопическими шарнирами. Записаны уравнения равновесия изучаемого объекта в предположении отсутствия действия внешних сил и моментов. Рассмотрен частный случай равновесной конфигурации системы, когда оси симметрии всех тел расположены в одной плоскости. Построено решение типа “роза”, в котором возможно самопересечение в одной точке осей симметрии нескольких тел. Такое решение является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина, полученного для самопересекающегося упругого стержня, в случае учета растяжения его оси. Выделены области геометрических параметров, в которых изучаемое решение существует.

Ключевые слова: *система твердых тел, упругий шарнир, устойчивость положения равновесия, достаточные условия устойчивости.*

Введение. В последнее время внимание многих ученых привлекло изучение замкнутых стержневых систем. Связано это с одним из интересных приложений теории стержней, а именно, моделированием с их помощью различных биологических объектов. Одним из направлений исследований в данной области является поиск новых равновесных состояний замкнутых упругих стержней. Изучению этой проблемы, в частности, посвящены работы [1–5]. В статьях [1–3] были найдены и исследованы равновесные конфигурации замкнутых стержней, в которых упругая ось расположена в плоскости и представляет собой окружность или “восьмерку”. В 2000 г. Е.Л. Старостин представил новое точное решение уравнений равновесия упругих стержней, которое он назвал решением типа “роза” [4]. В работе [5] выполнен численный анализ полученной формы равновесия. Отметим, что во всех приведенных работах [1–5] решения представлены в виде громоздких выражений, включающих специальные функции, и допускающих только численный анализ.

В работах [6, 7] была предложена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, представляющая систему n твердых тел S_j , связанных упругими сферическими шарнирами. Использование при моделировании упругих шарниров, допускающих большие прогибы, позволяет, как и в упругих стержневых системах, учесть геометрическую нелинейность объекта. Предложенный конечномерный подход дал возможность в явном виде записать решение типа “роза”, в котором возможно самопересечение в одной точке осей симметрии нескольких тел S_k [8], выделить области существования геометрических параметров, допускающих полученное решение и исследовать достаточные условия его устойчивости [9]. Это решение является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина [4, 5].

Однако, как показывают экспериментальные исследования, учет только

изгибных деформаций недостаточен при моделировании поведения некоторых биологических объектов. В связи с этим, возникает задача учета других видов деформаций. Так, в работе [10] для случая замкнутой оси типа "восьмерка" были найдены равновесные конфигурации системы твердых тел с учетом растяжения.

В настоящей работе построено решение типа "роза" для замкнутой конечномерной системы с учетом растяжения, в котором возможно самопересечение в одной точке осей симметрии нескольких тел S_k . Учет упругих смещений в сочленениях был реализован с помощью телескопических шарниров. Выделены области существования геометрических параметров, допускающих полученное решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему n твердых тел S_j . В точке P_j тела S_j установлен невесомый, упругий, телескопический шарнир, сонаправленный с осью симметрии тела S_j . Телескопический шарнир с помощью упругого цилиндрического шарнира в точке O_{j+1} тела S_{j+1} соединяется с телом S_{j+1} . Будем предполагать, что точка O_{j+1} лежит на оси симметрии тела S_{j+1} . На рис. 1 показана такая связка двух тел S_j и S_{j+1} . Полагаем, что оси симметрии $O_j P_j = h_j$ тел S_j ($j = \overline{1, n}$) лежат в одной плоскости OXZ , а оси всех цилиндрических шарниров, закрепленных в точках O_j , ей перпендикулярны.

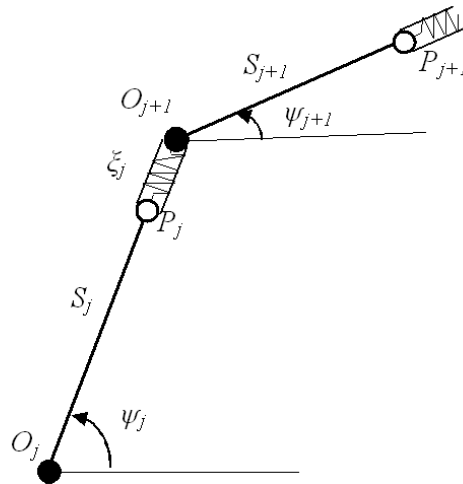


Рис. 1. Сочленение тел S_j и S_{j+1} .

Выражение для упругого момента L_j в цилиндрическом шарнире сочленения тел S_{j-1} и S_j , аналогично [11], выберем в виде

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где c^2 — жесткость на изгиб, ψ_j — угол поворота тела S_j вокруг оси $(j-1)$ -го шарнира. Для замкнутых систем ($O_1 = O_{n+1}$) считаем, что $\psi_0 = \psi_n$ [10].

При отсутствии внешнего силового поля потенциальная энергия системы с учетом (1) имеет вид [10]

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}) + \frac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \quad (2)$$

где ξ_j – растяжение в j -ом телескопическом шарнире, k^2 – жесткость на растяжение.

В работе [10] показано, что для замкнутых систем выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \mathbf{e}_j^x = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_j^x$ – единичный орт оси $O_j P_j$, составляющий угол ψ_j с осью OX . Поскольку $\mathbf{e}_j^x = \cos \psi_j \mathbf{e}^x + \sin \psi_j \mathbf{e}^z$ ($\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^z$ – соответственно орты осей OX и OZ), то из соотношения (3) имеем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы ψ_j и растяжения ξ_j :

$$f_1 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \sin \psi_j = 0. \quad (4)$$

Для систем с дополнительными нелинейными связями, наложенными на переменные, положения равновесия могут быть найдены из условия [12, 13] стационарности функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, т. е.

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (5)$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Подставляя выражения (2), (4) в соотношение (5), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} c^2(\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})) = \\ = (h_j + \xi_j)(\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_1, \quad \psi_0 = \psi_n,$$

$$k^2 \xi_j = -(\lambda_1 \cos \psi_j + \lambda_2 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

которая вместе с равенствами (4) позволяет определить неизвестные величины решаемой задачи, а именно, углы ψ_j и растяжения ξ_j , а также множители Лагранжа λ_1, λ_2 .

2. Решение типа “роза” в случае шести тел. Будем рассматривать конфигурацию из шести твердых тел, представленную на рис. 2. Фигура является симметричной относительно оси OZ . Длины осей симметрии тел $O_i P_i$ ($i = \overline{1, 6}$) таковы:

$$O_1 P_1 = h_1, \quad O_2 P_2 = O_6 P_6 = h_2, \quad O_3 P_3 = O_5 P_5 = h_3, \quad O_4 P_4 = h_4.$$

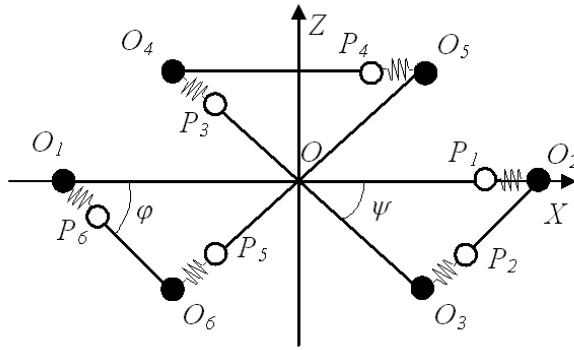


Рис. 2. Конфигурация типа "роза" для шести тел.

В данном случае уравнения равновесия (6) допускают следующее решение:

$$\psi_1 = \psi_4 = 0, \quad \psi_2 = \pi + \varphi, \quad \psi_3 = \pi - \psi, \quad \psi_5 = \pi + \psi, \quad \psi_6 = \pi - \varphi, \quad \lambda_2 = 0, \quad (8)$$

а из (7) следует

$$\xi_1 = \xi_4, \quad \xi_2 = \xi_6, \quad \xi_3 = \xi_5. \quad (9)$$

Подставляя соотношения (8), (9) в уравнения (4), (6) и (7), получим, что решение удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \sin(\varphi + \psi) &= \frac{(h_2 + \xi_2)\lambda_1 \sin \varphi}{c^2}, \\ \sin(\varphi + \psi) - \sin \psi &= -\frac{(h_3 + \xi_3)\lambda_1 \sin \psi}{c^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$2((h_2 + \xi_2) \cos \varphi + (h_3 + \xi_3) \cos \psi) = h_1 + h_4 + 2\xi_1,$$

$$\xi_4 = \xi_1 = -\frac{\lambda_1}{k^2}, \quad \xi_2 = \frac{\lambda_1 \cos \varphi}{k^2}, \quad \xi_3 = \frac{\lambda_1 \cos \psi}{k^2}. \quad (11)$$

Из соотношений (11) следует, что

$$\cos \varphi = -\frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \cos \psi = -\frac{\xi_3}{\xi_1}, \quad \lambda_1 = -k^2 \xi_1. \quad (12)$$

Подставляя выражения (12) в соотношения (10) и полагая $\xi_i = h_2 \tilde{\xi}_i$, $i = \overline{1, 3}$ (знак "тильды" в дальнейшем опускаем), получим систему уравнений для определения неизвестных ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 :

$$b\xi_1 + \xi_2 + c_*\xi_3 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0, \quad (13)$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \alpha\xi_1((c_* + \xi_3)(\xi_1 + \xi_3) + (1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2)) + \alpha^2\xi_1^3(1 + \xi_2)(c_* + \xi_3) = 0, \quad (14)$$

$$(2\xi_2^2 - \xi_1(\xi_1 + \xi_3))(\xi_1 + \xi_3) = \alpha\xi_1(1 + \xi_2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)(2(\xi_1 + \xi_3) + \alpha\xi_1^2(1 + \xi_2)), \quad (15)$$

где $b = (h_1 + h_4)/(2h_2) > 0$, $c_* = h_3/h_2 > 0$, $\alpha = k^2/(c^2h_2^2) > 0$.

Из уравнения (13) следует, что корни системы (13)–(15) находятся на сфере с центром в точке $(-b/2; -1/2; -c_*/2)$ и радиусом $R = \sqrt{b^2 + c_*^2 + 1}/2$.

При исследовании поставленной задачи нас будет интересовать случай существования решения системы (13)–(15) при достаточно малых значениях переменных ξ_i , $i = \overline{1, 3}$. Поэтому будем искать решение в виде следующих асимптотических рядов:

$$\xi_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_1^2 + \dots, \quad \xi_3 = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_1^2 + \dots, \quad (16)$$

которые должны (13), (14) обращать в тождества. Для определения коэффициентов β_i, γ_i подставим представление (16) в уравнения (13), (14) и приравняем к нулю коэффициенты при степенях ξ_1 . Для нахождения ξ_1 воспользуемся уравнением (15).

В настоящей работе ограничимся первым приближением. После подстановки получим линейную систему уравнений для определения β_1 и γ_1

$$\beta_1 + c_*\gamma_1 = -b, \quad \beta_1 + \gamma_1 = -1. \quad (17)$$

Решением системы (17) будет $\beta_1 = (c_* - b)/(1 - c_*)$, $\gamma_1 = (b - 1)/(1 - c_*)$. Отметим, что, как и в работе [8], параметр $c_* \neq 1$.

Из соотношений (12), с учетом представления (16), следует, что

$$\cos \varphi = -\beta_1 - \beta_2\xi_1 - \dots, \quad \cos \psi = -\gamma_1 - \gamma_2\xi_1 - \dots. \quad (18)$$

Так как в изучаемом случае углы φ, ψ острые, то в первом приближении потребуем, чтобы выполнялась система неравенств

$$0 < \frac{c_* - b}{c_* - 1} < 1; \quad 0 < \frac{b - 1}{c_* - 1} < 1. \quad (19)$$

Система (19) имеет решение:

$$c_* > b > 1, \quad c_* < b < 1. \quad (20)$$

Из уравнения (15) для ξ_1 в первом приближении получим

$$\xi_1 = -\frac{(2b - c_* - 1)(b - c_*)}{2\alpha(b - 1)(1 + b - 2c_*)}. \quad (21)$$

Для исследования возможности существования искомого решения, с учетом малости ξ_1 , введем малый параметр $\epsilon > 0$ следующим образом:

$$\left| \frac{(2b - c_* - 1)(b - c_*)}{2\alpha(b - 1)(1 + b - 2c_*)} \right| \leq \epsilon. \quad (22)$$

Введем параметр $\nu = 2\alpha\epsilon > 0$, поскольку $\alpha > 0$. Неравенство (22), с учетом (20), эквивалентно системе неравенств относительно параметров b, c_* :

$$(1 - b)(1 + b - 2c_*) > 0, \quad (23)$$

$$(\nu - 2)b^2 + (3 - 2\nu)c_*b - c_*^2 + b + (2\nu - 1)c_* - \nu \leq 0, \quad (24)$$

$$(\nu + 2)b^2 - (2\nu + 3)c_*b + c_*^2 - b + (2\nu + 1)c_* - \nu \leq 0. \quad (25)$$

При $0 < \nu < 1 - \sqrt{3}/2$ область решения неравенств (22) – (24) состоит из подобластей *I* и *II* с выколотой точкой $(1, 1)$, расположенных в первой координатной четверти (рис. 3). Подобласть *I* ограничена прямыми

$$(\nu + 2)(b - 1)/(2\nu + 3 - \sqrt{4\nu^2 + 8\nu + 1}) - (c_* - 1)/2 = 0,$$

$$(\nu - 2)(b - 1)/(2\nu - 3 + \sqrt{4\nu^2 - 8\nu + 1}) - (c_* - 1)/2 = 0,$$

а *II* — прямыми

$$(2\nu - 3 + \sqrt{4\nu^2 - 8\nu + 1})(b - 1) + 2(c_* - 1) = 0, \quad c_* = b.$$

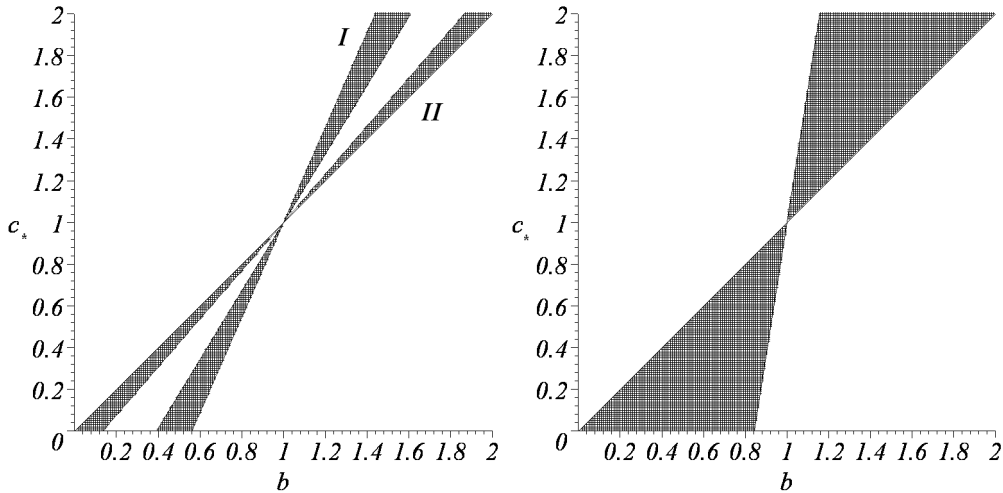


Рис. 3. Области существования решения при $\nu = 0.1$ и $\nu = 1$.

При $\nu \geq 1 - \sqrt{3}/2$ область решения расположена в первой координатной четверти (рис. 3), имеет выколотую точку $(1, 1)$ и ограничена прямыми

$$(\nu + 2)(b - 1)/(2\nu + 3 - \sqrt{4\nu^2 + 8\nu + 1}) - (c_* - 1)/2 = 0, \quad c_* = b.$$

На рис. 3 приведен вид областей существования решения (16), (21) при $\nu = 0.1$ и $\nu = 1$.

Выводы. Получена замкнутая система соотношений, описывающая конечномерную модель упругого стержня с учетом нелинейности прогибов и растяжения оси. Для случая равновесной конфигурации типа “роза” предложен конструктивный алгоритм построения решения в виде асимптотических рядов. Исследовано решение первого приближения и найдены области изменения геометрических параметров объекта, при которых оно существует.

1. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
2. Бенксэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
3. Starostin E.I. Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – **3**. – 1996. – P. 235–271.
4. Starostin E.I. Equilibrium configurations of a thin elastic rod with self contacts // *Proc. of the 16th IMACS World Congress 2000, August 21–25*. – 2000. – P. 137–139.
5. Starostin E.I. Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // *Phil. Trans. K. Soc. Lon., A*, 362. – 2004. – P. 1317–1334.
6. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // *Механика твердого тела*. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
7. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // *Механика твердого тела*. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
8. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечениями // *Механика твердого тела*. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
9. Щепин Н.Н. Устойчивость положения равновесия замкнутой системы тел конфигурации “роза” // *Механика твердого тела*. – 2016. – Вып. 46. – С. 102–110.
10. Щепин Н.Н. Исследование положений равновесия замкнутой системы тел с учетом растяжения // *Механика твердого тела*. – 2018. – Вып. 48. – С. 71–77.
11. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // *Прикл. математика и механика*. – 2014. – **78**, вып. 25. – С. 671–680.
12. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
13. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.

N.N. Shchepin

Equilibrium configuration of a closed system of rigid bodies with self-crossing subject to extension

The closed system of the rigid bodies connected with elastic cylindrical and telescopic joints is considered in this paper. The equilibrium equations of studied object are written down in the assumption of absence of external forces and moments. The special case of an equilibrium configuration of system when axes of symmetry of all bodies are located in one plane is considered. The “rose” type solution has been constructed for which the self-crossing of symmetry axes of several bodies in one point is possible. Such configuration is a finite-dimensional analogue of Starostin solution obtained for self-crossed elastic rod in the case of the account of its axis stretching. Areas of geometrical parameters are investigated in which the studied solution exists.

Keywords: *system of rigid bodies, stability of equilibrium position, sufficient conditions of stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
shchepin_nick@mail.ru

Получено 10.06.2020