УДК 517.9

А. С. Миненко

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Изучается потенциальное течение одноструйной жидкости в конечной, но достаточно длинной области в случае двух геометрических переменных, когда известна скорость вытекания струи в бесконечности. В работе доказывается классическая разрешимость соответствующей краевой задачи со свободной границей.

Изучается потенциальное течение одноструйной жидкости в конечной, но достаточно длинной области в случае двух геометрических переменных, когда известная скорость вытекания струи в бесконечности. Настоя-

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

щая работа посвящена доказательству классической разрешимости этой задачи. Доказательство основано на методике, развитой в работе [1].

1. Постановка задачи. Введем следующие обозначения:

$A = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0)$, $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant c)$, $Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$,

где $0 < c < b$. Пусть P — непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, причем $g(0) = c$, $g(a) = b$ и $g'(0) = 0$. Обозначим область, ограниченную отрезком A, кривой P и образующими Q_1 и Q_2 через $\mathcal{D}$, а через γ — достаточно гладкую кривую без самопересечений, расположенную в $\mathcal{D} \cup P$. Одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на Q_2. Наконец, через $\mathcal{D}_\gamma \subset \mathcal{D}$ будем обозначать область, ограниченную отрезком A, вертикалями Q_1, Q_2 и γ.

Будем рассматривать следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. В односвязной области $\mathcal{D}_\gamma$ требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$ по следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in A, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in Q_1 \cup Q_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \geqslant v^2,\ (x, y) \in \gamma,\ v = \mathrm{const} > 0, \tag{5}$$

причем в условии (5) на части γ, лежащей внутри $\mathcal{D}$, всегда должно выполняться равенство.

1. Вариационная постановка задачи. Введем в рассмотрение функционал

$$\mathcal{I}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) = \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2)\, dxdy, \tag{6}$$

заданный на множестве R допустимых пар $(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$, удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $\mathcal{D} \cup P$, концами которой являются точки $(0, c)$ и (a, b), причем все точки кривой γ, исключая точку $(0, c)$, расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области $\mathcal{D}_\gamma$, равна единице на γ, нулю на отрезке A и имеет непрерывно дифференцируемые производные в $\mathcal{D}_\gamma$, при этом $\mathcal{I}(\psi, D) < \infty$. Теперь нетрудно установить, что классическая разрешимость задачи (1)—(5) эквивалентна проблеме минимума функционала (6) на соответствующем множестве допустимых пар (ψ, γ). Доказательство вытекает из формулы для первой вариации интегрального функционала с переменной областью интегрирования

$$\delta\mathcal{I}(\psi, \mathcal{D}_\gamma; \overline{\delta\psi}, \overrightarrow{\delta z}) = -2 \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_{xx} + \psi_{yy})\, \overline{\delta\psi}\, dxdy +$$

$$+ \int\limits_\gamma (v^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2)(\vec{n}, \overrightarrow{\delta z})\, ds + 2 \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \psi_x \overline{\delta\psi}\, dy, \tag{7}$$

где $\overline{\delta\psi}$ — вариация функции ψ при неизменной области $\mathcal{D}_\gamma$, $\overrightarrow{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ — вариация независимых переменных, описывающая переход от γ к некоторой «близкой» допустимой кривой, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

2. Решение линейной задачи (1) — (4). Предположим, что γ — произвольно фиксированная жорданова кривая, т. е. область $\mathcal{D}_\gamma$ считается заданной. Введем в рассмотрение множество $\mathcal{U}$ допустимых функций $\psi(x, y)$ непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}_\gamma$, непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{D}_\gamma$ равных единице на γ, нулю на A и таких, что функционал

$$L(\psi) = \iint_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2)\, dxdy$$

всегда принимает на $\mathcal{U}$ конечные значения. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Существует единственная функция $\psi(x, y) \in U$, на которой функционал $L(\psi)$ достигает своего наименьшего значения. Эта функция является единственным решением задачи (1)—(4).

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [1].

Далее существует такая последовательность γ_k линий уровня функции $\psi(x, y)$, являющейся решением задачи (1)—(4), что

$$\psi(x, y) = c_k, \quad (x, y) \in \gamma_k, \tag{8}$$

причем c_k монотонно стремятся к единице при $k \to \infty$ и все линии γ_k, начиная с некоторой, содержатся в наперед заданной полоске около γ и каждая из них является аналитической дугой, концы которой лежат соответственно на Q_1 и Q_2. Используя это свойство, можно показать, что функционал (6) на классическом решении $\psi(x, y)$ задачи (1)—(4) в заданной области $\mathcal{D}_\gamma$ имеет следующее представление:

$$\mathcal{I}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) = \int_A \psi_y(x, 0)\, dx + v^2 \operatorname{mes} \mathcal{D}_\gamma, \tag{9}$$

здесь γ предполагается также спрямляемой кривой.

3. Симметризация области $\mathcal{D}_\gamma$. Определим симметризацию области $\mathcal{D}_\gamma$ относительно оси y следующим образом. Дополним $\Omega = \Pi \setminus \mathcal{D}_\gamma$, где $\Pi = (0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$, областью, симметричной относительно оси y, просимметризуем ее относительно этой оси и правую половину полученной области обозначим через Ω^*. Тогда $\mathcal{D}_y^* = \Pi \setminus \Omega^*$ есть результат симметризации области $\mathcal{D}_\gamma$ относительно оси y.

Симметризацию области $\mathcal{D}_\gamma$ относительно оси x определим так. Дополним Ω областью симметричной относительно прямой $y = b$, просимметризуем ее относительно этой прямой и нижнюю половину полученной области обозначим через G^*. Тогда получим новую область $\mathcal{D}_x^* = \Pi \setminus G^*$, являющуюся результатом симметризации $\mathcal{D}_\gamma$ относительно оси x.

Справедлива лемма о симметризации.

Лемма 2. Пусть $\psi(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области $\mathcal{D}_\gamma$, $\psi^*(x, y)$ — решение этой же задачи в области $\mathcal{D}^*$ со свободной границей γ^*, полученной из $\mathcal{D}_\gamma$ с помощью симметризации относительно осей координат. Тогда

$$\mathcal{I}(\psi^*, D^*) \leqslant \mathcal{I}(\psi, \mathcal{D}_\gamma).$$

причем $\psi_y^*(x, y) > 0$, $\psi_x^*(x, y) < 0$ в $\mathcal{D}^*$, а γ^* может быть задана уравнением

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

где $x(t)$, $y(t)$ не убывающие функции при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть сначала γ — аналитическая дуга. Тогда число ее пересечений с любой из прямых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ конечно. Продолжим функцию $\psi(x, y)$ единицей в $\Pi \setminus \mathcal{D}_\gamma$ и проведем симметризацию относительно оси y. Будем симметризовать трехмерную цилиндрическую область V с основанием Π, ограниченную поверхностью $z = \psi(x, y)$, относительно плоскости (y, z). Границу области V обозначим через S. В силу аналитичности функции $\psi(x, y)$ и кривой γ при любом $\rho \in (0, 1)$ найдется конечное число точек пересечения поверхности S с прямой ортогональной плоскости (y, z) и проходящей через точку (y_0, ρ), где y_0 — произвольно выбранное число из $(0, b)$. Пусть $x_1, x_2, \dots x_m$, где

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m$$

— абсциссы этих точек пересечения. Все x_i, исключая, быть может, x_1 и x_m, которые лежат на Q_1, Q_2, удовлетворяют равенству

$$\psi(x_i, y_0) = \rho.$$

Построим функцию

$$X(\rho) = X(\rho, y_0) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{m(\rho)} (-1)^{i+1} x_i.$$

Здесь число $m = m(\rho)$ конечно ввиду аналитичности кривой γ и функции $\psi(x, y)$. При этом число $m(\rho)$ нечетно при всех $\rho \in (0, 1)$, исключая конечное число значений ρ, отвечающих локальным экстремумам функции $\psi(x, y_0)$. Функция $X(\rho)$ является строго монотонно убывающей функцией ρ. Построим теперь область $\mathcal{D}^*$, ограниченную отрезком A, вертикалями Q_1, Q_2 и кривой $X_0(y)$, где

$$X_0(y) = \lim_{\rho \to \rho_{\max}} X(\rho), \quad \rho_{\max} = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \psi(x, y_0).$$

В области $\mathcal{D}^*$ определим функцию $\Psi(X, y)$ следующим образом: $\Psi(X, y_0) = \rho$, а в $\Pi \diagdown \mathcal{D}^*$ доопределим ее единицей. Используя теперь неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\iint_{\mathcal{D}^*} |\nabla \Psi|^2 \, dX dy \leqslant \iint_{\mathcal{D}_\gamma} |\nabla \psi|^2 \, dx dy.$$

Далее непосредственно из определения симметризации следует равенство

$$\iint_{\mathcal{D}^*} dX dy = \iint_{\mathcal{D}_\gamma} dx dy.$$

Пусть теперь $\psi^*(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области $\mathcal{D}^*$. Тогда в силу леммы 1 справедливы неравенства

$$\mathcal{J}(\psi^*, \mathcal{D}^*) \leqslant \mathcal{J}(\Psi, \mathcal{D}^*) \leqslant \mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma),$$

причем $\psi^*_x(x, y) < 0$, $(x, y) \in \mathcal{D}^*$.

Перейдем затем к симметризации относительно оси x. Переобозначим ψ^*, $\mathcal{D}^*$ снова через ψ, $\mathcal{D}$. Найдем все точки y_i такие, что $\psi(x_0, y_i) = \rho$, $i = 1, 2, \ldots, m(\rho)$, где ρ — произвольно фиксированное число из $(0, 1)$. Определим функцию

$$Y(\rho) = Y(\rho, x_0) = y_1 - y_2 + y_3 - \ldots + (-1)^{m-1} y_m = \sum_{i=1}^{m(\rho)} (-1)^{i-1} y_i,$$

которая является строго монотонно возрастающей функцией ρ. Доопределяя по непрерывности функцию $Y(\rho)$ в точках локальных экстремумов, заключаем, что она всегда содержит нечетное число членов. Далее, положим

$$Y_0(x) = \lim_{\rho \to 1} Y(\rho, x).$$

Построим затем область $\mathcal{J}^*$, ограниченную кривой $Y = Y_0(x)$, отрезком A, вертикалями Q_1 и Q_2. В области $\mathcal{J}^*$ определим функцию $\Psi(x, Y) = \rho$. Справедливо неравенство

$$\iint_{\mathcal{D}^*} |\nabla \Psi|^2 \, dx dY \leqslant \iint_{\mathcal{D}_\gamma} |\nabla \psi|^2 \, dx dy.$$

Теперь нетрудно установить справедливость леммы в случае аналитичности кривой γ. Откажемся теперь от этого предложения. Пусть γ_k — последовательность, определенная в (8). Обозначим через $\mathcal{D}_k$ подобласть $\mathcal{D}_\gamma$, ограниченную снизу отрезком A, сверху линией γ_k, а по бокам верти калями $Q_{1,k}$ и $Q_{2,k}$, являющимися частями Q_1 и Q_2 соответственно. Пусть $\psi_k(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в $\mathcal{D}_k$. Легко установить, что $\psi_k = \psi(x, y)/c_k$. Тогда из предельного соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{J}(\psi_k, \mathcal{D}_k) = \mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$$

следует утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве R и $(\psi_n, \mathcal{D}_n)$ — минимизирующая последовательность. В силу леммы 2 эту последовательность можно считать состоящей из областей $\mathcal{D}_n$, удовлетворяющих условию (10), и функций $\psi_n(x, y)$, являющихся в $\mathcal{D}_n$ решением задачи (1) — (4). Используя теперь методику работы [1] лемм 1,2 и соотношение (9), можно установить существование предельной пары $(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$, удовлетворяющей таким условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, заданная уравнениями (10), функция $\psi(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в $\mathcal{D}_\gamma$, причем $\psi_y(x, y) > 0$ в $\mathcal{D}_\gamma$. Кроме того, условие (5) на части γ, лежащей внутри $\mathcal{D}$, выполняется почти всюду и $\mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) < \infty$. Перейдем теперь к исследованию предельной пары $(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$.

Лемма 3. Пусть выполнено условие

$$v \cdot c < 1. \tag{11}$$

Тогда все точки предельной кривой γ, исключая только точку $(0, c)$, лежат выше горизонтали $y = c$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть вначале γ совпадает с отрезком $y = c$, $0 \leqslant x \leqslant a$ и пусть $\gamma_0 = \gamma \cap \{y = c,\ 0 \leqslant x \leqslant a\}$. Обозначим через $\psi_0(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в прямоугольнике $\mathcal{D}_{\gamma_0} = (0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant c)$. Очевидно, $\psi_0(x, y) = y/c$. В силу принципа максимума $\psi_0 \equiv \psi$, $(x, y) \in \overline{\mathcal{D}}_{\gamma_0}$. Следовательно, $\mathcal{J}(\psi_0, \mathcal{D}_{\gamma_0}) = \mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) = d$. Выпишем теперь вариацию функционала (6) при малых значениях $\max|\overrightarrow{\delta z}|$, $(\overrightarrow{\delta z}, \vec{n}) \geqslant 0$ и $\overrightarrow{\delta z} = 0$ в точке $(0, c)$ и при $x = a$, $c \leqslant y \leqslant b$. Имеем

$$\delta\mathcal{J} = \int_\gamma (v^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2)(\overrightarrow{\delta z}, \vec{n})\, ds = \int_{\gamma_0} (v^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2)(\overrightarrow{\delta z}, \vec{n})\, ds =$$

$$= \int_{\gamma_0} \left(v^2 - \frac{1}{c^2}\right)(\overrightarrow{\delta z}, \vec{n})\, ds < 0.$$

Следовательно, для проварьированной области $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma$ и решения задачи (1)—(4) $\widetilde{\psi}(x, y)$ будем иметь

$$\mathcal{J}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma) < \mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) = d.$$

Переходя затем к области $\mathcal{D}_\gamma^*$, являющейся результатом симметризации $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma$ относительно оси y, получаем для решения задачи (1) — (4) в $\mathcal{D}_\gamma^*$ неравенство

$$\mathcal{J}(\psi^*, D_\gamma^*) \leqslant \mathcal{J}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma) < d.$$

Построим теперь допустимую кривую γ', состоящую из части γ^*, где γ^* — свободная граница области $\mathcal{D}_\gamma^*$ (здесь γ^* совпадает частично с γ', а правым концом γ' является точка (a, b)). Очевидно, $\mathcal{D}_\gamma^* \subset \mathcal{D}_{\gamma'}$. Далее обозначим через $\psi'(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области $\mathcal{D}_{\gamma'}$. Тогда, используя неравенство

$$d \leqslant \mathcal{J}(\psi', \mathcal{D}_{\gamma'}) \leqslant \mathcal{J}(\psi^*, \mathcal{D}_\gamma^*) + v^2 \operatorname{mes}(\mathcal{D}_{\gamma'} \setminus \mathcal{D}_\gamma^*) < d,$$

при достаточно малых значениях величины $\operatorname{mes}(\mathcal{D}_{\gamma'} \setminus \mathcal{D}_\gamma^*)$ приходим к противоречию, так как $(\psi^*, \mathcal{D}_\gamma^*) \in R$. Аналогичным образом исследуются остальные случаи. Лемма доказана.

Дальнейшее исследование предельной пары $(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$ приводит к следующей лемме.

Лемма 4. Пусть выполнено условие

$$a < v \cdot c \cdot \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\, dx. \tag{12}$$

Тогда предельная область $\mathcal{D}_\gamma$ не может совпадать полностью с $\mathcal{D}$, т. е. $\mathcal{D}_\gamma \subset \mathcal{D}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathcal{D}_\gamma$ совпадает с $\mathcal{D}$. Тогда, применив формулу Грина, получим

$$\iint_{\mathcal{D}} (\psi_x^2 + \psi_y^2)\, dxdy = \int_{\partial \mathcal{D}} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds = \int_\gamma \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds \geqslant v \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\, dx;$$

здесь γ совпадает с P и из формулы для первой вариации функционала (6) следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \geqslant v, \qquad (x, y) \in P.$$

Далее в силу принципа максимума $\psi(x, y) \leqslant y/c$ при $(x, y) \in (0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant c)$. Воспользовавшись теперь представлением $\psi(x, y) = y \cdot \alpha(x, y)$, где $\alpha(x, y)$ некоторая достаточно гладкая функция, заключаем, что $\alpha(x, y) \leqslant 1/c$. Поэтому $\psi_y(x, 0) \leqslant 1/c$,

$$\iint_D (\psi_x^2 + \psi_y^2)\, dxdy = \int_A \psi_y(x, 0)\, dx \leqslant \frac{a}{c}.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$v \cdot c \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\, dx \leqslant a,$$

которое противоречит предположению леммы. Следовательно, $\mathcal{D}_\gamma$ не может совпадать с $\mathcal{D}$. Лемма доказана.

Рассмотрим, наконец, случай, когда предельная кривая γ содержит отрезок $x = a$, $h \leqslant y \leqslant b$, где $c < h$. Обозначим через γ_0 часть γ, лежащую в $\mathcal{D}$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, h) и пусть $\psi_0(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в $\mathcal{D}_{\gamma_0}$. Сравнивая ψ и ψ_0 с помощью принципа максимума, заключаем, что $\psi \equiv \psi_0$ в $\overline{\mathcal{D}}_{\gamma_0}$. Следовательно, получим $\mathcal{J}(\psi_0, \mathcal{D}_{\gamma_0}) = \mathcal{J}(\psi, \mathcal{D}_\gamma) = d$. Далее пара $(\psi_0, \mathcal{D}_{\gamma_0})$ является решением задачи о минимуме функционала (6) на множестве допустимых пар R_h, где R_h отличается от R лишь тем, что концы γ проходят через точки $(0, c)$ и (a, h). Это характеризует тот случай постановки задачи (1) — (2), когда правый конец γ лежит на отрезке $x = a$, $c < y < b$.

Таким образом, из леммы 1—4 вытекает следующая теорема существования.

Теорема. Пусть P — непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$. И пусть выполнены условия (11), (12). Тогда существует пара $(\psi, \mathcal{D}_\gamma)$, являющаяся классическим решением задачи (1) — (5). При этом (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ — монотонно-возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки, лежащей внутри $\mathcal{D}$; $\psi(x, y)$ — функция непрерывная в $\overline{\mathcal{D}}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\overline{\mathcal{D}}_\gamma$, исключая точки $(0, c)$ и (a, h), $c < h \leqslant a$ и $\psi_y(x, y) > 0$ в $\mathcal{D}_\gamma$.

Отметим, что построенное решение является единственным в классе функций $\psi_y(x, y) > 0$ в $\mathcal{D}_\gamma$. Укажем также, что приближенное решение задачи (1)—(5) методом Ритца изложено в [2].

1. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 6.— С. 413—416.
2. *Миненко А. С.* Об одной задаче потенциального течения жидкости со свободной границей // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1987.— Вып. 8.— С. 73—77.

Донецк. политехн. ин-т

Получено 07.09.89