УДК 517.95.32

И. И. Данилюк, С. И. Тимченко

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе изучается смешанная задача для квазилинейного параболического уравнения второго порядка с кусочно-непрерывными коэффициентами. Установлена теорема существования решения в классе функций $W^{2,1}_{2,\mathrm{loc}}(Q_{t_0}) \cap C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{t_0})$.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости начально-краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами. Подобные задачи возникают, например, при описании теплофизических процессов, которые протекают в окрестности «критических» значений температуры, соответствующих фазовым превращениям. В этом случае теплофизические параметры среды, а также ее энергия претерпевают скачкообразные изменения, которые необходимо учитывать. К рассматриваемому виду задач принадлежит также модель кристаллизации в двухкомпонентных средах в случае, когда массоперенос незначителен [1]. В данной работе обобщаются ранее полученные результаты [2—3].

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1990. Вып. 2.

1. Постановка задачи. Понятие решения. В пространстве переменных $(x, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ рассмотрим ограниченную область $Q_{t_0} = \Omega \times (0, t_0)$ с достаточно гладкой $\partial\Omega$. Пусть $\alpha(T)$ и $\lambda(T)$ — вещественные функции, определенные на всей действительной оси $R = (-\infty, +\infty)$, причем $\lambda(T)$ непрерывна и ограничена, а ее производная $\lambda'(T)$ и функция $\alpha(T)$ непрерывны всюду, за исключением конечного числа точек $T_1 < T_2 < \ldots < T_k$, $k \geqslant 1$, обладают предельными значениями $\alpha(T_j \pm 0)$, $\lambda'(T_j \pm 0)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и удовлетворяют условиям

$$\alpha(T) > 0, \lambda(T) > 0; \ \sup_R \left\{\alpha(T), \lambda(T), \frac{1}{\alpha(T)}, \frac{1}{\lambda(I)}\right\} < +\infty. \tag{1}$$

На промежутках непрерывности считаем $\alpha(T)$ и $\lambda'(T)$ достаточно гладкими. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что имеется лишь одна точка разрыва $T = T_1$.

В Q_{t_0} рассмотрим уравнение

$$\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda(T)\nabla T), \tag{2}$$

к которому присоединим начальное и граничное условия

$$T(x, 0) = T_0(x),\ x \in \overline{\Omega}; \qquad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} + \beta(x, t, T) = 0,\ (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0], \tag{3}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $T_0(x)$ и $\beta(x, t, T)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задачу (2), (3) удобно записать в виде

$$b(v)\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v,\ (x, t) \in Q_{t_0}, \tag{4}$$

$$v(x, 0) = \psi_0(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} + \psi(x, t, v) = 0,\ (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0]. \tag{6}$$

Здесь

$$v(x, t) = \int_0^{T(x,t)} \lambda(s)\,ds; \quad b(v) = \frac{\alpha(T(v))}{\lambda(T(v))};$$

$$\psi_0(x) = \int_0^{T_0(x)} \lambda(s)\,ds; \qquad \psi(x, t, v) = \beta(x, t, T(v)), \tag{7}$$

причем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} \in C(\overline{Q}_{t_0} \times R). \tag{8}$$

Большей гладкости от ψ до v мы не вправе требовать, так как она определяется гладкостью функции $\lambda(T)$ в силу соотношений (7). Функция $b(v)$ удовлетворяет (1) и претерпевает разрыв в точке $v_1 = \int_0^{T_1} \lambda(s)\,ds$.

Будем считать выполненным условие согласования начального и граничного условий (5), (6) нулевого порядка

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial n} + \psi(x, 0, \psi_0(x)) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Теперь поясним, в каком смысле мы будем понимать соотношения (4)—(6). Прежде всего, отметим, что если в какой-нибудь точке $(\overline{x}, \overline{t}) \in Q_{t_0}$ функция $v(x, t)$ принимает значение v_1, то уравнение (4) в этой точке теряет смысл в классическом его понимании. Вследствие этого, если $\psi_0(x)$, будучи непрерывной, принимает значение v_1, то это значение будет приниматься функцией $v(x, t)$ и при $t > 0$ уравнение (4) не будет иметь классического решения даже при малых t.

Рассмотрим множества

$$Q^+ = \{(x, t) \in Q_{t_0} : v(x, t) > v_1\},$$

$$Q^- = \{(x, t) \in Q_{t_0} : v(x, t) < v_1\},$$

$$S = \{(x, t) \in \overline{Q}_{t_0} : v(x, t) = v_1\}$$

и класс функций

$$v(x, t) \in C(\overline{Q}_{t_0}), \quad \nabla v \in L_\infty(0, t_0;\ L_2(\Omega)). \tag{10}$$

Включения (10) имеют определенный физический смысл, исходя из теплофизической трактовки: первое включение означает непрерывность температуры $T(x, t)$ в замкнутой области ее определения, а второе эквивалентно требованию существенной ограниченности теплового потока по норме $L_2(\Omega)$.

В силу первого включения (10) множества Q^+ и Q^- открыты, а S замкнуто. Для придания уравнению (4) определенного математического смысла требуем дополнительно, чтобы

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \in L(Q_{t_0}), \quad v(x, t) \in L(0, t_0;\ W_1^2(\Omega)). \tag{11}$$

Теперь естественно под решением уравнения (4) понимать функцию $v(x, t)$ из класса (10), (11), для которой (4) выполняется почти всюду на объединении $Q^+ \cup Q^-$. На самом деле в случае нулевой меры множества S соотношение (4) выполняется почти всюду на Q_{t_0}. Однако априори не исключается случай, когда мера множества S положительна (это не противоречит здравому смыслу с физической точки зрения). И в этом случае почти всюду на Q_{t_0} выполняется (4), каким бы образом не было определено значение $b(v_1)$ в точке разрыва. Действительно, функция $v(x, t)$ обладает обобщенными первыми производными, поэтому абсолютно непрерывна на каждой переменной при почти всех значениях остальных. Прямые, перпендикулярные к координатным гиперплоскостям, пересекают S по замкнутым множествам, которые согласно теореме Кантора — Бендиксона, с точностью до счетных множеств являются совершенными. А так как совершенное множество содержит все свои предельные точки, то, составляя соотношение конечных разностей для соответствующей производной, в силу определения S убеждаемся, что она равна нулю на S.

Соотношения (5) и (9) понимаются в обычном смысле, а (6) выполняется в каждой точке $x \in \partial\Omega$ для почти всех $t \in (0, t_0)$, если предполагать, что $\psi_0(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\psi(x, t, v) \in C(\overline{Q}_{t_0} \times R)$.

2. Метод сглаживания. Рассмотрим функции $b(v, \varepsilon)$ и $\psi(x, t, v, \varepsilon)$, определенные соответственно в $R \times (0, \varepsilon_0]$ и $\overline{Q}_{t_0} \times R \times (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, и обладающие свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} b(v, \varepsilon) = b(v), \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \psi(x, t, v, \varepsilon) = \psi(x, t, v), \quad v \neq v_1. \tag{12}$$

Метод сглаживания заключается в замене функций $b(v)$ и $\psi(x, t, v)$ в (4)—(6) соответственно на $b(v, \varepsilon)$ и $\psi(x, t, v, \varepsilon)$. Решение полученной задачи

$$\left.\begin{aligned} & b(v, \varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t} \Delta v, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \\ & v\,|_{t=0} = \psi_0(x),\ x \in \overline{\Omega}, \\ & \frac{\partial v}{\partial n} + \psi(x, t, v, \varepsilon) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

зависит от параметра $\varepsilon : v = v(x, t, \varepsilon)$.

В качестве функции $b(v, \varepsilon)$ возьмем достаточно гладкую функцию, совпадающую с $b(v)$ вне интервала $(v_1, v_1+\varepsilon)$:

$$b(v, \varepsilon) = \begin{cases} b(v), & v, \notin (v_1, v_1+\varepsilon), \\ \hat{b}(v, \varepsilon) & v \in (v_1, v_1+\varepsilon), \end{cases}$$

причем в качестве $\hat{b}(v, \varepsilon)$ можно взять, например, многочлен. Построенная таким образом функция непрерывно дифференцируема по ε и для нее справедливо неравенство

$$[b(v_1+0) - b(v_1-0)] \frac{\partial b}{\partial \varepsilon}(v, \varepsilon) \leqslant 0, \quad (v, \varepsilon) \in R \times (0, \varepsilon_0]. \tag{14}$$

Можно $b(v, \varepsilon)$ построить и таким образом:

$$b(v, \varepsilon) = \begin{cases} b(v), \; v \notin (v_1-\varepsilon, v_1), \\ \hat{b}(v, \varepsilon), \quad v \in (v_1-\varepsilon, v_1), \end{cases}$$

т. е. сглаживание произвести в интервале $(v_1-\varepsilon, v_1)$.

В этом случае

$$[b(v_1+0) - b(v_1-0)] \frac{\partial b}{\partial \varepsilon}(v, \varepsilon) \geqslant 0, \quad (v, \varepsilon) \in R \times (0, \varepsilon]. \tag{15}$$

Аналогичным образом строится сглаживающая функция $\psi(x, t, v, \varepsilon)$.

Из соотношений (1), (7)—(9) вытекает, что всегда можно добиться выполнения следующих оценок и включений:

$$1)\; 0 < \frac{1}{\mu} \leqslant b(b, \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\nu} < +\infty, \quad \nu, \mu - \text{const};$$

$$2)\; \left| \frac{\partial b(v, \varepsilon)}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 b(v, \varepsilon)}{\partial v^2} \right| \leqslant \gamma(\varepsilon);$$

$$3)\; \left| \psi(x, t, v, \varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t, v, \varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t, v, \varepsilon) \right| \leqslant \mu,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial v}\psi(x, t, v, \varepsilon), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial v}\psi(x, t, v, \varepsilon), \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial v}\psi(x, t, v, \varepsilon) \right| \leqslant \mu,$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial v^2}\psi(x, t, v, \varepsilon) \right| \leqslant \mu; \tag{16}$$

$$4)\; -v\psi(x, t, v, \varepsilon) < 0, \quad |v| > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_{t_0};$$

$$5)\; \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t, v, \varepsilon) \in C^{\beta, \beta/2}(\overline{Q}_{t_0});$$

$$6)\; \psi_0(x) \in C^3(\overline{\Omega}), \quad \partial\Omega \in C^{2+\beta};$$

$$7)\; \frac{\partial}{\partial n}\psi_0(x) + \psi(x, 0, \psi_0(x), \varepsilon) = 0, \; x \in \partial\Omega.$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, а соотношения 2), 3), 5) включаются при $(x, t) \in \overline{Q}_{t_0}$, $|v| \leqslant M$. В этом случае задача (13) однозначно разрешима в $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ [4, гл. V, § 7].

Докажем две леммы.

Лемма 1. В предположениях (16) для решения задачи (13) справедлива равномерная по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оценка

$$|v(x, t, \varepsilon)| \leqslant M, \quad (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ такова, что $\varphi(x) \geqslant 1/2$, $x \in \overline{\Omega}$; $\varphi(x) \equiv 1$, $\partial\varphi/\partial n \equiv -m$, $x \in \partial\Omega$. Рассмотрим $z(x, t, \varepsilon) =$

$= v(x, t, \varepsilon)\ \varphi(x)$, где $v(x, t, \varepsilon)$ — решение задачи (13). Для нее справедливы соотношения

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{b(v, \varepsilon)} \Delta z + \frac{b}{b(v, \varepsilon)\varphi} \nabla z \nabla \varphi - \frac{\varphi \Delta \frac{1}{\varphi}}{b(v, \varepsilon)} z = 0,$$

$$(x, t) \in Q_{t_0},$$

$$z(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x) \psi_0(x),\ x \in \overline{\Omega},$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} z = -\psi \varphi,\quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0].$$

Из принципа максимума [4, гл. 1, § 2] для произвольного $t \in [0, t_0]$ справедлива оценка

$$\sup_{\mu > a_0^{(\varepsilon)}} \min \{0 \cdot \min_{\partial\Omega \times [0, t]} \frac{e^{\mu(t-\tau)} \varphi^2(x) \psi(x, \tau, v, \varepsilon)}{\partial \varphi / \partial n};$$

$$e^{\mu t} \min_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \psi_0(x)\} \leqslant z(x, t, \varepsilon) \leqslant \inf_{\mu > \alpha_0^{(\varepsilon)}} \max \{0;$$

$$\max_{\partial\Omega \times [0, t]} \frac{e^{\mu(t-\tau)} \varphi^2(x) \psi(x, \tau, v, \varepsilon)}{\partial \varphi / \partial n};\quad e^{\mu t} \max_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \psi_0(x)\},$$

$a_0^{(\varepsilon)} = \max\limits_{\overline{Q}_{t_0}} \left(\frac{\varphi}{b(v, \varepsilon)} \Delta \frac{1}{\varphi} \right) \leqslant A_0$ в силу свойств функции $\varphi(x)$ и первого из условий (16). Тогда из третьего условия (16) вытекает равномерная оценка (17), что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть снова выполнено (16). Тогда в случае $\Delta \psi_0(x) \leqslant 0$, $x \in \overline{\Omega}$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t, v, \varepsilon) \geqslant 0,\quad (x, t, v) \in \partial\Omega \times [0, t_0] \times R \tag{18}$$

справедливо неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t, \varepsilon) \leqslant 0, \tag{19}$$

а в случае

$$\Delta \psi_0(x) \geqslant 0,\ x \in \overline{\Omega},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t, v, \varepsilon) \leqslant 0, (x, t, v) \in \partial\Omega \times [0, t_0] \times R \tag{20}$$

неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t, \varepsilon) \geqslant 0, \tag{21}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $(x, t) \in \overline{Q}_{t_0}$.

Доказательство. Продифференцируем соотношения (13) по t и обозначим $w(x, t, \varepsilon) = v_t(x, t, \varepsilon)$. Тогда

$$b(v, \varepsilon) \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - \frac{\partial}{\partial v} b(v, \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} w,\ (x, t) \in Q_{t_0},$$

$$w(x, 0, \varepsilon) = \frac{\Delta \psi_0(x)}{b(\psi_0(x), \varepsilon)},\quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial v} w = -\frac{\partial \psi}{\partial t},\quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0].$$

Законность операций, использованных при выводе этих соотношений, вытекает из теоремы существования и единственности для задач подобного типа в классических предположениях гладкости. Для $w(x, t, \varepsilon)$ на основании принципа максимума [4, гл. 1, § 2] справедлива оценка

$$\sup_{\mu>a_0^{(\varepsilon)}} \min\left\{0;\ \min_{\partial\Omega\times[0,t]} \frac{e^{\mu(t-\tau)}\,\varphi(x)\,\psi_\tau(x, \tau, v, \varepsilon)}{\partial\varphi/\partial n-\partial\psi/\partial v};\quad e^{\mu t}\min_{\overline{\Omega}} \frac{\varphi(x)\,\Delta\psi_0(x)}{b(\psi_0(x),\ \varepsilon)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \varphi(x)\,w(x, t, \varepsilon)\leqslant \inf_{\mu>a_0^{(\varepsilon)}} \max\{0;$$

$$\max_{\partial\Omega\times[0,t]} \frac{e^{\mu(t-\tau)}\,\varphi(x)\,\psi_\tau(x, \tau, v, \varepsilon)}{\partial\varphi/\partial n-\partial\psi/\partial v};\quad e^{\mu t}\max_{\overline{\Omega}} \frac{e(x)\,\Delta\psi_0(x)}{b(\psi_0(x),\ \varepsilon)}\right\},$$

где

$$a_0^{(\varepsilon)}=\max_{\overline{Q}_{t_0}} \frac{\varphi\Delta\dfrac{1}{\varphi}-\dfrac{\partial b}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}}{b},$$ $t\in[0, t_0]$, а $\varphi(x)$ та же функция, что и в лемме 1.

Теперь утверждение леммы сразу же следует из этой оценки, если только выбрать константу $m\equiv-\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ из условия $-m+\mu<0$.

3. Зависимость решения от параметра сглаживания. Опираясь на процедуру построения сглаживающих функций $b(v, \varepsilon)$ и $\psi(x, t, v, \varepsilon)$, будем считать, что они обладают непрерывными частными производными по ε в областях своего определения. Кроме того, пусть выполнено неравенство

$$-v\,\frac{\partial b}{\partial v}(v, \varepsilon)\leqslant c_1v^2+c_2,\quad c_1, c_2\geqslant 0-\mathrm{const},\quad (x, t)\in Q_{t_0}\cup\Omega\times\{t_0\}. \tag{22}$$

В этом случае, опираясь на принцип максимума [4, гл. 1, § 2], можно показать, что решение задачи (13) непрерывно дифференцируемо по ε при $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$. Производная $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}v(x, t, \varepsilon)=V(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} b(v, \varepsilon)\frac{\partial V}{\partial t}-\Delta V+\frac{\partial b}{\partial v}(v, \varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t}V=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}b(v, \varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t},\quad (x, t)\in Q_{t_0};\\ V(x, 0, \varepsilon)=0,\ x\in\overline{\Omega},\ \frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}V=-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon},\quad (x, t)\in\partial\Omega\times[0, t_0]. \end{gathered} \tag{23}$$

В силу свойств (14) и (15) сглаживающих функций всегда можно добиться, чтобы в случаях (18) и (20) были выполнены неравенства

$$-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi(x, t, v, \varepsilon)\geqslant 0,\quad -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}b(v, \varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0,\quad (x, t)\in\overline{Q}_{t_0},\quad \varepsilon\in(0; \varepsilon_0]. \tag{24}$$

Тогда, применив к задаче (23) принцип максимума [4] и воспользовавшись (24), придем к оценке

$$V(x, t, \varepsilon)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}v(x, t, \varepsilon)\geqslant 0,\ (x, t)\in\overline{Q}_{t_0},\quad \varepsilon\in(0, \varepsilon_0],$$

означающей монотонность возрастания $v(x, t, \varepsilon)$ по ε в каждой точке $(x, t)\in\overline{Q}_{t_0}$.

На основании лемм 1 и 2 приходим к утверждению.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (16), кроме того, функции $b(v, \varepsilon)$ и $\psi(x, t, v, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируемы по ε. Пусть также выполнено неравенство (22). Тогда в условиях (18) и (20) существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} v(x, t, \varepsilon)=v(x, t),\quad (x, t)\in\overline{Q}_{t_0}. \tag{25}$$

Замечание 1. В ситуации, возникающей при изучении модели из [1], имеется две точки разрыва: v_1 и v_2. В этом случае для каждой из точек

v_1 и v_2 с учетом знака соответствующего скачка выбирается тот или иной интервал сглаживания, чтобы неравенства (14), (15) и (18), (20) гарантировали выполнение неравенств (24). Аналогично рассматривается случай, когда точек разрыва конечное число.

Замечание 2. Факт монотонного убывания $v(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ является следствием процедуры построения сглаживающих функций $b(v, \varepsilon)$ и $\psi(x, t, v, \varepsilon)$, которая зависит от ситуации (18) или (20), знака скачка $b(v_1+0) - b(v_1-0)$ и всегда гарантирует выполнение неравенств (24). Модификацией процедуры сглаживания можно добиться монотонного возрастания $v(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$.

4. Свойства предельной функции. Снова рассмотрим задачу (13) и обозначим

$$U(x, t, \varepsilon) = \int\limits_0^{v(x,t,\varepsilon)} b(s, \varepsilon)\, ds.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta v, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} U^2 = U \Delta v, \ (x, t) \in Q_{t_0}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Интегрируя последнее соотношение по цилиндру $Q_t = \Omega \times (0, t)$ и используя формулу Остроградского — Гаусса и формулу интегрирования по частям, приходим к тождеству

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega U^2(x, t, \varepsilon)\, dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega b(v, \varepsilon) |\nabla v|^2\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega U^2(x, 0, \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} U(\sigma, t, \varepsilon)\, \psi(\sigma, t, \varepsilon)\, d\sigma dt.$$

На основании (16) правая часть тождества равномерно ограничена по ε. Тогда с учетом неравенства $U^2(x, t, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{\mu^2} v^2(x, t, \varepsilon)$ приходим к первой энергетической оценке

$$\frac{1}{2\mu}\int\limits_\Omega v^2(x, t, \varepsilon)\, dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla v(x, t, \varepsilon)|^2\, dxdt \leqslant c_1 < +\infty. \tag{26}$$

Для получения второй энергетической оценки проинтегрируем по цилиндру Q_t тождество

$$b(v, \varepsilon)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial v}{\partial t}\Delta v, \ (x, t) \in Q_{t_0}, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Выполняя соответствующие преобразования, приходим к соотношению

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b(v, \varepsilon)\, v_t^2(x, t, \varepsilon)\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v(x, 0, \varepsilon)|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} v(\psi_t + \psi_v v_t)\, d\sigma dt - \int\limits_{\partial\Omega} v\psi d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} v(\sigma, 0, \varepsilon)\, \psi(\sigma, 0, \psi_0(\sigma), \varepsilon)\, d\sigma,$$

в котором правая часть в силу (16) равномерно ограничена по Ω. Поэтому справедлива вторая энергетическая оценка

$$\frac{2}{\mu}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v_t^2(x, t, \varepsilon)\, dxdt + \int\limits_\Omega |\nabla v(x, t, \varepsilon)|^2\, dx \leqslant c_2 < +\infty. \tag{27}$$

В соотношениях (26), (27) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0+$. В результате получим

$$\| v(x, t) \|_{W_2^{1,1}(Q_{t_0})} \leqslant c_3 < +\infty,$$

т. е. предельная функция (25) является элементом $W_2^{1,1}(Q_{t_0})$. Законность операции предельного перехода под знаком интеграла в первом слагаемом в (26) вытекает из леммы Фату [5]. В остальных слагаемых в (26), (27) законность предельного перехода следует из слабой компактности замкнутого шара в рассматриваемых функциональных пространствах и свойств обобщенных производных.

Далее из оценки (27) вытекает, что для почти всех $t \in (0, t_0)$ $b(v, \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(\Omega)$. В связи с этим рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\Delta v = b(v, \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t}, \ (x, t) \in Q_{t_0}.$$

Функция $v(x, t, \varepsilon)$ для почти всех $t \in (0, t_0)$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ этого уравнения. А тогда для таких t в силу теоремы 10.1 гл. III [6] решение v имеет производные по x второго порядка и для любой внутренней подобласти Ω' области Ω

$$\| v \|_{W_2^2(\Omega')} \leqslant c(d') \left\| b(v, \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega')},$$

где $c(d')$ зависит лишь от расстояния Ω' до границы Ω. Отсюда следует, что

$$\| v(x, t, \varepsilon) \|_{W_2^{2,1}(Q'_{t_0})} \leqslant c_4 < +\infty,$$

где $Q'_{t_0} = \Omega' \times (0, t_0)$.

Совершая в этом неравенстве предельный переход при $\varepsilon \to 0+$, приходим к оценке $\| v(x, t) \|_{W_2^{2,1}(Q'_{t_0})} \leqslant c_4$, означающей принадлежность предельной функции (25) к $W_{2,\mathrm{loc}}^{2,1}(Q_{t_0})$. Законность операции предельного перехода основана на тех же фактах, что использовались при исследовании неравенств (26) и (27).

Опишем теперь свойства $v(x, t)$ в терминах непрерывности по Гельдеру. Для этого рассмотрим задачу (13) как линейную для определения $v(x, t, \varepsilon)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \left(\frac{1}{b(v(x, t, \varepsilon), \varepsilon)} \nabla v \right) - \nabla \left(\frac{1}{b(v(x, t, \varepsilon), \varepsilon)} \right) \nabla v, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \\ &v(x, 0, \varepsilon) = \psi_0(x), \ x \in \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = -\psi(x, t, v, \varepsilon), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, t_0], \end{aligned}\right\}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$. В силу (16) и леммы 1 рассматриваемая функция удовлетворяет условиям теоремы 10.1 гл III [4], из которой следует, что $v(x, t, \varepsilon) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$, причем показатель Гельдера α и константа Гельдера $\langle v \rangle_{Q_{t_0}}^{(\alpha)}$ не зависят от ε, т. е.

$$\| v(x, t, \varepsilon) \|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})} \leqslant c_5 < +\infty.$$

Это позволяет перейти к пределу при $\varepsilon \to 0+$ в этом неравенстве и ввиду леммы 3 получить оценку

$$\| v(x, t) \|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})} \leqslant c_5 < +\infty.$$

Здесь $0 < \alpha \leqslant \beta$.

5. Основные результаты. Рассмотрим задачу (13) и определим множества

$$Q_\varepsilon^+ = \{(x, t) \in Q_{t_0} : v(x, t, \varepsilon) > v_1\},$$

$$Q_\varepsilon^- = \{(x, t) \in Q_{t_0} : v(x, t, \varepsilon) < v_1\}.$$

Ввиду того что функция $v(x, t, \varepsilon)$ при фиксированных (x, t) монотонно убывает по ε при $\varepsilon \to 0+$, имеют место включения

$$Q_{\varepsilon_1}^- \subset Q_{\varepsilon_2}^- \subset \ldots \subset Q_{\varepsilon_n}^- \subset \ldots \subset Q^-,$$
$$Q_{\varepsilon_1}^+ \supset Q_{\varepsilon_2}^+ \supset \ldots \supset Q_{\varepsilon_n}^+ \supset \ldots \supset Q^+, \tag{28}$$

где $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, а Q^+ и Q^- определены в п. 1.

На множестве Q^+ $b(v(x, t, \varepsilon), \varepsilon) \to b(v(x, t))$ в силу второго включения (28). В силу же первого включения (28) следует, что для любой точки $(x, t) \in Q^-$ всегда можно указать такое число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что $(x, t) \in Q^+$ при $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, что означает сходимость $b(v(x, t, \varepsilon), \varepsilon) \to b(v(x, t))$ в этой точке, а значит, и на множестве Q^+.

Таким образом, на объединении $Q^+ \cup Q^-$ $b(v, \varepsilon) \to b(v)$ при $\varepsilon \to 0+$ и уравнение (4) выполняется почти всюду на Q_{t_0} (см. п. 1). Начальное условие (5) выполняется в обычном смысле, а (6) — в каждой точке $x \in \partial\Omega$ для почти всех $t \in (0, t_0)$.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты.

Теорема. Предположим, что $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$, $\beta > 0$, функция $b(v)$ удовлетворяют условию (1) и дополнительно $b(v) \in C^2(-\infty, v_1] \cup C^2[v_1, +\infty)$. Допустим также, что $\psi_0(x) \in C^3(\bar{\Omega})$, а $\psi(x, t, v) \in C^1(\bar{Q}_{t_0} \times R) \cup C^2(\bar{Q}_{t_0} \times (-\infty, v_1]) \cup C^3(\bar{Q}_{t_0} \times [v_1 + \infty))$. Наконец, пусть $-v\psi(x, t, v) < 0$ при $v| > 0$, $(x, t) \bar{Q}_{t_0}$ и $-v\dfrac{\partial b}{\partial v} \leqslant c_1 v^2 + c_2$, c_1, $c_2 \geqslant 0$, $(x, t) \in Q_{t_0} \cup \Omega \times \{t_0\}$; $\dfrac{\partial\psi_0}{\partial n}(x) + \psi(x, 0, \psi_0(x)) = 0$, $x \in \partial\Omega$.

Тогда, если исходные данные задачи (4)—(6) удовлетворяют одному из условий (18) или (20), то имеют место утверждения:

a) функция $v(x, t, \varepsilon)$, определяемая как решение задачи (13), при $\varepsilon \to 0+$ монотонно убывает, стремится в каждой точке $(x, t) \in \bar{Q}_{t_0}$ к функции $v(x, t)$, являющейся решением задачи (4)—(6) (см. определение в п. 1); сходимость имеет место также в метрике $W_2^{1,1}(Q_{t_0})$;

b) $v(x, t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{2,1}(Q_{t_0}) \cap C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_{t_0})$;

c) если $\psi(x, t, v) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0} \times R$, а $\psi_0(x) \leqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, то $v(x, t) \leqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$; если же $\psi(x, t, v) \leqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0} \times R$, а $\psi_0(x) \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, то $v(x, t) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$;

d) если $\Delta\psi_0(x) \leqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, а $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x, t, v) \geqslant 0$ в $\partial\Omega \times [0, t_0] \times R$, то $\dfrac{\partial v}{\partial t} \leqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$; если же $\Delta\psi_0(x) \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, а $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x, t, v) \leqslant 0$ в $\partial\Omega \times [0, t_0] \times R$, то $\dfrac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

6. Заключительные замечания. Все изложенные результаты получены в случае простейшего квазилинейного параболического уравнения. Наиболее трудной задачей, обобщающей рассмотренную, представляется начально-краевая задача для общего квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - a(x, t, u, \nabla u) = 0,$$

коэффициенты a_{ij} и a которого претерпевают разрывы первого рода по переменным u и даже ∇u.

Вполне вероятно, что при соответствующих дополнительных ограничениях полученные результаты сохранились бы и в случае уравнения

$$b(x, t, u, vu)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t, u, \nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - a(x, t, u, \nabla u) = 0,$$

в котором претерпевает разрыв первого рода по u лишь коэффициент $b(x, t, u, \nabla u)$, в то время как остальные коэффициенты являются достаточно гладкими функциями.

И наконец, в случае, когда коэффициенты общего квазилинейного уравнения b, a_{ij}, a не зависят от ∇u и разрыв претерпевает лишь коэффициент b, все полученные выше результаты переносятся без изменений.

1. *Данилюк И. И.* Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 10—13.
2. *Данилюк И. И.* О начально-краевой задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами // Проблемы математики и механики : Сб. науч. тр., посвящ. памяти академика М. А. Лаврентьева.— Новосибирск; Наука, 1983.— С. 81—94.
3. *Данилюк И. И., Тимченко С. И.* Численный анализ математической модели, описывающей объемный процесс кристаллизации в двухкомпонентной среде // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 3.— С. 3—6.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцев Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы.— М. : ИЛ, 1962.— Т. 1.— 896 с.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 576 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 28.06.88