УДК 517.95

В. П. Щербина

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для операторов, действующих из одного банахова пространства в другое, вводится понятие вращения векторного поля. С его помощью устанавливается разрешимость уравнений вида $Au + Bu = f$, где A — линейный оператор с нулевым ядром; B — нелинейный оператор, такой, что $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \|Bu\| / \|u\| = 0$.

В данной статье вводится понятие вращения векторного поля для операторов, действующих из одного банахового пространства в другое. С его помощью устанавливается разрешимость операторного уравнения $Au + Bu = f$, где A — линейный оператор, такой, что $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$; B — нелинейный оператор. Дается приложение к разрешимости задачи Неймана

$$-\Delta u + \varphi(x, u) = f(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$$

в $W_{2,p}(Q)$ при $p > 1$.

1. Пусть X и Y — действительные сепарабельные банаховы пространства; Y^* — сопряженное пространство к Y. По аналогии с [1] построим базисные системы в X и Y^* и вспомогательный оператор $K\colon X \to Y^*$. Определим в пространствах X и Y^* специальные полные системы элементов $\{w_i\}$, $\{v_i\}$ $(i = \overline{1, \infty})$ и нелинейный оператор $K\colon X \to Y^*$, обладающие следующими свойствами.

Пусть X_n, Y_n^* n-мерные пространства в X и Y^*, натянутые на элементы $\{w_i\}$ и $\{v_i\}$ $(i = \overline{1, n})$ соответственно. Пусть K_n — сужение отображения K на X_n, причем при любом $n K_n$ устанавливает взаимооднозначное соответствие X_n и Y_n^*, $KX_n \subset Y_n^*$ и если $Ku = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i$ $(u \in X_n)$, то $\langle h_n, u\rangle c_n > 0$, $\langle h_n, w_k\rangle = \delta_n^k$. Здесь $\langle h, u\rangle$ — значение функционала h на элементе u и

$$\delta_n^k = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ 1, & \text{если } n = k. \end{cases}$$

Оператор $T : X \to Y$ называется деминепрерывным, если он сильно сходящиеся последовательности переводит в слабо сходящиеся.

Сильную и слабую сходимости обозначаем соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$.

Будем говорить, что оператор T удовлетворяет условию K_α, если для любой последовательности $u_k \rightharpoonup u_0$ и последовательности $y_k \to y_0$ $(y_k \in X_{n_k})$ из

$$\varlimsup_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h\rangle \leqslant 0$$

следует $u_k \to u_0$. Здесь $K(u_k - y_k) \rightharpoonup h$.

Для такого оператора T можно ввести понятие вращения векторного поля по методу, изложенному в [2].

Пусть S — граница ограниченного множества $\mathcal{D}$ в X и $Tu \neq 0$ на S. Определим на $S_n = S \cap X_n$ векторное поле

$$\varphi_n(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tu, \omega_i \rangle v_i.$$

Лемма 1. Существует N_1 такое, что при $n \geqslant N_1$ $\varphi_n(u) \neq 0$ на S_n.

Доказательство. Пусть от противного существует последовательность $u_k \in S_{n_k}$, такая, что

$$\varphi_{n_k}(u_k) = \sum_{i=1}^{n_k} \langle Tu_k, \omega_i \rangle v_i = 0 \qquad (n_k \to \infty).$$

Тогда $\langle Tu_k, \omega_i \rangle = 0$ $(i = \overline{1, n_k})$. Можем считать, что $u_k \rightharpoonup u_0$. Покажем, что $u_k \to u_0$. Для этого найдем предел

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h \rangle.$$

Пусть $z_k \to h$ $(z_k \in Y^*_{n_k})$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - z_k + z_k - h \rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - z_k \rangle + \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, z_k - h \rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, \sum_{i=1}^{n_k} m_i \omega_i \rangle + 0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m_i \langle Tu_k, \omega_i \rangle = 0,$$

следовательно, из условия K_α находим, что $u_k \to u_0$ и $Tu_0 = 0$, что невозможно в силу предположения. Таким образом, на S определено вращение $\varphi_n(u)$.

Лемма 2. Существует N_2 такое, что при $n > N_2$ вращение векторного поля $\varphi_n(u)$ на S_n не зависит от n.

Доказательство. Рассмотрим на S_n векторное поле

$$\tilde{\varphi}_n(u) = \varphi_{n-1}(u) + \langle h_n, u \rangle v_n.$$

Из леммы Лере — Шаудера [3] следует, что вращение полей $\tilde{\varphi}_n(u)$ на S_n и $\varphi_{n-1}(u)$ на S_{n-1} одинаково. Покажем, что при достаточно больших S поле

$$\Phi_n(u, t) = t\varphi_n(u) + (1 - t)\tilde{\varphi}_n(u)$$

не обращается в нуль при $u \in S_n$, $t \in [0, 1]$. Предположим противное: пусть существуют последовательности $u_k \in S_{n_k}$ $t_k \in [0, 1]$, $n_k \to \infty$, такие, что $\Phi_{n_k}(u_k, t_k) = 0$. Можем считать, что $u_k \rightharpoonup u_0$, $t_k \to t_0$. Ясно, что $t_0 \neq 0$ и $t_0 \neq 1$. Из $\Phi_{n_k}(u_k, t_k) = 0$ определяем

$$\langle Tu_k, \omega_i \rangle = 0 \qquad (i = \overline{1, n_k - 1}),$$

$$t_k \langle Tu_k, \omega_{n_k} \rangle + (1 - t_k) \langle h_{n_k}, u_k \rangle = 0.$$

Пусть $y_k \in X_{n_k - 1} \cap S$, $y_k \to u_0$, $z_k \in Y^*_{n_k - 1}$, $z_k \to h$, $K(u_k - y_k) - h \rightharpoonup 0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - z_k + z_k - h \rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - z_k \rangle + \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, z_k - h \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, \sum_{i=1}^{n_k} m_i \omega_i \rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, m_{n_k} \omega_{n_k} \rangle = \lim_{k\to\infty} m_{n_k} \langle Tu_k, \omega_{n_k} \rangle = -\lim_{k\to\infty} \frac{1 - t_k}{t_k} m_{n_k} \langle h_{n_k}, u_k \rangle.$$

В силу выбора базисов и оператора K предел $\leqslant 0$. Следовательно, $u_k \to \to u_0 \in S$, что невозможно.

Исходя из лемм 1 и 2 можно сделать следующее определение.

Вращением поля Tu на S называется вращение векторного поля $\varphi_n(u)$ на S_n при $n \geqslant N_2$.

С помощью вращения векторного поля устанавливаются теоремы разрешимости уравнения $Tu = 0$, которые имеют формулировки, аналогичные [2].

2. Рассмотрим теперь разрешимость уравнения

$$Au + Bu = f,$$

где $A: X \to Y$ — линейный оператор; $B: X \to Y$ — нелинейный оператор; $f \in Y$, $T = A + B$ удовлетворяет всем условиям, наложенным выше.

Теорема 1. Если A — отображение взаимооднозначное и $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{Bu}{\|u\|} = 0$, то уравнение $Au + Bu = f$ имеет решение при любом $f \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим гомотопию

$$T_t(u) = Au + (1-t)(Bu - f).$$

Существует такое r, что при $\|u\| > r$ $T_t(u) \neq 0$. Предположим противное: существуют $t_n \in [0, 1]$, u_n, $\|u_n\| \to \infty$ такие, что $T_{t_n}(u_n) = 0$. Тогда

$$Ag_n + (1-t_n)(Bu_n - f)/\|u_n\| = 0.$$

Поскольку последовательность $g_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ ограничена, то $g_n \rightharpoonup g$. В силу условий на B

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ag_n, K(u_n - y_n) - h\rangle = 0.$$

Следовательно, в силу условия $K_\alpha\, g_n \to g$ и $Ag = 0$, причем $g \neq 0$, что невозможно, так как A — отображение взаимооднозначное. Поскольку вращение Au на S_r отлично от нуля, то и вращение $Au + Bu - f$ также отлично от нуля. Следовательно, уравнение $Au + Bu = f$ разрешимо.

Обозначим $N(A) = \operatorname{Ker} A$. Рассмотрим случай, когда $N(A) \neq \{0\}$.

Теорема 2. Если A и B удовлетворяют условиям теоремы 1, A является фредгольмовым нулевого индекса, причем $N(A) \neq \{0\}$ и $T[\overline{B(0, r)}]$ замкнуто при любом $B(0, r)$, то уравнение $Au + Bu = f$ разрешимо, если можно построить такой компактный оператор C, что одно из множеств $\Lambda^+ = \{u : Au + Bu + \lambda Cu - f = 0\}$ при $\lambda \to +0$ или $\Lambda^- = \{u : Au + + Bu + \lambda Cu - f = 0\}$ при $\lambda \to -0$ ограничено.

Докажем теорему в первом случае. Поскольку A — фредгольмов оператор нулевого индекса, то пространства X и Y можно представить в виде $X = X_1 \oplus N(A)$, $Y = Y_2 \oplus R(A)$, причем $\dim N(A) = \dim Y_2$. Следовательно, можно построить линейный взаимооднозначный компактный оператор $C: N(A) \to Y_2$ такой, что уравнение $Au + Bu + \lambda Cu - f = 0$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы при $\lambda > 0$. Устремляя $\lambda \to +0$, получаем $Au + Bu \to f$. Так как, по предположению, $T[\overline{B(0, r)}]$ замкнуто, то существует такое u, что $Au + Bu = f$. Теорема доказана.

На пространствах X и Y определим билинейную форму $[y, g]$ ($g \in X$, $y \in Y$), такую, что для любых $g \in N(A)$, $y \in R(A)$ $[y, g] = 0$. Кроме того, построим взаимооднозначный оператор $M: N(A) \to Y$ такой, что если $\{\varphi_i\}$ $(i = \overline{1, m})$, $m = \dim \ker A$) — базис в $N(A)$, то $[M\varphi_i, \varphi_j] = \delta_i^j$. Причем если $g = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \varphi_i$, то $[Mg, \varphi_i] = c_i$.

Теорема 3. Если выполнено одно из условий:

$$\lim_{n\to\infty} [Bu_n, g] > [f, g]$$

или

$$\lim_{n\to\infty} [Bu_n, g] < [f, g],$$

причем

$$\| u_n \| \to \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\| u_n \|} \to g \in N(A),$$

то уравнение

$$Au + Bu = f$$

имеет решение.

Доказательство. Пусть выполнено первое условие. Применим теорему 2. Пусть P — проектор пространства X на $\operatorname{Ker} A$. В качестве оператора C возьмем оператор MP. Покажем, что множество Λ^+ ограничено. Предположим противное, т. е. существует последовательность u_n ($\|u_n\| \to \infty$), такая, что

$$Au_n + \lambda MPu_n + Bu_n - f = 0.$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями получаем

$$g_n = \frac{u_n}{\| u_n \|} \to g \in N(A).$$

Используя билинейную форму, имеем

$$[Au_n, g] + \lambda [MPu_n, g] + [Bu_n, g] - [f, g] = 0.$$

По построению билинейной формы $[Au_n, g] = 0$. Кроме того, при $\lambda > 0$

$$\lambda [MPu_n, g] = \lambda \| u_n \| [MPg_n, g] \to \lambda \| u_n \| [MPg, g] = \| u_n \| [Mg, g] =$$

$$= \lambda \| u_n \| \left[Mg, \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i\right] = \lambda \| u_n \| \sum_{i=1}^{m} c_i [Mg, \varphi_i] = \lambda \| u_n \| \sum_{i=1}^{m} c_i^2 > 0.$$

Следовательно,

$$[Bu_n, g] - [f, g] < 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} [Bu_n, g] \leqslant [f, g],$$

что противоречит предположению. Значит, множество Λ^+ ограничено. Аналогично доказывается второй случай.

3. Рассмотрим теперь разрешимость задачи

$$-\Delta u + \varphi(x, u) = f(x) \qquad (x \in Q \in R^n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (x \in \Gamma). \tag{1}$$

Будем предполагать, что граница Γ достаточно гладкая для применения теорем вложения Соболева; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали. Обозначим:

$$X = \left\{ u : u \in W_{2,p}(Q); \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in \Gamma \right\},$$

$$Y = L_p(Q).$$

Определим

$$Au = -\Delta u, \quad Bu = \varphi(x, u).$$

Известно, что $\operatorname{ind} A = 0$, $N(A) = \operatorname{coker} A = \{\text{const}\}$.

Теорема 4. Предположим, что $\varphi(x, u)$ непрерывна по своим переменным, $|\varphi(x, u)| < a + b|u|^s$ ($a > 0$, $b > 0$, $s \in]0, 1[$) и $\lim\limits_{u \to \pm\infty} \varphi(x, u) = \pm\infty$. Тогда задача 1 разрешима в $W_{2,p}(Q)$ ($p > 1$).

Проверим, что выполнены все условия теоремы 3.

Проверим условие K_α. Положим $K_u = |(-\Delta + I) u|^{p-2} (-\Delta + I) u$. Системы $\{w_i\}$ и $\{v_i\}$ построены в [1]. Пусть $u_k \to u_0$, $y_k \to u_0$, $K(u_k - y_k) \rightharpoonup h$,

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h\rangle \leqslant 0.$$

Выполним преобразования

$$\lim_{k\to\infty} \langle -\Delta u_k + \varphi(x, u_k), |(-\Delta + I)(u_k - y_k)|^{p-2} (-\Delta + I)(u_k - y_k) - h\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle (-\Delta + I)(u_k - y_k) + h_k, |(-\Delta + I)(u_k - y_k)|^{p-2} (-\Delta + I) \times$$

$$\times (u_k - y_k) - h\rangle,$$

где $h_k = -u_k - \Delta y_k + y_k + \varphi(x, u_k)$. В силу теоремы вложения $h_k \to h_0$ в $L_p(Q)$. Поэтому в силу линейности $-\Delta + I$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k) - h\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, K(u_k - y_k)\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle (-\Delta + I)(u_k - y_k),$$

$$(-\Delta + I)(u_k - y_k)^{p-2} (-\Delta + I)(u_k - y_k)\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_Q |(-\Delta + I)(u_k - y_k)|^p \times$$

$$\times dx \geqslant \lim_{k\to\infty} (c_1 \|u_k - y_k\|_{W_{2,p}} - c_2 \|u_k - y_k\|_{L_p}).$$

Последнее неравенство получается из априорных оценок эллиптического оператора. Следовательно, $u_k \to u_0$ в $W_{2,p}$.

Можно показать, что $T[B(0, r)]$ замкнуто для любого r. Форму $[y, g]$ определим как $\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q gy dx$. То что $[y, g] = 0$ при $g \in N(A)$, $y \in R(A)$ следует из того, что

$$\int_Q (-\Delta u \cdot c)\, dx = \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} dx = 0.$$

Оператор M в данном случае будет тождественным.

Пусть теперь $\{u_n\} \in X$ — последовательность, такая, что $u_n / \|u_n\| \to g$ ($g \in N(A)$) при $n \to \infty$. Так как в нашем случае есть ненулевая константа, то почти всюду $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to g$. Поэтому $\varphi(x, u_n) = \varphi(x, \|u_n\| g_n) \to +\infty$ ($g > 0$) и $\varphi(x, u_n) \to -\infty$ при $g < 0$. Поэтому в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} [Bu_n, g] = +\infty,$$

следовательно, теорема доказана.

Разрешимость этой задачи в $W_{2,2}$ изучал Петришин [4], а в $W_{2,p}$ ($p > n$) — Фитспатрик [5].

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М. : Гостехиздат, 1956.— 392 с.
2. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев : Наук. думка, 1973.— 219 с.
3. *Скрыпник И. В., Щербина В. П.* О бифуркации решений граничных задач для недивергентных уравнений // Мат. физика.— 1976.— 19.— С. 99—103.
4. *Petryshyn W. P.* Existence theorems for semilinear abstract and differential equation with noninvertible liner parts and noncompact perturbations // Proc. of Symp. on Nonlinear Equations in Abstracts Spaces/Ed. V. Lakshmikantham.— New York; Acad. press, 1978.— P. 275—315.
5. *Fitzpatrick P. M.* Existence results for equation involving noncompact perturbations of fredholm mappings with applications to differential equations // J. Math. Anal. Appl.— 1978.— 66.— P. 151—177.

Донец. гос. ун-т — Получено 31.05.88