Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 193 – 202

Деякі операторні рівняння, що містять функції від оператора Помм'є

Надія Є. Лінчук, Степан С. Лінчук

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. У класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, досліджено розв'язки деяких операторних рівнянь, які містять функції від оператора Помм'є

2000 MSC. 47B38.

Ключові слова та фрази. Лінійні неперервні оператори в просторах аналітичних функцій, операторні рівняння, оператор Помм'є.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{H}'(G)$ — простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}(G)$. Символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ позначимо множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Якщо $0 \in G$, то через Δ позначимо оператор Помм'є, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом: $(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$. Оператор Помм'є є модельним для просторів аналітичних функцій. Багаточисельні дослідження з теорії операторів присвячено вивченню різноманітних задач, пов'язаних з оператором Помм'є [1]. Оператор Помм'є є спряженим до оператора множення на незалежну змінну в просторах Харді. Дослідження його властивостей у цих просторах проведено в [2]. В монографії [3] систематизовано результати, пов'язані з операторами Помм'є, які діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях. В [4] доведено, що формулою

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z - \zeta}\right], \tag{1}$$

Стаття надійшла в редакцію 30.01.2008

де L — довільний функціонал із $\mathcal{H}'(G)$, визначається загальний вигляд операторів $T \in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$, які комутують з оператором Δ. В статті [5] наведено інше доведення формули (1) зображення комутанта оператора Помм'є. В даній статті вивчаються загальні операторні рівняння, які містять функції від оператора Помм'є. З цією метою використовується інтегральне зображення Кете [6] операторів з класу $\mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$.

Нехай G_1 і G_2 — довільні області комплексної площини, а $G_i^{(n)}$, $i = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$ — послідовності областей, які апроксимують зсередини відповідну область G_i, тобто $\overline{G_i^{(n)}} \subset G_i^{(n+1)}$, $G_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_i^{(n)}$. Вважатимемо, що кожна з областей $G_i^{(n)}$ є обмеженою скінченною кількістю замкненених спрямних жорданових кривих, причому зв'язність $G_i^{(n)}$ не перевищує зв'язності G_i, $i = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$. Якщо $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$, то функція

$$t(\lambda, z) = T\left[\frac{1}{\lambda - \tilde{z}}\right], \qquad \lambda \in \complement G_1,\ z \in G_2,\ \tilde{z} \in G_1, \tag{2}$$

є локально аналітичною на множині $\complement G_1 \times G_2$, тобто існує монотонно зростаюча функція $N(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ така, що для кожного натурального n функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $\overline{\complement G_1^{(N(n))}} \times G_2^{(n)}$; $t(\infty, z) = 0$. Якщо $m > n$, то функція $t(\lambda, z)$, яка визначена на множинах $\overline{\complement G_1^{(N(n))}} \times G_2^{(n)}$ і $\overline{\complement G_1^{(N(m))}} \times G_2^{(m)}$ збігається на їхньому перетині $\overline{\complement G_1^{(N(m))}} \times G_2^{(n)}$. Для $g \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G_2^{(n)}$ виконується рівність

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, z) g(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

де γ_n — межа області $G_1^{(N(n)+1)}$.

Навпаки, якщо функція $t(\lambda, z)$ є локально-аналітичною на множині $\complement G_1 \times G_2$, то вона є аналітичною на множині $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\complement G_1^{(N(n))}} \times G_2^{(n)}$ і рівністю (3) визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$. Таким чином, формулами (2) та (3) встановлюється взаємно однозначна відповідність між локально аналітичними на множині $\complement G_1 \times G_2$ функціями $t(\lambda, z)$ і операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$. Функцію $t(\lambda, z)$ називають характеристичною за Кете функцією оператора T. Нехай $\mathcal{H}(\complement G)$ — простір локально аналітичних на множині $\complement G$ функцій, тоді $\mathcal{H}'(G)$ є ізоморфним до простору $\mathcal{H}(\complement G)$ [6]. Формула

$$l(\lambda) = \underset{z}{L}\left[\frac{1}{\lambda - z}\right] \tag{4}$$

встановлює відповідність між $L \in H'(G)$ і $l \in \mathcal{H}(\complement G)$. Функція $l(\lambda)$ називається характеристичною для функціонала L.

Нехай функція $\psi(\lambda)$ така, що $t(\lambda, z) = \frac{\psi(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$. Тоді формулою

$$(\psi(\Delta)g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{\psi(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z} g(\lambda)\, d\lambda \tag{5}$$

визначається оператор $\psi(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$ (контур інтегрування γ_n в (5) вибирається за означенням локально аналітичної функції $t(\lambda, z)$). Оператор виду (5) називається функцією від оператора Помм'є [7]. Оператор (1) є функцією від оператора Помм'є. Тому комутант оператора Δ в $H(G)$ збігається з множиною операторів, які є функціями від оператора Δ.

Нехай G_j — довільні області комплексної площини, які містять точку 0, а $\varphi_j(\Delta)$ — лінійні неперервні оператори, що діють в $\mathcal{H}(G_j)$, $j = 1, 2$. Оператори $\varphi_j(\Delta)$ породжені характеристичними функціями $\frac{\varphi_j(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$, які локально аналітичні відповідно на множинах $\complement G_j \times G_j$ ($j = 1, 2$). В цій статті вивчається операторне рівняння виду

$$T\varphi_1(\Delta) = \varphi_2(\Delta)T \tag{6}$$

у класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$.

Доведемо основний результат цієї статті.

Теорема 1. *Нехай G_1 і G_2 — довільні області в $\mathbb{C}$, що містять точку 0, а оператори $\varphi_1(\Delta)$ і $\varphi_2(\Delta)$ неперервно діють відповідно в $\mathcal{H}(G_1)$ і $\mathcal{H}(G_2)$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ був розв'язком рівняння (6) необхідно і достатньо, щоб функція $(\varphi_1(\frac{1}{\lambda}) - \varphi_2(\frac{1}{z}))t(\lambda, z)$ аналітично продовжувалася на множину $\complement G_1 \times \complement G_2$, ($\lambda \in \complement G_1, z \in \complement G_2$).*

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (6). Через $t_1(\lambda, z)$ позначимо характеристичну функцію оператора $\varphi_2(\Delta)T$. Зафіксуємо n таким, що функція $\frac{\varphi_2(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$ є аналітичною при $\lambda \in \overline{\complement G_n^{(2)}}$ і $z \in G_n^{(2)}$. Нехай $\gamma_{n+1} = \partial G_{n+1}^{(2)}$. Тоді для $z \in G_{n+1}^{(2)}$ і $g \in \mathcal{H}(G_2)$ згідно (5) маємо:

$$(\varphi_2(\Delta)g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} \frac{\varphi_2(\frac{1}{\tau})}{\tau - z} g(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

За числом $n+1$ вибираємо номер $N(n+1)$ таким, щоб характеристична функція $t(\lambda, z)$ оператора T була аналітичною при $\lambda \in \mathcal{H}^{(1)}_{N(n+1)}$ і $z \in G^{(2)}_{n+1}$, де $\mathcal{H}^{(1)}_{N(n+1)} = \complement\overline{G^{(1)}_{N(n+1)}}$. Тоді для $\lambda \in \mathcal{H}^{(1)}_{N(n+1)}$ і $z \in G^{(2)}_{n+1} \setminus \overline{G^{(2)}_n}$ одержимо:

$$\begin{aligned} t_1(\lambda, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\varphi_2(\frac{1}{\tau})}{\tau - z}\, d\tau \\ &= \varphi_2\Big(\frac{1}{z}\Big) t(\lambda, z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\varphi_2(\frac{1}{\tau}) - \varphi_2(\frac{1}{z})}{\tau - z}\, d\tau. \end{aligned}$$

Зафіксуємо m таким, щоб $m > N(n+1)$ і функція $\frac{\varphi_1(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$ була аналітичною на множині $\complement\overline{G^{(1)}_m} \times G^{(1)}_m$. Тоді при $\lambda \in \mathcal{H}^{(1)}_m$ і $z \in G^{(2)}_{n+1}$ маємо: $t_1(\lambda, z) = \varphi_1(\frac{1}{\lambda}) t(\lambda, z)$. Прирівнюючи одержані вирази для $t_1(\lambda, z)$ матимемо, що при $\lambda \in \mathcal{H}^{(1)}_m$ і $z \in G^{(2)}_{n+1} \setminus \overline{G^{(2)}_n}$ виконується рівність

$$\Big(\varphi_1\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) - \varphi_2\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) t(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\varphi_2(\frac{1}{\tau}) - \varphi_2(\frac{1}{z})}{\tau - z}\, d\tau. \tag{8}$$

Але функція $t_2(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\varphi_2(\frac{1}{\tau}) - \varphi_2(\frac{1}{z})}{\tau - z}\, d\tau$ є аналітичною при $\lambda \in \complement\overline{G^{(1)}_m}$ і $z \in \complement\overline{G^{(2)}_n}$. Тому з (8) випливає, що функція $(\varphi_1(\frac{1}{\lambda}) - \varphi_2(\frac{1}{z})) t(\lambda, z)$ аналітично продовжується на множину $\complement G_1 \times \complement G_2$ ($\lambda \in \complement G_1, z \in \complement G_2$).

Достатність. Нехай функція $t_2(\lambda, z) = (\varphi_1(\frac{1}{\lambda}) - \varphi_2(\frac{1}{z})) t(\lambda, z)$ аналітично продовжується на множину $\complement G_1 \times \complement G_2$. Покажемо, що оператор T з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (6). Зафіксуємо числа m і n такими, щоб функція $t_2(\lambda, z)$ була аналітичною на множині $\complement\overline{G^{(1)}_m} \times \complement\overline{G^{(2)}_n}$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що функції $\frac{\varphi_1(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$ і $\frac{\varphi_2(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}$ є аналітичними відповідно на множинах $\complement\overline{G^{(1)}_m} \times G^{(1)}_m$ і $\complement\overline{G^{(2)}_n} \times G^{(2)}_n$. Нехай $\Gamma_{n+1} = \partial(G^{(2)}_{n+1})$. Тоді для довільної функції $g \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G^{(2)}_{n+1}$ маємо:

$$(\varphi_2(\Delta)Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\varphi_2(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}(Tg)(\lambda)\,d\lambda. \tag{9}$$

За означенням локально аналітичної на множині $\complement G_1 \times G_2$ функції $t(\lambda, z)$ для числа $n+2$ існує натуральний номер $N(n+2) > m$ такий, що для довільної функції $g \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G^{(2)}_{n+2}$ маємо

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} t(\tau, z)g(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

де $\gamma_n = \partial(G^{(1)}_{N(n+2)+1})$. Тоді, згідно (9) та (10) одержимо:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_2(\Delta)Tg)(z) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\varphi_2(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - z}\,d\lambda \int\limits_{\gamma_n} t(\tau, z)g(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n} g(\tau)\,d\tau\Bigg(\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{(\varphi_2(\frac{1}{\lambda}) - \varphi_1(\frac{1}{\tau}))t(\tau,\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda \\
&\qquad + \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\varphi_1(\frac{1}{\tau})t(\tau,\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda\Bigg) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} g(\tau)\varphi_1(\frac{1}{\tau})\,d\tau \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{t(\tau,\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \varphi_1(\frac{1}{\tau})t(\tau, z)g(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{n+1}} \varphi_1(\frac{1}{\tau})t(\tau, z)g(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}$$

де $z \in G^{(2)}_{n+1}$, а $\gamma_{n+1} = \partial(G^{(1)}_{N(n+2)+2})$.

З іншого боку, при $z \in G^{(2)}_{n+1}$ маємо:

$$\begin{aligned}
(T\varphi_1(\Delta)g)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, z)(\varphi_1(\Delta)g)(\lambda)\,d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, z)\,d\lambda \int\limits_{\gamma_{n+1}} \frac{\varphi_1(\frac{1}{\tau})}{\tau - \lambda}g(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} \varphi_1(\frac{1}{\tau}) g(\tau)\, d\tau \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{t(\lambda, z)}{\tau - \lambda}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} \varphi_1(\frac{1}{\tau}) t(\tau, z) g(\tau)\, d\tau.$$

Теорема 1 доведена. □

Наведемо деякі застосування теореми 1.

Нехай G_j — довільні області комплексної площини, що містять точку 0, $j = 1, 2$. Для $P(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k$, $p_m \neq 0$, $m \geq 1$, через $P(\Delta)$ позначимо оператор $(P(\Delta)g)(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k (\Delta^k g)(z)$. Для $\varphi(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_1))$ розглянемо операторне рівняння виду

$$T\varphi(\Delta) = P(\Delta)T \tag{11}$$

у класі операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$.

Теорема 2. *Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ був розв'язком рівняння* (11) *необхідно і достатньо, щоб існували функції $l_k \in \mathcal{H}(\complement G_1)$, $k = \overline{0, m-1}$, такі, що для характеристичної функції $t(\lambda, z)$ оператора T на деякій множині $\mathcal{F}$ виконувалася рівність*

$$(z^m P(\frac{1}{z}) - z^m \varphi(\frac{1}{\lambda})) t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{m-1} l_k(\lambda) z^k. \tag{12}$$

Якщо (12) *виконується, то формулою* (10) *визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$, що задовольняє рівняння* (11).

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (11). З доведення необхідності умов теореми 1 випливає що для довільного числа n існує натуральне число $m = m(n)$ таке, що при $\lambda \in \mathcal{H}^{(1)}_{m(n)}$ і $z \in G^{(2)}_{n+1}$ виконується рівність

$$(\varphi(\frac{1}{\lambda}) - P(\frac{1}{z})) t(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, \tau) \frac{P(\frac{1}{\tau}) - P(\frac{1}{z})}{\tau - z}\, d\tau \tag{13}$$

(див. формулу (8)). Оскільки при $\tau, z \in \mathbb{C}$, $\tau \neq z$,

$$\frac{P(\frac{1}{\tau}) - P(\frac{1}{z})}{\tau - z} = -z^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\tau) z^k,$$

де

$$P_k(\tau) = \sum_{j=0}^{k} p_{m-k+j}\tau^{-(j+1)} \in \mathcal{H}(\complement G_2), \qquad k = \overline{0, m-1},$$

то рівність (13) набуває вигляду (12), де $l_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} t(\lambda,\tau)P_k(\tau)\,d\tau$, $l_k \in \mathcal{H}(\complement G_1)$. Необхідність умов теореми 2 доведено.

Достатність умов теореми 2 випливає з теореми 1. $\square$

Наслідок 1. *Якщо* $P(G_2^{-1})\bigcap \varphi((\complement G_1)^{-1}) = \emptyset$, *то формулою* (10), *де*

$$t(\lambda, z) = \left(z^m P\Big(\frac{1}{z}\Big) - z^m \varphi\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\right)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} l_k(\lambda) z^k, \tag{14}$$

а $l_k(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G_1)$, $k = \overline{0, m-1}$, *дається загальний розв'язок рівняння* (11).

Застосуємо одержані результати до рівняння виду

$$T\Delta^m = \Delta^m T. \tag{15}$$

Теорема 3. *Нехай* G_1 *і* G_2 *— довільні області в* $\mathbb{C}$, *що містять точку* 0, *і* $\omega^k G_2 \subset G_1$ *при* $k = \overline{0, m-1}$, *де* $\omega = \exp\frac{2\pi i}{m}$. *Для того, щоб оператор* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ *був розв'язком рівняння* (15) *необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$(Tf)(z) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} z^k \underset{\zeta}{L_k}\left[\frac{\omega^j z f(\omega^j z) - \zeta f(\zeta)}{\omega^j z - \zeta}\right], \tag{16}$$

де L_k $(k = \overline{0, m-1})$ *— деякі лінійні неперервні функціонали з* $\mathcal{H}'(G_1)$.

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (15). Оскільки $\omega^k G_2 \subset G_1$, $k = \overline{0, m-1}$, то за наслідком 1 існують функції $l_k \in \mathcal{H}(\complement G_1)$ такі, що для характеристичної функції $t(\lambda, z)$ оператора T на множині $\mathcal{F}$ виконується рівність

$$t(\lambda, z) = \frac{\lambda^m}{\lambda^m - z^m}\sum_{k=0}^{m-1} l_k(\lambda) z^k. \tag{17}$$

Розклавши функцію $\frac{\lambda^m}{\lambda^m - z^m}$ на прості дроби, одержимо, що

$$t(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{m}\frac{\lambda l_k(\lambda)}{\lambda - \omega^j z}.$$

Оскільки функції $m^{-1}l_k(\lambda)$ є локально аналітичними на множині $\complement G_1$, то існують функціонали $L_k \in \mathcal{H}'(G_1)$, для яких ці функції є характеристичними. Розглянемо оператор

$$(T_1 f)(z) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} z^k \underset{\zeta}{L_k}\left[\frac{\omega^j z f(\omega^j z) - \zeta f(\zeta)}{\omega^j z - \zeta}\right].$$

Оскільки $\omega^k G_2 \subset G_1$ при $k = \overline{0, m-1}$, то оператор $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що характеристична функція оператора T_1 збігається з характеристичною функцією оператора T, яка визначена формулою (17). Тому $T = T_1$.

Достатність. При виконанні умов теореми 3, формулою (16) визначається оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$. Оскільки характеристична функція оператора T подається у вигляді (17), то за наслідком 1 оператор T задовольняє співвідношення (15). Теорема 3 доведена. □

Теорема 4. *Нехай G_1 — однозв'язна, а G_2 — довільна області в $\mathbb{C}$, що містять точку* 0*, а $P(z)$ і $\varphi(\lambda)$ такі ж як і в теоремі* 2*. Якщо для деякого λ, $\lambda \in \complement G_1$, усі корені рівняння $P(\frac{1}{z}) = \varphi(\frac{1}{\lambda})$ відносно z лежать всередині області G_2, то рівняння* (11) *має лише нульовий розв'язок.*

Доведення. Нехай $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$, який є розв'язком рівняння (11). Тоді за теоремою 2 існують функції $l_k \in \mathcal{H}(\complement G_1)$, $k = \overline{0, m-1}$, такі, що на множині $\mathcal{F}$ виконується рівність (12). Зафіксуємо $\lambda' \in \complement G_1$, для якого усі корені рівняння $P(\frac{1}{z}) = \varphi(\frac{1}{\lambda'})$ відносно z лежать в області G_2. Візьмемо натуральне число n таким, щоб вказані розв'язки належали множині $G_n^{(2)}$. Нехай $N(n)$ таке, що на множині $\mathcal{H}_{N(n)}^{(1)} \times G_n^{(2)}$ виконується рівність (12). Рівняння $P(\frac{1}{z}) = \varphi(\frac{1}{\lambda'})$ має m коренів, які належать відкритій множині $G_n^{(2)}$. Корені рівняння $P(\frac{1}{z}) = \varphi(\frac{1}{\lambda'})$ неперервно залежать від λ'. Тому існує окіл $V_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda'| < \varepsilon\}$ точки λ', $V_\varepsilon \subset \mathcal{H}_{N(n)}^{(1)}$, такий, що для довільного $\lambda \in V_\varepsilon$ всі корені рівняння $P(\frac{1}{z}) = \varphi(\frac{1}{\lambda'})$ також належать множині $G_n^{(2)}$. Тоді з рівності (12) випливає, що при кожному $\lambda \in V_\varepsilon$ рівняння $\sum_{k=0}^{m-1} l_k(\lambda) z^k = 0$ відносно z має m коренів (враховуючи їхні кратності). Тому $l_k(\lambda) = 0$ для $\lambda \in V_\varepsilon$. За теоремою єдиності $l_k(\lambda) \equiv 0$ в $\complement G_1$ при $k = \overline{0, m-1}$, оскільки $\complement G_1$ є зв'язною множиною. Таким чином, з рівності (12) випливає, що $t(\lambda, z) \equiv 0$, тобто $T = 0$. □

Застосуємо одержані результати до дослідження деяких конкретних операторних рівнянь для $P(\Delta) = \Delta$.

Наслідок 2. *Нехай G_1 і G_2 — довільні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, що містять точку 0, $\varphi(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$. Для того, щоб рівняння*

$$T\varphi(\Delta) = \Delta T \tag{18}$$

у класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$ мало ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $G_2^{-1} \bigcap \varphi((\complement G_1)^{-1}) = \emptyset$. Якщо виконується остання умова, то загальний розв'язок рівняння (18) дається формулою

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{l_0(\lambda)}{1 - z\varphi(\frac{1}{\lambda})} g(\lambda)\, d\lambda,$$

де $l_0 \in \mathcal{H}(\complement G_1)$.

Перша частина цього наслідку випливає з наслідку 1, а друга — з теореми 2.

Наслідок 3. *Нехай G_1 і G_2 — довільні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, що містять точку 0. Для того, щоб операторне рівняння*

$$T\Delta = \Delta T \tag{19}$$

мало ненульовий розв'язок в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$, необхідно і достатньо, щоб $G_2 \subset G_1$. При виконанні цієї умови, загальний розв'язок рівняння (19) дається формулою

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{L} \left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z - \zeta} \right],$$

де $L \in \mathcal{H}'(G_1)$.

Наслідок 4. *При виконанні умов наслідку 3, оператор Δ в $\mathcal{H}(G_1)$ еквівалентний до оператора Δ в $\mathcal{H}(G_2)$ тоді і тільки, коли $G_1 = G_2$.*

Результати цієї статті можна застосувати до дослідження розв'язків операторного рівняння (15) у класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1), \mathcal{H}(G_2))$, де G_1, G_2 — довільні області в $\mathbb{C}$. Також є цікавою задача про опис розв'язків операторного рівняння $T\Delta^m = \Delta^n T$ при $m \neq n$.

Література

[1] Н. К. Никольский, *Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций* // Итоги науки и техники. Математический анализ, **27** (1974), 199–412.

[2] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, Москва, 1980, 383 с.

[3] М. І. Нагнибіда, *Оператори Помм'є в просторі аналітичних у крузі функцій*, Київ, 1997, 125 с.

[4] Н. Е. Линчук, *Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения* // Матем. заметки **44** (1988), N 6, 794–802.

[5] I. H. Dimovski, V. Z. Hristov, *Commutants of the Pommiez operator* // Int. J. Math. Math. Sci. (2005), N 8, 1239–1251.

[6] G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie* // J. reine und angew. Math., **191** (1953), 30–49.

[7] Н. Є. Лінчук, С. С. Лінчук, *Про один клас операторних рівнянь у просторі аналітичних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика, **46** (1999), 67–71.

Відомості про авторів

Надія Євгенівна Лінчук, Степан Степанович Лінчук

Чернівецький національний університет,
Коцюбинського 2,
Чернівці, 58012
Україна
E-Mail: nesslin.new@gmail.com