

УДК 539.3

©2011. А.В. Зенченко

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПЕРФОРИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ

Получены аналитические формулы для компонент напряжений и перемещений в трансверсально-изотропной полосе, лежащей на упругом перфорированном основании, в случае, когда на участке нижней границы приложена нормальная нагрузка.

Ключевые слова: теория упругости, смешанная задача, упругая полоса, преобразование Фурье.

1. Введение. В работах [1, 2] решена задача о распределении напряжений в упругой изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании при действии на границе распределенной нагрузки. В работах [3, 4] решение было обобщено на случай трансверсально-изотропной полуплоскости. В настоящей работе с помощью интегрального преобразования Фурье получено решение для трансверсально-изотропной полосы с упруго закрепленной нижней границей и свободной верхней. На участке нижней границы приложена нормальная нагрузка.

2. Постановка смешанной задачи. Основные уравнения и граничные условия.

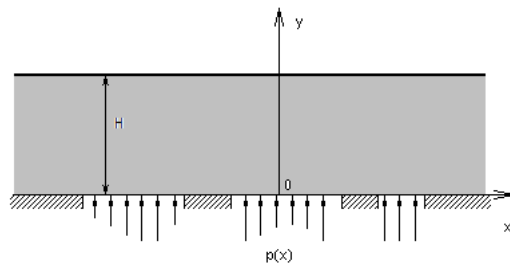


Рис. 1.

Рассмотрим следующую смешанную задачу теории упругости. Пусть ось x декартовой прямоугольной системы координат (x, y) проходит по границе полосы и упругого основания (рис.1). На участке нижней границы полосы, в области V , действует распределенная нормальная нагрузка $\sigma_y = p(x)$. В остальных точках нижней границы выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и смещений. Касательные напряжения на оси x отсутствуют. На верхней границе полосы нормальные и касательные напряжения равны нулю.

В случае плоской деформации при отсутствии массовых сил уравнения равнове-

сия и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты напряжений и упругих деформаций.

Обозначим через u и v перемещения вдоль осей x и y . Граничные условия смешанной задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= p(x), & x &\in V; \\ \sigma_y(x, 0) &= k \cdot v(x, 0), & x &\notin V; \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0, & x &\in (-\infty, +\infty); \\ \sigma_y(x, H) &= 0, & x &\in (-\infty, +\infty); \\ \tau_{xy}(x, H) &= 0, & x &\in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (3)$$

В упругой трансверсально-изотропной полуплоскости перемещения с компонентами напряжений связаны обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты деформации β_{ij} выражаются формулами

$$\beta_{11} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_2^2}{E_1}, \quad \beta_{12} = \frac{\nu_2(1 + \nu_1)}{E_1}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{G}. \quad (5)$$

Система дифференциальных уравнений (1), (2), (4) сводится к уравнению [5]:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \quad (6)$$

причем компоненты напряжения выражаются через функцию Φ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

3. Определение напряжений и перемещений в полосе. Будем решать уравнение (6) с помощью интегрального преобразования Фурье [7]. Умножим обе части уравнения на $e^{i\xi x}$ и проинтегрируем по переменной x от $-\infty$ до ∞ . Получим

$$\beta_{11} \frac{d^4 Q}{dy^4} - (2\beta_{12} + \beta_{66}) \xi^2 \frac{d^2 Q}{dy^2} + \beta_{22} \xi^4 Q = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\xi, y) &= F\{\Phi(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\xi x} dx, \\ \Phi(x, y) &= F^{-1}\{Q(\xi, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Корни характеристического уравнения равны $\pm r_1|\xi|, \pm r_2|\xi|$,

$$r_1, r_2 = \sqrt{\frac{(2\beta_{12} + \beta_{66}) \pm \sqrt{(2\beta_{12} + \beta_{66})^2 - 4\beta_{11}\beta_{22}}}{2\beta_{11}}}. \quad (10)$$

Общее решение дифференциального уравнения (8) запишем в виде

$$Q(y, \xi) = \sum_{n=1}^4 A_n(\xi) e^{r_n|\xi|y}. \quad (11)$$

Здесь $r_3 = -r_1$, $r_4 = -r_2$. Учитывая формулы (7), для изображений компонент напряжений получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= F\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right\} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n r_n^2 e^{r_n|\xi|y}, \\ \bar{\sigma}_y &= F\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right\} = -\xi^2 Q = -\xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n e^{r_n|\xi|y}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= F\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right\} = i\xi \frac{\partial Q}{\partial y} = i\xi|\xi| \sum_{n=1}^4 A_n r_n e^{r_n|\xi|y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя к первому уравнению закона Гука (4) интегральное преобразование Фурье, получим

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \beta_{11} \bar{\sigma}_x + \beta_{12} \bar{\sigma}_y = \xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n (\beta_{11} r_n^2 - \beta_{12}) e^{r_n|\xi|y}.$$

Отсюда

$$\bar{u} = \frac{1}{-i\xi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = i\xi \sum_{n=1}^4 A_n (\beta_{11} r_n^2 - \beta_{12}) e^{r_n|\xi|y}. \quad (13)$$

Из второго уравнения закона Гука (4), получим

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \beta_{12} \bar{\sigma}_x + \beta_{22} \bar{\sigma}_y = \xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22}) e^{r_n|\xi|y}.$$

Решив дифференциальное уравнение, найдем

$$\bar{v} = |\xi| \sum_{n=1}^4 A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22}) e^{r_n |\xi| y} + C(\xi). \quad (14)$$

Неизвестную функцию $C(\xi)$ найдем из выражения $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$. Применив к нему интегральное преобразование Фурье и подставив формулы для $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\tau}_{xy}$, получим, что $C(\xi) \equiv 0$.

Введём вспомогательную функцию

$$\beta(x) = \begin{cases} p(x) - k \cdot v(x, 0), & x \in V; \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда граничное условие для нормальных напряжений можно записать в виде

$$\sigma_y(x, 0) = k \cdot v(x, 0) + \beta(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (16)$$

Применив интегральное преобразование Фурье, получим

$$\bar{\sigma}_y(x, 0) = k \cdot \bar{v}(\xi, 0) + \bar{\beta}(\xi). \quad (17)$$

Таким образом, для нахождения четырех коэффициентов $A_n(\xi)$ имеем систему из четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_y(\xi, H) = 0, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, H) = 0, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, 0) = 0, \\ \bar{\sigma}_y(\xi, 0) - k \cdot \bar{v}(\xi, 0) = \bar{\beta}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^4 A_n e^{r_n |\xi| H} = 0, \\ \sum_{n=1}^4 A_n r_n e^{r_n |\xi| H} = 0, \\ \sum_{n=1}^4 A_n r_n = 0, \\ \sum_{n=1}^4 A_n (-\xi^2 - k \frac{|\xi|}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22})) = \bar{\beta}. \end{cases} \quad (18)$$

Система линейных уравнений совместна при $\xi \neq 0$, и имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера:

$$A_n(\xi) = \bar{\beta}(\xi) \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Здесь $\det A$ – определитель матрицы системы линейных уравнений, а $\det A_n$ – определитель матрицы, полученной заменой столбца n на $(0, 0, 0, 1)$.

Запишем $Q(\xi, y)$ в следующем виде, для удобства расчетов выделив $\bar{\beta}(\xi)$

$$Q(\xi, y) = \bar{\beta}(\xi) \sum_{n=1}^4 A_n(\xi) e^{r_n |\xi| y}, \quad A_n(\xi) = \frac{\det A_n}{\det A}. \quad (19)$$

Найдем выражения для компонент напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= F^{-1}\{\bar{\sigma}_x\} = F^{-1}\{\xi^2 \bar{\beta} \sum_{n=1}^4 A_n r_n^2 e^{r_n |\xi| y}\}, \\
 \sigma_y &= F^{-1}\{\bar{\sigma}_y\} = F^{-1}\{-\xi^2 \bar{\beta} \sum_{n=1}^4 A_n e^{r_n |\xi| y}\}, \\
 \tau_{xy} &= F^{-1}\{\bar{\tau}_{xy}\} = F^{-1}\{i\xi |\xi| \bar{\beta} \sum_{n=1}^4 A_n r_n e^{r_n |\xi| y}\}, \\
 u &= F^{-1}\{\bar{u}\} = F^{-1}\{i\xi \bar{\beta} \sum_{n=1}^4 A_n (\beta_{11} r_n^2 - \beta_{12}) e^{r_n |\xi| y}\}, \\
 v &= F^{-1}\{\bar{v}\} = F^{-1}\{|\xi| \bar{\beta} \sum_{n=1}^4 A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22}) e^{r_n |\xi| y}\}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= \int_V \beta(\eta) G_x(x - \eta, y) d\eta, \quad \sigma_y(x, y) = \int_V \beta(\eta) G_y(x - \eta, y) d\eta, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \int_V \beta(\eta) G_{xy}(x - \eta, y) d\eta, \\
 u(x, y) &= \int_V \beta(\eta) G_u(x - \eta, y) d\eta, \quad v(x, y) = \int_V \beta(\eta) G_v(x - \eta, y) d\eta,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n r_n^2 e^{r_n |\xi| y}) e^{-i\xi x} d\xi, \\
 G_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n e^{r_n |\xi| y}) e^{-i\xi x} d\xi, \\
 G_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi |\xi| \sum_{n=1}^4 A_n r_n e^{r_n |\xi| y}) e^{-i\xi x} d\xi, \\
 G_u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi \sum_{n=1}^4 A_n (\beta_{11} r_n^2 - \beta_{12}) e^{r_n |\xi| y}) e^{-i\xi x} d\xi, \\
 G_v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\xi| \sum_{n=1}^4 A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22}) e^{r_n |\xi| y}) e^{-i\xi x} d\xi.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Неизвестную функцию β найдем из интегрального уравнения, которое получается из первого граничного условия (3)

$$\int_V \beta(\eta) G_y(x - \eta, 0) d\eta = p(x), \quad x \in V, \quad (23)$$

где

$$G_y(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\xi^2 \sum_{n=1}^4 A_n(\xi)) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (24)$$

Также функцию β можно найти из уравнения (16)

$$\beta(x) = p(x) - k \cdot \int_V \beta(\eta) G_v(x - \eta, 0) d\eta, \quad x \in V, \quad (25)$$

здесь

$$G_v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\xi| \sum_{n=1}^4 A_n \frac{1}{r_n} (\beta_{12} r_n^2 - \beta_{22})) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (26)$$

Функции $G_x, G_y, G_{xy}, G_u, G_v$ зависят от упругих постоянных $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$, коэффициента пропорциональности k и толщины полосы H . Таким образом, будучи вычислены и запомнены один раз, они могут быть использованы для любой области V .

При $k = 0$ задача (1)-(4) вырождается в первую основную задачу. Из формулы (25) получаем $\beta(x) = p(x)$.

Решение (21)-(24) имеет практическое приложение в механике горных пород. В частности, оно может быть использовано при исследовании задач, связанных с подземной разработкой угольных пластов лавами. При этом упругая полоса моделирует массив горных пород, а перфорированное основание – разрабатываемый пласт полезного ископаемого с очистной выработкой.

1. *Зенченко А.В.* Распределение напряжений в полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С. 70-75.
2. *Хапилова Н.С., Зенченко А.В.* Смешанная задача теории упругости для изотропной полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе распределенной нагрузки // Ростов-на-Дону-Азов. Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. – 2004. – С. 177-179.
3. *Хапилова Н.С., Зенченко А.В.* Смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропной полуплоскости на упругом основании // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Материалы IV Международной научной конференции. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 139-141.
4. *Зенченко А.В.* Смешанная задача для трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании с пластическими зонами, при действии на участке границы линейной нормальной нагрузки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т. 16. – С. 88-92.
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

6. Кавлакан М.В., Михайлов А.М. О распределении давления на пласт при горизонтальной выработке // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1977. – №. 5. – С. 48-53.
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.: Наука, 1967. – 402 с.

A.V. Zenchenkov

Analytical solution of the mixed problem of elasticity for transversely-isotropic band on an elastic perforated base.

Analytical formulas for the components of stresses and displacements in a transversely-isotropic band on an elastic perforated base, in the case where the lower boundary of the band applied normal load.

Keywords: *elasticity theory, mixed problem, elastic band, Fourier transform.*

А.В. Зенченко

Аналітичний розв'язок змішаної задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропної смуги на пружній перфорованій основі.

Отримано аналітичні формули для компонент напружень та переміщень у трансверсально-ізотропній смузі, що лежить на пружній перфорованій основі, у разі, коли на ділянці нижньої межі прикладене нормальне навантаження.

Ключові слова: *теорія пружності, змішана задача, пружна смуга, перетворення Фур'є.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
azenchenkov@mail.ru

Получено 12.05.11