

УДК 517.91, 531.36

©2020. А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ КООРДИНАТ В АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассмотрены основные задачи координатного подхода для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями, не зависящими от времени. Введено понятие обобщенного предельного множества для окрестности нулевого положения равновесия и показана связь размерности этого множества с максимально возможным количеством устойчивых и асимптотически устойчивых координат для заданной системы. Полученные результаты продемонстрированы на примере системы “круг Арцтейна”.

Ключевые слова: автономная система, устойчивость по Ляпунову, координатный подход, обобщенное предельное множество.

Введение. На современном этапе развития теории устойчивости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений не только ставится вопрос об исследовании качественных свойств некоторого решения или положения равновесия в целом, что было предметом изучения классической теории устойчивости [1, 2], или отдельных его компонент (координат), как в теории частичной устойчивости [3], но интерес представляет и нахождение таких переменных, в которых заданная система будет обладать требуемыми свойствами устойчивости и асимптотической устойчивости. Указанный взгляд на исследование устойчивости был предложен в работах [4, 5] и получил название координатный подход.

Основные задачи этого подхода для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений были сформулированы в работе [6], а в статье [7] они были уточнены и распространены на неавтономный случай. Однако даже для автономных систем в этих работах были получены лишь частные свойства и рассмотрены отдельные примеры систем, в которых удалось выделить переменные с требуемыми асимптотическими свойствами.

Настоящая работа продолжает исследования основных задач координатного подхода. В ней получен достаточно общий результат, который дает оценку максимально возможного количества асимптотически и неасимптотически устойчивых переменных для широкого класса автономных систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где x – n -мерный фазовый вектор системы, t – время, $\dot{x}$ обозначает производную фазового вектора по времени. Множество значений правой части этой системы $f(x)$ содержится в R^n , и $f(x)$ определена в каждой точке некоторой области X , содержащей стационарную точку x^* , в которой $f(x^*) = 0$.

Без ограничений общности можно считать, что эта точка является началом координат, т. е. $x^* = 0$. Функция f предполагается удовлетворяющей требованиям теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решения задачи Коши, т. е. при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $x_0 \in D$ существует единственное решение системы (1). Решение системы (1), исходящее из заданной точки x_0 в начальный момент времени, будем обозначать $x(t; x_0)$, при этом, согласно указанным требованиям, $x(t; x_0)$ непрерывно зависит как от t , так и от x_0 .

При сделанных предположениях существует нулевое решение $x(t; 0) \equiv 0$. В зависимости от характера поведения траекторий с начальными условиями в окрестности начала координат, нулевое решение может быть либо устойчивым, либо неустойчивым [1].

Определение 1. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется устойчивым, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x_0 из δ -окрестности начала координат ($\|x_0\| < \delta$) и любого $t \in [0, +\infty)$ имеет место неравенство $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$.

Определение 2. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется неустойчивым, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x_0 из δ -окрестности начала координат и момент времени $t \in [0, +\infty)$, для которых $\|x(t; x_0)\| \geq \varepsilon$.

Кроме того, в зависимости от свойств соответствующих траекторий при стремлении t к бесконечности устойчивые решения подразделяются на асимптотически устойчивые и неасимптотически устойчивые [1], а неустойчивые – на ограниченно неустойчивые и неограниченно устойчивые [7].

Определение 3. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ и x_0 из δ -окрестности начала координат найдется такой момент времени $t_1(\varepsilon, x_0) > 0$, что неравенство $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$ будет справедливо для всех $t \in [t_1, +\infty)$.

Определение 4. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется неасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого $\delta > 0$ существуют $\varepsilon > 0$ и x_0 из δ -окрестности начала координат такие, что множество значений t , при которых выполнено неравенство $\|x(t; x_0)\| \geq \varepsilon$, будет неограниченным.

Определение 5. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется ограниченно неустойчивым, если оно неустойчиво и, кроме того, существуют такие $\delta > 0$ и $D > 0$, что для любой точки x_0 из δ -окрестности начала координат и любого момента времени $t \in [t_0, +\infty)$ выполнено неравенство $\|x(t; x_0)\| < D$.

Определение 6. Решение $x = 0$ уравнения (1) называется неограниченно неустойчивым, если для любых $\delta > 0$ и $D > 0$ найдется точка x_0 в δ -окрестности начала координат и момент времени $t \in [t_0, +\infty)$, для которых $\|x(t; x_0)\| \geq D$.

При рассмотрении задач устойчивости по части переменных [3] все переменные x системы (1) разбиваются на две части: $x = (y, z)$, где $y \in \mathbb{R}^m$ – иссле-

двумя, а $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ – остальные переменные системы. При исследовании частичной устойчивости нулевого решения в определениях 1–6 ограничения на начальные условия сохраняются на весь фазовый вектор ($\|x_0\| < \delta$), а неравенства, связанные с состоянием системы в другие моменты времени, заменяются условиями на часть переменных. Так, например, для y -устойчивого решения в определении 1 неравенство $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$ заменяется на $\|y(t; x_0)\| < \varepsilon$.

2. Предельные множества. Одним из инструментов в исследовании асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений являются предельные множества [8]. Поскольку нас интересует поведение траекторий при $t \rightarrow +\infty$, ограничимся лишь рассмотрением ω -предельного множества, а обозначение ω будем опускать.

Определение 7. Пусть задана некоторая точка x_0 . В силу существования и единственности решения из этой точки исходит некоторая вполне определенная траектория $x(t; x_0)$. Если существует некоторая неограниченно возрастающая последовательность моментов времени $\{t_n\}$ такая, что последовательность $\{x(t_n; x_0)\}$ сходится к некоторой точке x^* , то x^* называется предельной точкой траектории, исходящей из x_0 . Множество всех предельных точек траектории $x(t; x_0)$ образует ее предельное множество $X^*(x_0)$.

Поскольку нас интересует поведение не одной траектории, а целого семейства траекторий с начальными условиями, принадлежащими окрестности начала координат, имеет смысл строить предельное множество не для одной точки, а для всей окрестности.

Определение 8. Пусть задано множество D . Предельным множеством для траекторий, исходящих из множества D , будем считать объединение предельных множеств, построенных для каждой отдельно взятой точки множества D : $X^*(D) = \bigcup_{x_0 \in D} X^*(x_0)$.

Введенные таким образом предельные множества удобны при исследованиях свойств периодических или почти периодических решений, но в случае, когда рассматриваемые траектории неограниченно удаляются от начала координат (если существует хотя бы одна неограниченно неустойчивая переменная), данное определение не очень содержательно, поскольку каждая отдельно взятая траектория не будет иметь ни одной предельной точки. Кроме того, объединение множеств может не обладать рядом важных свойств, которые были у каждого из множеств по отдельности. Например, нельзя будет гарантировать замкнутость объединения предельных множеств, и даже связность объединения может быть нарушена. В связи с этим, целесообразно ввести понятие обобщенного предельного множества как предела образа окрестности при действии на нее оператора потока системы при $t \rightarrow +\infty$.

Определение 9. Пусть φ_t – полугруппа операторов потока системы (1), каждый из которых действует из X в X и определяется формулой $\varphi_t(x_0) = x(t; x_0)$. Для заданного множества D определим его образ при действии оператора φ_t : $\varphi_t(D) = \{\varphi_t(x) \mid x \in D\}$. Тогда обобщенным предельным множеством X^{**} для D назовем замкнутое множество, являющееся пределом

параметрического семейства множеств $\varphi_t(D)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$X^{**}(D) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(D),$$

где в качестве меры расстояния между множествами используется метрика Хаусдорфа

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) \right\}.$$

Это определение может быть переформулировано без введения операторов и введения метрики на множествах, используя понятие обобщенной предельной точки.

Определение 10. Пусть заданы система (1) и множество D . Если существуют некоторая неограниченно возрастающая последовательность моментов времени $\{t_n\}$ и последовательность начальных условий $\{x_0^{(n)}\}$ такие, что последовательность $\{x(t_n; x_0^{(n)})\}$ сходится к некоторой точке x^{**} , то x^{**} называется обобщенной предельной точкой для траекторий, исходящих из множества D , а множество всех обобщенных предельных точек будет образовывать обобщенное предельное множество, которое будем обозначать $X^{**}(D)$.

Если система (1) обладает свойствами существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий, то обобщенное предельное множество (так же, как и предельное множество отдельно взятой траектории) будет связным, замкнутым и инвариантным.

Кроме того, поскольку в качестве D мы будем рассматривать окрестности нулевого положения равновесия, точка $x = 0$ будет всегда принадлежать обобщенному предельному множеству, и, следовательно, обобщенное предельное множество произвольной окрестности положения равновесия будет гарантированно непустым.

3. Условия устойчивости и асимптотической устойчивости. С учетом введенных выше определений свойства устойчивости и асимптотической устойчивости могут быть в компактной форме сформулированы в терминах обобщенных предельных множеств.

Предложение 1. Решение $x = 0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым, если существует такая окрестность B_δ начала координат, что ее обобщенное предельное множество состоит из единственной точки: $X^{**}(B_\delta) = \{0\}$.

Предложение 2. Решение $x = 0$ системы (1) будет устойчивым, если обобщенные предельные множества окрестностей B_δ при уменьшении радиуса δ будут сходиться к нулевому положению равновесия: $\lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta) = \{0\}$.

Для частичной устойчивости можно записать аналогичные условия, рассмотрев вместо положения равновесия подпространство Y_0 , на котором обнуляется часть переменных, по которым исследуется устойчивость: $Y_0 = \{x = (y, z) \mid y = 0, z \in R^{n-m}\}$.

Предложение 3. Решение $x = 0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым по переменным y , если существует такая окрестность B_δ начала координат, что ее обобщенное предельное множество лежит целиком в подпространстве Y_0 : $X^{**}(B_\delta) \subset Y_0$.

Предложение 4. Решение $x = 0$ системы (1) будет устойчивым по переменным y , если обобщенные предельные множества окрестностей B_δ при уменьшении радиуса δ будут сходиться к множеству, целиком лежащему в подпространстве Y_0 : $\lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta) \subset Y_0$.

4. Основной результат. Следующая теорема определяет решение одной из основных задач координатного подхода о нахождении оптимальной конфигурации переменных системы [7].

Теорема 1. Пусть задана n -мерная система (1), а ее обобщенные предельные множества $X^{**}(B_\delta)$, построенные для окрестности радиуса δ , являются гладкими многообразиями. Обозначим $p = \dim \lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta)$, $q = \lim_{\delta \rightarrow 0} \dim X^{**}(B_\delta)$. Тогда для любой непрерывной обратимой замены переменных $y = g(x)$, сохраняющей начало координат, количество устойчивых (асимптотически и неасимптотически) координат в переменных y не может превышать $n - p$, из них не более $n - q$ будут асимптотически устойчивыми.

Доказательство. Прежде всего убедимся, что соответствующие свойства будут выполнены для системы (1) в исходных переменных x , т.е. для тривиальной замены $g(x) = x$. Допустим, утверждение теоремы неверно и есть, по крайней мере, $n - p + 1$ устойчивых переменных. Без ограничения общности можно считать, что это переменные $x_1, x_2, \dots, x_{n-p+1}$. Тогда, в соответствии с предложением 4, при $\delta \rightarrow 0$ обобщенное предельное множество для окрестности B_δ должно оказаться лежащим в подпространстве $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-p+1} = 0$. Однако размерность этого подпространства равна $p - 1$, а, значит, любое его подмножество, в том числе и $\lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta)$, может иметь размерность большую $p - 1$. Однако по условию теоремы она должна быть равна p . Полученное противоречие доказывает, что количество устойчивых переменных не может превышать $n - p$.

Перейдем теперь к асимптотически устойчивым переменным. Пусть имеется, по крайней мере, $n - q + 1$ асимптотически устойчивых переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-q+1}$. Тогда, по предложению 3, должна существовать некоторая окрестность B_δ , для которой $X^{**}(B_\delta)$ лежит целиком в подпространстве $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-q+1} = 0$, размерность которого равна $q - 1$. Следовательно, $\dim X^{**}(B_\delta) \leq q - 1$, а поскольку любая окрестность меньшего радиуса δ' будет вложена в δ -окрестность, их обобщенные предельные множества также будут вложены друг в друга, а, значит,

$$\forall \delta' < \delta \quad \dim X^{**}(B_{\delta}') \leq q - 1.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \dim X^{**}(B_\delta) \leq$

$\leq q - 1$, что противоречит определению величины q . Таким образом, предположение о существовании $n - q + 1$ асимптотически устойчивых переменных не может быть верным, а, значит, их есть не более $n - q$.

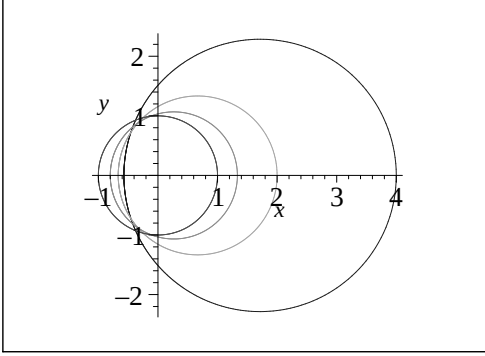
Пусть теперь имеется некоторая непрерывная невырожденная замена переменных $y = g(x)$, для которой выполнено $g(0) = 0$. В силу непрерывности преобразования g существуют функции класса Хана $\alpha(\delta)$ и $\beta(\delta)$ такие, что $B_{y,\alpha(\delta)} \subset g(B_\delta) \subset B_{y,\beta(\delta)}$, где соответствующие множества представлены в пространстве переменных y . При этом, поскольку преобразование g обратимо, оно должно сохранять размерность: $\dim g(M) = \dim M$ для произвольного многообразия M в пространстве переменных x . Тогда, если существует $n - q + 1$ асимптотически устойчивых переменных $y_1, y_2, \dots, y_{n-q+1}$, при некотором δ размерность множества $X^{**}(B_{y,\delta})$ в пространстве координат y не может превышать $q - 1$. Но $X^{**}(B_{y,\delta})$ содержит в себе в качестве подмножества $g(B_{\beta^{-1}(\delta)})$. Следовательно, как множество $g(B_{\beta^{-1}(\delta)})$, так и его прообраз $B_{\beta^{-1}(\delta)}$ не могут иметь размерность выше $q - 1$. Это будет справедливо и для всех значений $\delta' < \delta$. Тогда, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем, что и предельное значение размерности обобщенных предельных множеств не должно превышать $q - 1$. Полученное противоречие доказывает, что максимально возможное количество асимптотически устойчивых переменных при невырожденной непрерывной замене не превосходит $n - q$.

Утверждение теоремы для количества устойчивых переменных доказывается аналогично. $\square$

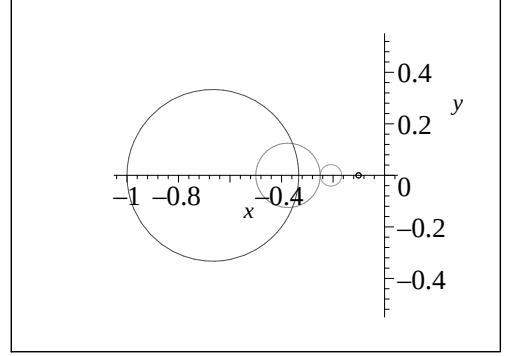
Замечание 1. Для конструктивного нахождения замены переменных, обеспечивающей максимальное количество устойчивых и асимптотически устойчивых переменных, необходимо найти такую окрестность B_δ , что размерность обобщенного предельного множества для любой окрестности B'_δ меньшего радиуса будет такой же, как у $X^{**}(B_\delta)$. Учитывая вложенность окрестностей и соответствующих им обобщенных предельных множеств, а также то, что размерность гладкого многообразия является целым числом, такое δ гарантированно существует. Обозначим $q = \dim X^{**}(B_\delta)$. Далее следует параметризовать обобщенные предельные множества $X^{**}(B_\delta)$, подобрав обратимые преобразования $y^{(\delta)}(x)$ таким образом, чтобы первые $n - q$ координат тождественно обращались в 0 на $X^{**}(B_\delta)$. Тогда, воспользовавшись предельным переходом, можно получить замену $g(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} y^{(\delta)}(x)$, в которой первые $n - q$ координат будут асимптотически устойчивыми. Для того, чтобы получить неасимптотически устойчивые переменные, необходимо будет рассмотреть множество $\lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta)$. Пусть его размерность равна p . Поскольку это множество является подмножеством любого из обобщенных предельных множеств $X^{**}(B'_\delta)$, на нем полученные ранее $n - q$ асимптотически устойчивых переменных будут тождественно обращаться в 0. Тогда останется выбрать $q - p$ функционально независимых переменных, обнуляющихся на множестве $\lim_{\delta \rightarrow 0} X^{**}(B_\delta)$, но отличных от нуля на каждом из множеств $X^{**}(B'_\delta)$. Эти переменные и будут представлять неасимптотически устойчивые координаты.

5. Анализ примера Арцтейна с помощью предельных множеств.
Рассмотрим следующую систему управления [9]:

$$\dot{x}_1 = u(x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = 2ux_1x_2. \quad (2)$$



а)



б)

Обобщенные предельные множества для системы (2).

Известно, что при выборе управления $u = 1$ почти любое решение системы (кроме решений, стартующих из точек на положительной полуоси оси Ox_1) асимптотически стремится к нулевому положению равновесия, однако при этом нулевое решение не является устойчивым.

Рассмотрим образ окрестности начала координат при действии оператора потока системы (1). Возьмем точку $(x, y) \in B_\delta$, которая в полярных координатах задается радиусом r и углом φ . Тогда через интервал времени t траектория, стартующая из этой точки, достигнет положения

$$x(t) = r \frac{\cos \varphi - rt}{1 - 2rt \cos \varphi + r^2 t^2}, \quad y(t) = r \frac{\sin \varphi}{1 - 2rt \cos \varphi + r^2 t^2}. \quad (3)$$

В фиксированный момент времени t эти уравнения определяют отображение множества $0 \leq r \leq \delta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в следующие множества:

1. При $t < \delta^{-1}$ – это внутренность круга с центром в точке $\left(\frac{\delta t}{1 - \delta^2 t^2}, 0\right)$ радиуса $\frac{1}{1 - \delta^2 t^2}$ (см. рис. а)).
2. При $t = \delta^{-1}$ – это полуплоскость правее прямой $x_1 = -\delta/2$.
3. При $t > \delta^{-1}$ – это множество плоскости, лежащее вне круга с центром в точке $\left(-\frac{\delta t}{\delta^2 t^2 - 1}, 0\right)$ радиуса $\frac{1}{\delta^2 t^2 - 1}$ с выколотой отрицательной полуосью Ox_1 (см. рис. б)).

Таким образом, при росте t от 0 до δ^{-1} круг, определяющий окрестность начала координат, начинает смещаться вправо с увеличением радиуса. При $t = \delta^{-1}$ центр этого круга уходит на бесконечность в положительном направлении оси Ox_1 , но при этом и радиус становится бесконечным, в результате чего круг превращается в полуплоскость. При переходе через значение $t = \delta^{-1}$ прямая, ограничивающая эту полуплоскость, искривляется в обратную сторону и замыкается в точке, лежащей на отрицательной полуоси Ox_1 , превращаясь в окружность, но внутренние точки окрестности перейдут в область, лежащую с внешней стороны от получившегося круга. При стремлении же t к бесконечности мы получаем всю плоскость целиком как обобщенное предельное множество. Ее размерность равна двум, а, значит, нулевое решение действительно является неустойчивым. При этом, согласно теореме 1, ни в каких координатах, получающихся из (x_1, x_2) непрерывной обратимой заменой, не существует переменных, по которым начало координат было бы устойчивым.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Рассуждение А. Ляпунова. – Харьков: Типография Зильберберга, 1892. – 251 с.
2. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. – XVII, вып. 2. – 1893. – С. 253–333.
3. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. – № 4. – С. 9–16.
4. *Ковалев А.М.* Динамика автономных систем при наличии неустойчивых переменных // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 3–13.
5. *Ковалев А.М.* Координатная устойчивость динамических систем // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 3–10.
6. *Ковалев А.М.* Применение метода инвариантных соотношений к решению задач устойчивости автономных и неавтономных систем // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 3–13.
7. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Классификация и выделение переменных по свойству устойчивости в неавтономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 9–15.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1947. – 448 с.
9. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1983. – 7, 11. – P. 1163–1173.

A.M. Kovalev, V.N. Nesporny

Conditions for an existence of asymptotically stable coordinates in autonomous dynamical systems

The main problems of the coordinate approach for systems of ordinary differential equations with time-independent right-hand sides are considered. The concept of a general limit set for a neighborhood of the equilibrium state is introduced, and the dependence between the dimension of this set and the maximum possible number of stable and asymptotic stable coordinates for a given system is shown. Obtained results are demonstrated for the “Artstein circle” system.

Keywords: *autonomous system, Lyapunov stability, coordinate approach, generalized limit set.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
kovalev@iamm.su, vetal_n@mail.ru

Получено 21.09.20