

УДК 517.5

©2011. Н.П. Волчкова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Изучаются асимптотические свойства функций Лежандра $P_\lambda^\mu(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для $t \in (1; +\infty)$.

Ключевые слова: функции Лежандра, функции Феррерса, асимптотический ряд.

Асимптотические свойства различных специальных функций играют важную роль в анализе и приложениях. В настоящее время развиты некоторые общие методы, позволяющие существенно продвинуться в этом направлении (см., например, [1]). Вместе с тем, остается еще много вопросов, требующих выяснения. В частности, в некоторых задачах интегральной геометрии важное значение имеет нахождение асимптотических рядов типа Бесселя для функций Лежандра P_μ^ν , когда $t \in (-1; 1)$ или $t \in (1; +\infty)$ (см. [2, часть 2]). В работе [3] построен такой асимптотический ряд для функций Лежандра на $(-1; 1)$. Цель данной работы – изучение случая $t \in (1; +\infty)$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in (0, \pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{cth} r}{k+1}, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно, } k \neq 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$A_0 = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}},$$

$$A_p = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^p \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} + \mu\right)_m}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} d_{k_1}(r) \dots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ – символ Похгаммера. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. Пусть $\varepsilon \in (0, \pi)$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение

$$P_{i\lambda-\frac{1}{2}}^\mu(\operatorname{ch} r) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)(\operatorname{sh} r)^{-\mu}} \times$$

$$\left(\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu-\mu+\frac{1}{2})}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} + \right. \quad (2)$$

$$\left. \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu-\mu+\frac{3}{2})}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}} \right).$$

Частные случаи теоремы 1 были известны ранее. Например, в [2, часть 2, формула (2.14)] было выписано два члена асимптотического разложения (2). Этот результат затем использовался для изучения некоторых вопросов интегральной геометрии на гиперболическом пространстве. Относительно других частных случаев теоремы 1 и близких вопросов см. [4, часть 2], [5, глава 6, § 3].

Доказательство теоремы 1.

Пусть сначала $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$. Тогда по формуле Мелера-Дирихле (см. [6, 3.7 (27)])

$$P_{i\lambda-\frac{1}{2}}^{\mu}(\operatorname{ch} r) = \frac{(\operatorname{sh} r)^{\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \int_{-r}^r e^{i\lambda t} (\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} t)^{-\mu-\frac{1}{2}} dt. \quad (3)$$

Обозначим

$$I(\lambda) = \int_{-r}^r e^{i\lambda t} (\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} t)^{-\mu-\frac{1}{2}} dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [1, глава 2, § 10, пункт 10.3, теорема 10.2]) имеем

$$I(\lambda) \sim e^{i(\pi(\frac{1}{2}-\mu)-\lambda r)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{p!} \frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}} +$$

$$e^{i\lambda r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{p!} \frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}},$$

где

$$A_p = \frac{d^p}{dt^p} \left(\left(\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} \right)^{-\mu-\frac{1}{2}} \right) \Big|_{t=0}, \quad p \geq 0.$$

Отсюда

$$I(\lambda) \sim 2 \cos \left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu) \right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu-\mu+\frac{1}{2})}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} +$$

$$2 \sin \left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu) \right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu-\mu+\frac{3}{2})}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Вычислим A_p . По формуле Тейлора

$$\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} = \frac{\operatorname{ch} r(1 - \operatorname{ch} t) + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} r}{t} =$$

$$\frac{1}{t} \left(-\operatorname{ch} r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \operatorname{sh} r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} b_k(r), \quad (5)$$

где

$$b_k(r) = \begin{cases} -\operatorname{ch} r, & k - \text{нечетно}, \\ \operatorname{sh} r, & k - \text{четно}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Перепишем (5) в виде

$$\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} = \operatorname{sh} r \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} c_k(r) \right) = \operatorname{sh} r (1 + \tau(t)), \quad (6)$$

где

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!(k+1)} c_k(r), \quad c_k(r) = \begin{cases} -\operatorname{cth} r, & k - \text{нечетно}, \\ 1, & k - \text{четно}, \quad k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots$

Положим $F(x) = (1+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Тогда (см. (6))

$$A_p = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \left. \frac{d^p}{dt^p} \left((1+\tau(t))^{-\mu-\frac{1}{2}} \right) \right|_{t=0} = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \left. \frac{d^p}{dt^p} (F(\tau(t))) \right|_{t=0}.$$

Используем формулу

$$(F(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^p \frac{F^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0$$

(см. [7, доказательство теоремы 2.11]). Поскольку $\tau(0) = 0$,

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^p \frac{F^{(m)}(0)}{m!} (\tau^m)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \quad (7)$$

Положив в формуле

$$(f_1 \dots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} f_1^{(k_1)} \dots f_m^{(k_m)}$$

$f_1 = \dots = f_m = \tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)} \dots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^p \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Таким образом,

$$A_p = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^p \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Учитывая, что

$$F^{(m)}(0) = (-1)^m \left(\frac{1}{2} + \mu \right)_m$$

и

$$\tau^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1} c_k(r) = d_k(r)$$

(см. (1)), из (3) и (4) получаем (2) для $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$. Общий случай следует отсюда стандартным методом продолжения по параметру (см. [6, 2.8 (30)] и [1, глава 2, § 10, пункт 10.3, доказательство формулы (10.61)]). Таким образом, теорема 1 доказана. $\square$

1. Рукстынъш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. – Рига: Зинатне, 1974. – 272 с.
2. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
3. Волчкова Н.П. Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Феррерса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 34-38.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
5. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций – М: ИЛ, 1952. – 476 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
7. Nessel R.J., Wickeren E. Local Multiplier Criteria in Banach Spaces // Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – V. 2. – Fasc. 2-3. – P. 114-132.

N.P. Volchkova

On asymptotic properties of the Legendre functions.

Asymptotic properties the Legendre functions $P_\lambda^\mu(t)$ as $\lambda \rightarrow \infty$ are studied. An analog of the Bessel asymptotic expansion for $t \in (1; +\infty)$ is obtained.

Keywords: the Legendre functions, the Ferrers functions, asymptotic expansion.

Н.П. Волчкова

Про асимптотичні властивості функцій Лежандра.

Вивчаються асимптотичні властивості функцій Лежандра $P_\lambda^\mu(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Одержано аналог асимптотичного ряду Бесселя для $t \in (1; +\infty)$.

Ключові слова: функції Лежандра, функції Феррерса, асимптотичний ряд.

Донецкий национальный технический ун-т
valeriyvolchkov@gmail.com

Получено 10.05.11