УДК 517.947.5.37

В. И. Горбачук

ТЕОРЕМЫ ТИПА ВИНЕРА — ПЭЛИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Для некоторых классов бесконечно дифференцируемых векторов нормального оператора в гильбертовом пространстве доказываются теоремы типа Винера — Пэли и указывается, где применяются такие теоремы.

Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, а $C^\infty(A)$ — множество его бесконечно дифференцируемых векторов: $C^\infty(A)=\bigcap\limits_n \mathcal{D}(A^n)$, $\mathcal{D}(\cdot)$ — область определения оператора.

1. Для положительной неубывающей последовательности чисел $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ обозначим

$$\begin{matrix} C_{\{m_n\}}(A) \\ C_{(m_n)}(A) \end{matrix} = \left\{ f\in C^\infty(A) \,\middle|\, \begin{matrix} \exists\alpha>0, & \exists c>0: \\ \forall\alpha>0 & \exists c=c(\alpha)>0: \end{matrix} \; \|A^n f\|\leqslant c\alpha^n m_n, \right. \quad n=0,1,\dots . \tag{1}$$

Ясно, что
$$C_{\{m_n\}}(A)=\bigcup_\alpha C_\alpha\langle m_n\rangle(A),\quad C_{(m_n)}(A)=\bigcap_\alpha C_\alpha\langle m_n\rangle(A),$$

где $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$ — банахово пространство векторов из $C^\infty(A)$, для которых оценка (1) выполнена при фиксированном α, с нормой

$$\|f\|_{C_\alpha\langle m_n\rangle(A)}=\sup_n\frac{\|A^n f\|}{\alpha^n m_n}.$$

Векторы из $C_{\{n^n\}}(A)$ и $C_{(n^n)}(A)$ называются аналитическими [1] и соответственно целыми [2] для оператора A, $C_{\{n^{n\beta}\}}(A)$ и $C_{(n^{n\beta})}(A)$ $(\beta>1)$ — это классы ультрадифференцируемых векторов (классы Жевре) оператора A типа Румье и Берлинга [3], $C_{\{1\}}(A)$ $(m_n\equiv 1)$ множество целых векторов экспоненциального типа [4]. В частности, если $\mathfrak{H}=L_2(a,b)$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$, $A=\frac{d}{dx}$, $\mathcal{D}(A)$ — совокупность абсолютно непрерывных на (a,b) функций $f(x)$, для которых $f'(x)\in L_2(a,b)$, то $C^\infty\left(\frac{d}{dx}\right)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых на (a,b) функций, для которых $f^{(n)}(x)\in L_2(a,b)$ $(n\in N)$, $C_{\{n^n\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $C_{(n^n)}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $C_{\{1\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ — аналитические на (a,b), целые и соответственно целые функции экспоненциального типа, суммируемые с квадратом на (a,b), $C_{\{n^{n\beta}\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ и $C_{(n^{n\beta})}\left(\frac{d}{dx}\right)$ $(\beta>1)$ — известные классы Жевре (ультрадифференцируемые на (a,b) функции) (см., напр., [5]).

Предположим теперь, что A — нормальный оператор. Поскольку $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)=C_\alpha\langle m_n\rangle(|A|)$, где $|A|=\sqrt{A^*A}$, то для изучения множеств $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$ достаточно предположить, что A — положительный и самосопряженный. В этом случае $C_{\{1\}}(A)=\{E_\Delta h, \forall h\in\mathfrak{H}, \Delta$ — произвольный конечный интервал из $[0,\infty)\}$. В самом деле, если $f=E_\Delta h$, где $\Delta\subset[0,\alpha]$, то $\|A^n f\|^2=\int\limits_0^\alpha\lambda^{2n}d(E_\lambda f,f)\leqslant\alpha^{2n}\|f\|^2$, т. е. $f\in C_\alpha\langle 1\rangle(A)\subset C_{\{1\}}(A)$. Наоборот, если $f\in C_\alpha\langle 1\rangle(A)$ при каком-либо $\alpha>0$, то выполняется оценка $\|A^n f\|\leqslant c\alpha^n$, $\forall n\in N$, т. е. $\int\limits_0^\infty(\alpha^{-1}\lambda)^{2n}d(E_\lambda f,f)\leqslant c$. По теореме Фату $d(E_\lambda f,f)=0$ при $\lambda>\alpha$. Таким образом, $f=E_\Delta h$, где $\Delta\subset[0,\alpha]$.

От последовательности $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ потребуем, чтобы

$$\forall\alpha>0\ \exists c=c(\alpha)>0: m_n>c\alpha^n. \tag{2}$$

Из этого свойства вытекает, что $C_{\{1\}}(A)\subset C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$, $\forall\alpha>0$. Учитывая также, что при $\alpha>\beta>0$ выполняется неравенство $\|f\|_{C_\alpha\langle m_n\rangle(A)}\leqslant\|f\|_{C_\beta\langle m_n\rangle(A)}$ $(f\in C_\beta\langle m_n\rangle(A))$ и нормы $\|\cdot\|_{C_\alpha\langle m_n\rangle(A)}$ и $\|\cdot\|_{C_\beta\langle m_n\rangle(A)}$ согласованы, т. е. если последовательность f_n сходится к нулю в одной из норм и фундаментальна в другой, то f_n сходится к нулю в обеих нормах, заключаем, что $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$ плотно и непрерывно вложены в $\mathfrak{H}$ и друг в друга при возрастании индекса α. Снабдим $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$ топологиями индуктивного и проективного пределов банаховых пространств $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$:

$$C_{\{m_n\}}(A)=\varinjlim_{\alpha\to+\infty}\operatorname{ind} C_\alpha\langle m_n\rangle(A),\quad C_{(m_n)}(A)=\varprojlim_{\alpha\to+0}\operatorname{pr} C_\alpha\langle m_n\rangle(A).$$

С последовательностью $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ свяжем функции $(\lambda>0)$

$$\rho(\lambda)=m_0\sup_n\frac{\lambda^n}{m_n},\ \tilde\rho(\lambda)=m_0\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^{2n}}{m_n^2}\right)^{1/2},\ \tilde{\tilde\rho}(\lambda)=m_0\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{m_n}. \tag{3}$$

В силу неравенства (2) при $\alpha>\lambda$ ряды сходятся при каждом $\lambda>0$. На основании этой же оценки между функциями $\rho(\lambda)$, $\tilde\rho(\lambda)$ и $\tilde{\tilde\rho}(\lambda)$ имеются соотношения

$$\begin{gathered}\rho(\lambda)\leqslant\tilde\rho(\lambda)\leqslant\tilde{\tilde\rho}(\lambda)\leqslant c(\beta)\rho(\beta\lambda)\leqslant c(\beta,\beta_1)\rho(\beta_1\lambda),\\ \forall\beta>1,\quad\forall\beta_1>\beta,\quad c(\beta)=\sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2-1}},\quad c(\beta,\beta_1)=c(\beta)\sqrt{\frac{\beta_1^2}{\beta_1^2-\beta^2}}.\end{gathered}\tag{4}$$

Все три функции обладают свойствами

$$\rho(\lambda)\geqslant1;\quad\rho(\lambda)\uparrow+\infty,\ \lambda\to+\infty. \tag{5}$$

По функции $\rho(\lambda)$ построим семейство гильбертовых пространств $(\alpha>0)$

$$\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)=\mathscr{D}(\rho(\alpha A)),\ (f,g)_{\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)}=(\rho(\alpha A)f,\rho(\alpha A)g).$$

Ясно, что при $\alpha<\beta$ $\|f\|_{\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{H}_\beta\langle\rho\rangle(A)}$ $(f\in\mathfrak{H}_\beta\langle\rho\rangle(A))$ и нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_\beta\langle\rho\rangle(A)}$ согласованы. Из согласованности норм и неравенства между ними следует непрерывное вложение $\mathfrak{H}_\beta\langle\rho\rangle(A)\subseteq\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)$, плотное в силу $\overline{C_{\{1\}}(A)}=\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A)$. Положим

$$\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A)=\varinjlim_{\alpha\to+0}\operatorname{ind}\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A),\quad\mathfrak{H}_{(\rho)}(A)=\varprojlim_{\alpha\to+\infty}\operatorname{pr}\mathfrak{H}_\alpha\langle\rho\rangle(A).$$

На основании (4) $\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{\tilde\rho\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{\tilde{\tilde\rho}\}}(A)$; аналогично $\mathfrak{H}_{(\rho)}(A)=\mathfrak{H}_{(\tilde\rho)}(A)=\mathfrak{H}_{(\tilde{\tilde\rho})}(A)$.

Теорема 1. Пусть неубывающая последовательность положительных чисел $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условию (2). Тогда имеют место топологические равенства

$$C_{\{m_n\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A),\quad C_{(m_n)}(A)=\mathfrak{H}_{(\rho)}(A).$$

Доказательство. Для $\forall\alpha>0$, $\forall\beta>1$ имеем

$$\|f\|^2_{\mathfrak{H}_\alpha(\rho)(A)}=\int_0^\infty\rho^2(\alpha\lambda)\,d(E_\lambda f,f)\leqslant\int_0^\infty\tilde\rho^2(\alpha\lambda)\,d(E_\lambda f,f)=$$

$$=m_0^2\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha\lambda)^{2n}}{m_n^2}\,d(E_\lambda f,f)=m_0^2\sum_{n=0}^\infty\beta^{-2n}\frac{\int_0^\infty\lambda^{2n}d(E_\lambda f,f)}{(\alpha^{-1}\beta^{-1})^{2n}m_n^2}\leqslant$$

$$\leqslant m_0^2c^2(\beta)\left(\sup_n\frac{\|A^nf\|}{(\alpha^{-1}\beta^{-1})^nm_n^2}\right)^2=m_0^2c^2(\beta)\|f\|^2_{C_{\alpha^{-1}\beta^{-1}}\langle m_n\rangle(A)}.$$

Наоборот,

$$\|f\|^2_{C_\alpha(m_n)(A)} = \sup_n \frac{\|A^n f\|^2}{\alpha^{2n} m_n} = \sup_n \int_0^\infty \frac{\lambda^{2n}}{\alpha^{2n} m_n^2}\, d(E_\lambda f, f) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_0^2} \int_0^\infty m_0^2 \sup_n \frac{(\alpha^{-1}\lambda)^{2n}}{m_n^2}\, d(E_\lambda f, f) = \frac{1}{m_0^2} \int_0^\infty \rho^2(\alpha^{-1}\lambda)\, d(E_\lambda f, f) =$$

$$= \frac{1}{m_0^2} \|f\|^2_{\mathfrak{H}_{\alpha^{-1}(\rho)(A)}}.$$

Эти оценки доказывают теорему.

2. Пусть теперь $G(\lambda)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая (5). С помощью ее, как это делалось выше для $\rho(\lambda)$, построим пространства

$$\mathfrak{H}_\alpha \langle G \rangle (A) = \mathcal{D}(G(\alpha A)), \quad \alpha > 0,$$

$$\mathfrak{H}_{\{G\}}(A) = \lim_{\alpha \to +0} \operatorname{ind} \mathfrak{H}_\alpha \langle G \rangle (A), \quad \mathfrak{H}_{(G)}(A) = \lim_{\alpha \to +\infty} \operatorname{pr} \mathfrak{H}_\alpha \langle G \rangle (A).$$

Обозначим

$$M_n = \sup_{\lambda \geqslant 1} \frac{\lambda^n}{G(\lambda)} \quad (n = 0, 1, \ldots); \quad R(\lambda) = M_0 \sup_n \frac{\lambda^n}{M_n},$$

$$\tilde{R}(\lambda) = M_0 \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{2n}}{M_n^2} \right)^{1/2}.$$

Последовательность $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ положительна, монотонно возрастает и обладает свойством (2). В предположении, что $G(\lambda)$ непрерывно дифференцируема и

$$\lambda G'(\lambda)/G(\lambda) \uparrow +\infty, \quad \lambda \to +\infty, \tag{6}$$

функции $G(\lambda)$ и $R(\lambda)$ связаны неравенствами

$$\frac{1}{M_0} R(\lambda) \leqslant G(\lambda) \leqslant \frac{1}{M_0} \lambda R(\lambda), \quad \lambda \geqslant 1. \tag{7}$$

Левое неравенство очевидно, так как

$$R(\lambda) = M_0 \sup_n \frac{\lambda^n}{M_n} = M_0 \sup_n \frac{\lambda^n}{\sup\limits_{\mu \geqslant 1} (\mu^n / G(\mu))} \leqslant M_0 \sup_n \frac{\lambda^n G(\lambda)}{\lambda^n} = M_0 G(\lambda).$$

Для доказательства правого неравенства в (7) рассмотрим функцию $H(r) = \sup\limits_{\lambda \geqslant 1} \frac{\lambda^r}{G(\lambda)}$ $(r \geqslant 0)$. Очевидно, $H(k) = M_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Из определения $H(r)$ вытекает, что для произвольного $\lambda \geqslant 1$ найдется такое r_λ, что $H(r_\lambda) = \lambda^{r_\lambda} G^{-1}(\lambda)$, а именно $r_\lambda = \lambda G'(\lambda)/G(\lambda)$. Тогда

$$G(\lambda) = \frac{\lambda^{r_\lambda}}{H(r_\lambda)} \leqslant \sup_r \frac{\lambda^r}{H(r)} \leqslant \sup_r \frac{\lambda^r}{\sup\limits_{\mu \geqslant 1} (\mu^r / G(\mu))} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_r \frac{\lambda^r G(\lambda)}{\lambda^r} = G(\lambda).$$

Отсюда с учетом монотонности $H(r)$ получаем ($[\cdot]$ — целая часть числа)

$$G(\lambda) = \sup_r \frac{\lambda^r}{H(r)} \leqslant \sup_r \frac{\lambda^{[r]+1}}{H([r])} = \lambda \sup_n \frac{\lambda^n}{H(n)} = \lambda \sup_n \frac{\lambda^n}{M_n} = \frac{1}{M_0} \lambda R(\lambda).$$

Теорема 2. Пусть $G(\lambda)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям (5) и (6). Предположим также, что

$$\exists c_0 > 0, \ \exists \alpha_0 \ (0 < \alpha_0 < 1) : G(\lambda) \geqslant c_0 \lambda G(\alpha_0 \lambda). \tag{8}$$

Тогда имеют место топологические равенства

$$\mathfrak{H}_{\{G\}}(A) = C_{\{M_n\}}(A), \quad \mathfrak{H}_{(G)}(A) = C_{(M_n)}(A).$$

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{H}_s \langle G \rangle (A)$, то в силу (7) и (4)

$$\|f\|^2_{\mathfrak{H}_s\langle G\rangle(A)} = \int_0^\infty G^2(s\lambda)\, d(E_\lambda f, f) = \int_0^{s^{-1}} G^2(s\lambda)\, d(E_\lambda f, f) + \int_{s^{-1}}^\infty G^2(s\lambda)\, d(E_\lambda f, f) \leqslant$$

$$\leqslant G^2(1)\|f\|^2 + \frac{1}{c_0^2} \int_{s^{-1}}^\infty \frac{G^2(\alpha_0^{-1} s\lambda)}{(\alpha_0^{-1} s\lambda)^2}\, d(E_\lambda f, f) \leqslant G^2(1)\|f\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{c_0^2 M_0^2} \int_{s^{-1}}^\infty R^2(\alpha_0^{-1} s\lambda)\, d(E_\lambda f, f) \leqslant G^2(1)\|f\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{c_0^2 M_0^2} \int_0^\infty \tilde{R}^2(\alpha_0^{-1} s\lambda)\, d(E_\lambda f, f) = G^2(1)\|f\|^2 + \frac{1}{c_0^2} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{(\alpha_0^{-1} s\lambda)^n}{M_n}\right)^2 d(E_\lambda f, f) \leqslant$$

$$\leqslant G^2(1)\|f\|^2 + \frac{1}{c_0^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{\|A^n f\|^2 \beta^{2n}}{M_n^2 (\alpha_0 s^{-1} \beta)^{2n}} \leqslant \left(G^2(1) + \frac{1}{c_0^2(-\beta^2)}\right) \|f\|^2_{C_t\langle M_n\rangle(A)},$$

где $t = \alpha_0 s^{-1} \beta, \quad \forall \beta < 1$.

Наоборот, из принадлежности f к $C_\alpha \langle M_n \rangle (A)$ $(\forall \alpha > 0)$ вытекает, что

$$\|f\|^2_{C_\alpha\langle M_n\rangle(A)} = \sup_n \frac{\|A^n f\|^2}{\alpha^{2n} M_n^2} = \sup_n \frac{\int_0^\infty \lambda^{2n} d(E_\lambda f, f)}{\alpha^{2n} M_n^2} =$$

$$= \sup_n \frac{\int_0^\alpha \lambda^{2n} d(E_\lambda f, f) + \int_\alpha^\infty \lambda^{2n} d(E_\lambda f, f)}{\alpha^{2n} M_n^2} \leqslant \frac{1}{M_0^2}\|f\|^2 +$$

$$+ \sup_n \frac{1}{M_n^2} \int_\alpha^\infty \frac{(\alpha^{-1}\lambda)^{2n} G^2(\alpha^{-1}\lambda)}{G^2(\alpha^{-1}\lambda)}\, d(E_\lambda f, f) = \frac{1}{M_0^2}\|f\|^2 +$$

$$+ \sup_n \frac{1}{M_n^2} \sup_{t \geqslant 1} \frac{t^{2n}}{G^2(t)} \|f\|^2_{\mathfrak{H}_{\alpha^{-1}}} \langle G \rangle (A) \leqslant \left(\frac{1}{M_0^2} + 1\right) \|f\|^2_{\mathfrak{H}_{\alpha^{-1}}} \langle G \rangle (A).$$

Приведенные оценки доказывают теорему.

Заметим, что последовательность $\{M_n\}_{n=0}^\infty$, построенная по функции $G(\lambda)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, обладает так называемым свойством стабильности относительно дифференцирования

$$\exists c > 0, \ \exists h > 1 : M_{n+1} \leqslant c h^n M_n, \ c = \text{const}, \tag{9}$$

(здесь $h = \alpha_0^{-1}$).

3. Предположим, что положительная неубывающая последовательность $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условиям (2) и (9), и покажем, что построенная по

этой последовательности функция $\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)=m_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{m_n}$ удовлетворяет свойствам (5), (6), (8), которым удовлетворяла функция $G(\lambda)$ теоремы 2. В самом деле

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)=m_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{m_n}\geqslant m_0\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{m_n}\geqslant m_0\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{ch^{n-1}m_{n-1}}=$$

$$=m_0c^{-1}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda h^{-1})^{n-1}}{m_{n-1}}=c_0\lambda\tilde{\tilde{\rho}}(\alpha_0\lambda),$$

где $c_0=m_0c^{-1}$; $\alpha_0=h^{-1}$. Функция $\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)$ целая и, так как при $\lambda>0$ в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left(\frac{\lambda\tilde{\tilde{\rho}}'(\lambda)}{\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\lambda^{n-1}}{m_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{m_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n}{m_n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^{n-1}}{m_n}\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{m_n}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{m_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\lambda^{n-1}}{m_n}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{m_n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\lambda^{n-1}}{m_n}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^{n-1}}{m_n}\right)^2\right)\lambda\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{m_n}\right)^2>0,$$

$\dfrac{\lambda\tilde{\tilde{\rho}}'(\lambda)}{\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)}\uparrow+\infty$, $\lambda\to+\infty$. Остальное очевидно. Таким образом, на основании теорем 1 и 2 приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Если неубывающая последовательность чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ $m_0>0$, удовлетворяет (2) и (9), $\rho(\lambda)=m_0\sup\limits_n\frac{\lambda^n}{m_n}$ — соответствующая ей согласно (3) функция, $m_n'=\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^n}{\rho(\lambda)}$, то

$$C_{\{m_n\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A)=C_{\{m_n'\}}(A);$$

$$C_{(m_n)}(A)=\mathfrak{H}_{(\rho)}(A)=C_{(m_n')}(A).$$

Наоборот, если задана непрерывно дифференцируемая на $[0,\infty)$ функция $G(\lambda)$ со свойствами (5), (6), (8) и $M_n=\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^n}{G(\lambda)}$, $G^1(\lambda)=\sup\limits_n\frac{\lambda^n}{M_n}$, то

$$\mathfrak{H}_{\{G\}}(A)=C_{\{M_n\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{G^1\}}(A),$$

$$\mathfrak{H}_{(G)}(A)=C_{(M_n)}(A)=\mathfrak{H}_{(G^1)}(A).$$

Замечание 1. Как показано в [6], необходимым и достаточным условием совпадения последовательностей $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{m_n'\}_{n=0}^{\infty}$ является логарифмическая выпуклость $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, т. е.

$$m_n^2\leqslant m_{n+1}m_{n-1}, n\in N.$$

Замечание 2. Если $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет противоположному (2) условию, т. е. существует такое $\alpha\geqslant 1$, что $m_n<c\alpha^n$, то соответствующая этой последовательности согласно (3) функция $\tilde{\rho}(\lambda)$ аналитическая на $(0,r)$, $r\leqslant\alpha$, и при $\lambda\geqslant r$ обращается в бесконечность. В этом случае $\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A)=\mathfrak{H}_{\{\tilde{\rho}\}}(A)=C_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{H}_{(\rho)}(A)=\operatorname{Ker}A$. С другой стороны, как нетрудно видеть, $C_{\{m_n\}}(A)=C_{\{1\}}(A)$, $C_{(m_n)}(A)=\operatorname{Ker}A$. Отсюда вытекает

справедливость теоремы 1 и при условии на $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, противоположном (2).

Выше также требовалось, чтобы m_n принимали конечные значения. Если же $m_N = +\infty$ при некотором N, а значит, при любом $n \geqslant N$, то $\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda)$ совпадает с многочленом степени $N-1$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\mathfrak{H}_{\{\rho\}}(A) = \mathfrak{H}_{(\rho)}(A) = C_{\{m_n\}}(A) = C_{(m_n)}(A) = \mathcal{D}(A^{N-1}),$$

так что теорема 1 верна и в этом случае.

Доказанные теоремы можно рассматривать как некоторое обобщение теорем Винера — Пэли, относящихся к тому случаю, когда A — оператор дифференцирования в функциональных пространствах. Так, например, если $\mathfrak{H} = L_2(R^1)$, A — модуль оператора дифференцирования: $A = \sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}$, то принадлежность $f \in \mathfrak{H}_\alpha \langle\rho\rangle(A)$ в переходе на спектральный язык равносильна сходимости интеграла $\int_0^\infty |\tilde{f}(\lambda)|^2 \rho^2(\alpha\lambda)\, d\lambda$, т. е. определенному ограничению на убывание преобразования Фурье от f на $+\infty$. Принадлежность же $f(x)$ к $C_t\langle m_n\rangle\left(\left|\frac{d}{dx}\right|\right)$ налагает ограничения на рост производных. Доказанные теоремы, как видим, связывают убывание преобразования Фурье функции $f(x)$ на $+\infty$ с ее аналитическими свойствами.

Пример. Функция $G(\lambda) = e^{\lambda^{1/\beta}}$ удовлетворяет, очевидно, условиям (5), (6), (8). Связанная с ней последовательность $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид $M_n = (e^{-1}\beta)^{\beta n} n^{n\beta}$, $G^1(\lambda) = e^{-1} e^{\lambda^{1/\beta}}$. Согласно доказанному

$$\mathfrak{H}_{\{e^{\lambda^{1/\beta}}\}}(A) = C_{\{n^{n\beta}\}}(A), \quad \mathfrak{H}_{(e^{\lambda^{1/\beta}})}(A) = C_{(n^{n\beta})}(A).$$

Доказанные теоремы находят различные применения при исследовании свойств решений дифференциально-операторных уравнений. Их частные случаи были использованы при получении представления решений и исследовании их граничных значений для уравнения вида $y'(t) = Ay(t)$, где A — самосопряженный знакоопределенный оператор, и некоторых других уравнений более высокого порядка в гильбертовом пространстве (см. [3, 7]).

1. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math.— 1959.— **70**, N 3.— P. 572—615.
2. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— **143**.— P. 55—76.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
4. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 9.— С. 1559—1569.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй спец. курс.— М. : Наука, 1965.— 327 с.
6. *Komatsu H.* Ultradistributions, I // J. facul. Sci. Univ. Tokyo.— 1973.— **20**, № 1.— P. 25—105.
7. *Горбачук М. Л., Пивторак Н. И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 8.— С. 1317—1324.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.09.87