

Том 32
Донецк, 2018

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>О.В. Александрова</i> Симметрии нелинейного стохастического дифференциального уравнения Ито	3
<i>А.Б. Бирюков, А.А. Иванова</i> Основы построения и использования систем диагностики на базе анализа моментальных тепловых балансов	13
<i>А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный</i> Особенности построения дополнительных функций для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	23
<i>Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц, Г.В. Мозалевская</i> Существование конструкций гироскопа в кардановом подвесе, реализующих случай постоянства приведенной потенциальной энергии	29
<i>Г.А. Котов</i> Об условиях существования прецессий твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил	41
<i>А.Н. Курганский, И. Потапов</i> Графы де Брёйна и степени числа $3/2$	51
<i>Д.А. Зарайский</i> Об определении свёртки распределений без условия на носители	72
<i>А.С. Миненко</i> О вариационном методе исследования конвективной задачи Стефана	77
<i>А.Л. Павлов</i> Описание нулевых решений общей краевой задачи в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	89
<i>Д.А. Сапронов</i> О разрешимости задачи Коши для многомерных вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции с неограниченной энергией	99
<i>О.Н. Швидкий</i> Явная оценка в пространствах Гельдера для решения уравнения с дробным оператором Лапласа	118

УДК 519.21

©2018. О. В. Александрова

СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИТО

В статье определена группа инвариантности для нелинейного стохастического дифференциального уравнения Ито, имеющего прикладное значение. Решение анализируемого уравнения описывает процесс горения в случайной среде. Выписано уравнение Фоккера–Планка для рассмотренного уравнения. Проанализирована взаимосвязь групп инвариантности, которые допускаются уравнением Ито и соответствующим ему уравнением Фоккера–Планка. Для уравнения Фоккера–Планка построены инвариантные решения.

Ключевые слова: симметрия, уравнение Фоккера–Планка, допустимый оператор, инвариантные решения.

Введение. С. Ли первым применил методы группового анализа к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и построению их точных решений. Его теория получила дальнейшее распространение в работах таких известных математиков, как Г. Биргкоф [1], П. Олвер [2]. Л.В. Овсянников разработал теорию построения инвариантных и частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений [3, 4]. Первые приложения теории Ли–Овсянникова к квантовой теории поля принадлежат Н.Н. Боголюбову и Д.В. Ширкову, см., например, обзор [5]. Теория групп Ли продолжает свое развитие в работах Н.Х. Ибрагимова [6, 7], А.Г. Никитина [8, 9], Р.З. Жданова [10]. Одной из фундаментальных монографий в области группового анализа является книга П. Олвера [2]. В этой книге за основу принят геометрический подход к изучению детерминированных дифференциальных уравнений. В рамках такого подхода система дифференциальных уравнений n -порядка рассматривается как подмногообразие в пространстве n -струй, а решение системы – это такая функция, n -ное продолжение которой содержится в данном подмногообразии [2], с. 138–139. Такой подход позволяет: во-первых, использовать при изучении дифференциальных уравнений мощный аппарат дифференциальной геометрии; во-вторых, давать наглядное геометрическое толкование полученным результатам. В книге [2] также изложены многочисленные приложения симметричного анализа к решению ряда задач теории дифференциальных уравнений и механики. Теория СДУ (стохастических дифференциальных уравнений) Ито является одним из основных направлений научных исследований в современной теории случайных процессов. Это обусловлено тем, что стохастические дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в прикладных науках: популяционной генетике [11], теории информации [12], финансовой математике [13]. Во введении к статье [14] описана история обобщения теории Ли на СДУ Ито. Рассмотрим более подробно, как преобразуется винеровский процесс при замене времени.

Итак, рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито в R^n :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(h, u(h)) dh + \int_0^t B(h, u(h)) dW(h). \quad (1)$$

Здесь $W(t)$ – d -мерный винеровский процесс относительно фильтрации $F_t, t \in [0, T]$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t))$, $W_i(t)$ – независимые винеровские процессы, u_0 – F_0 -измеримый случайный вектор, $A : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, и $B : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n \times R^d$ измеримые неслучайные функции. Будем рассматривать обратимые преобразования переменной времени в интервале $t \in [0, T]$, зависящие от одного вещественного параметра a :

$$s = f(t, a), \quad (2)$$

где $s \in [s_0, s_T]$, $a \in \Delta \subseteq R$ – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал, $s_0 = f(0, a)$, $s_T = f(T, a)$. Пусть функция $f(t, a)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(t, 0) = t, \forall t \in [0, T]$;
- 2) $f(f(t, a), b) = f(t, a + b), \forall t \in [0, T], \forall a \in \Delta, \forall b \in \Delta, \forall (a + b) \in \Delta$; (3)
- 3) $f \in C^2([0, T] \times \Delta), f_t > 0, \forall t \in [0, T], \forall a \in \Delta$.

Из условия 2) следует, что обратное преобразование получается изменением знака параметра a , т.е. $f^{-1}(s, a) = f(f(t, a), -a) = t$. Произведём в уравнении (1) замену переменной времени по формуле $t = f(s, -a)$. Получим:

$$u(f(s, -a)) = u_0 + \int_0^{f(s, -a)} A(h, u(h)) dh + \int_0^{f(s, -a)} B(h, u(h)) dW(h). \quad (4)$$

Рассмотрим первый интеграл в формуле (4) и сделаем в нем замену переменной, чтобы пределы интегрирования менялись в интервале (s_0, s) :

$$\int_0^{f(s, -a)} A(h, u(h)) dh = \int_{s_0}^s A(f(r, -a), u(f(r, -a))) f_r(r, -a) dr. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь стохастический интеграл в формуле (4):

$$J(s) = \int_0^{f(s, -a)} B(h, u(h)) dW(h). \quad (6)$$

Утверждение 1. *Процесс, определяемый формулой (6), является мартингалом относительно σ -алгебры $\tilde{F}_s = \{W(r) : r \leq f(s, -a)\}$.*

Согласно теореме (6.12), сформулированной в работе [15], с. 44, характеристикой мартингала является

$$\langle J \rangle(s) = \int_0^{f(s,-a)} B^2(h, u) d(h). \quad (7)$$

Так как интеграл (7) является обычным интегралом Римана с переменным верхним пределом, то замена переменной происходит обычным образом, так же, как и в первом интеграле, стоящем в формуле (4):

$$\langle J \rangle(s) = \int_0^{f(s,-a)} B^2(h, u) d(h) = \int_{s_0}^s B^2(f(r, -a), u(f(r, -a))f_r(r, -a)) dr.$$

Согласно теореме (4.3), (см. [15], с. 188), найдется единственный винеровский процесс $w(s)$, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и исходный винеровский процесс $W(t)$, измеримый относительно потока σ -алгебр F_s , $s \in [s_0, s_T]$, $s = f(t, a)$, такой, что

$$\int_0^{f(s,-a)} B^2(h, u) d(h) = \int_{s_0}^s B(f(r, -a), u(f(r, -a))\sqrt{f_r(r, -a)}) dw(r).$$

Обозначим $\hat{u}(s) = u(f(s, -a))$. Итак, после замены времени получим уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) &= \int_{s_0}^s A(f(r, -a), u(f(r, -a))f_r(r, -a)) dr + \\ &+ \int_{s_0}^s B(f(r, -a), u(f(r, -a))\sqrt{f_r(r, -a)}) dw(r). \end{aligned} \quad (8)$$

В полученном уравнении (8) $w(s)$ – это новый винеровский процесс, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и исходный винеровский процесс $W(t)$, входящий в уравнение (1), измеримый относительно потока σ -алгебр F_s , $s \in [s_0, s_T]$, $s = f(t, a)$, $t \in [0, T]$, $a \in \Delta$.

Докажем лемму о взаимосвязи винеровских процессов, входящих в уравнения (1) и (8).

Лемма. Пусть $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $s = f(t, a)$ – локальная однопараметрическая группа преобразований, где функция $f(t, a)$ удовлетворяет условиям (1–3) для всех допустимых s , a . Тогда $\forall a \in \Delta$ существует винеровский процесс $w(s)$, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и $W(t)$, такой, что при всех допустимых t , s с вероятностью 1 справедливы равенства:

$$W(f(s, a)) = \int_{s_0}^s \sqrt{f_h(h, -a)} dw_a(h); \quad (9)$$

$$w_a(f(t, a)) = \int_0^t \sqrt{f_h(h, -a)} dW(h). \quad (10)$$

Доказательство. Поскольку $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, то он является мартингалом с характеристикой t [15], с. 81. Пусть $s = f(t, a)$ – локальная однопараметрическая группа преобразований, $f_t(t, a) > 0, \forall t \in [0, T], a \in \Delta \subseteq R$. Так как обратное преобразование получается изменением знака параметра, то $t = f(s, -a)$. Рассмотрим процесс $W(f(s, -a))$. Этот процесс является мартингалом относительно σ -алгебры $(\hat{F}_s)_{r \leq f(s, -a)} = \{W(r), r \leq f(s, -a)\}$. Тогда, по теореме о случайной замене времени [15], с.188 (свойство мартингаловности при этом сохраняется), на том же самом вероятностном пространстве найдется винеровский процесс $w_a(s)$ такой, что $W(f(s, a)) = \int_{s_0}^s \sqrt{f_h(h, -a)} dw_a(h)$. Равенство (9) доказано. Аналогично доказывается равенство (10). Докажем теперь, что если мы применим обратное преобразование, то получим тот же самый винеровский процесс с вероятностью 1, а не какой-то третий.

$$\begin{aligned} W(t) &= W(f(s, -a)) = \int_{s_0}^s \sqrt{f_h(h, -a)} dw_a(h) = \\ &= \int_{f(0, a)}^{f(t, a)} \sqrt{f_h(h, -a)} dw_a(h) = \int_0^T d\hat{W}(r) = \hat{W}(t). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено, т.к. функция $f(t, a)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Следовательно, $P(W(t) = \hat{W}(t)) = 1. \square$

Следствие 1. Если $s_0 = f(0, a)$, то $P(w_a(s_0) = 0) = 1$.

Доказательство. Утверждение следствия следует из того, что при преобразовании времени $s = f(t, a)$ образом отрезка $[0, T]$ является отрезок $[s_0, s_T]$, где $s_0 = f(0, a)$, и из того, что $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. \square

Далее будем рассматривать преобразования фазовой переменной u :

$$v = g(t, W(t), u, a). \tag{11}$$

Здесь $a \in \Delta \subseteq R$ – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал. Функция g удовлетворяет условиям:

- 1(a) $g(t, W(t), u, a) = u$;
- 2(a) $P(g(f(t, a), w(f(t, a)), g(t, W(t), u, a), b) = g(t, W(t), u, a + b)) = 1,$
 $\forall t \in [0, T], u \in R^n, \forall a, b \in \Delta$ таких, что $(a + b) \in \Delta,$
 $W(t)$ и $w(s)$ связаны преобразованием времени по формулам (9)–(10);
- 3(a) $g \in C^2([0, T] \times R^d \times R^n \times \Delta)$;
- 4(a) матрица первых производных g_u невырожденная.

Преобразования f и g , определенные формулами (2) и (11), порождают группу G . Приведем определение допустимой группы для СДУ Ито (1) [16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (1) называется инвариантным относительно группы G (или допускает группу G), если процесс

$$v = g(f(s, -a), W(f(s, -a)), u(f(s, -a)), a)$$

является решением уравнения:

$$v(s) = g(0, 0, u_0, a) + \int_{s_0}^s A(h, v(h)) dh + \int_{s_0}^s B(h, v(h)) dw(h),$$

где $u(t)$ – решение уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение 1 нужно понимать следующим образом: под действием групповых преобразований вида (2), (11) СДУ Ито (1) преобразуется в СДУ Ито с такими же коэффициентами сноса и диффузии, но с другим винеровским процессом, который связан со старым винеровским процессом, входящим в уравнение (1) формулами (9)–(10). При этом также изменяется начальное условие.

1. Постановка задачи. В работе [16] для стохастического уравнения общего вида (1) были введены основные понятия теории группового анализа стохастических дифференциальных уравнений, как-то: инфинитезимальный оператор, инвариантность исходного СДУ относительно группы преобразований, был доказан критерий инвариантности относительно некоторой группы преобразований. Приведем его здесь:

Теорема. Уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований с касательным вектором $(\xi(s), \theta(s, w(s), v))$ тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения и координаты касательного вектора группы удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi_t \cdot B - \theta_v \cdot B + \xi \cdot B_s + \theta \cdot B_u - \theta_w = 0, \\ -\theta_t + \xi_t \cdot A - \theta_v \cdot A + \xi \cdot A_t + A_v \cdot \theta - \\ -\frac{1}{2}\theta_{vv} \cdot B^2 - \theta_{vw} \cdot B - \frac{1}{2}\theta_{ww} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Мы рассмотрим уравнение со степенными нелинейностями:

$$dv(s) = Av^{2\gamma-1}(s)ds + Bv^\gamma(s)dw(s), \quad (13)$$

где $A, B, \gamma > 1$ – постоянные.

Это уравнение имеет прикладное значение: его решение является амплитудой СДУ, которое описывает процесс горения в случайной среде [17]. Как показано в работе [18], решение СДУ (13) не обладает инвариантной мерой. В той же работе путем замены переменных, которая была получена методами группового анализа СДУ, уравнение было сведено к такому, решение которого уже обладает инвариантной мерой. Замена переменных была подобрана таким образом, чтобы привести основную группу инвариантности к группе переносов вдоль оси времени

t . Полученное уравнение называется уравнением в канонических переменных [7]. Уравнение получено следующее:

$$du(t) = \left(\frac{u}{2(\gamma - 1)} + Au^{2\gamma-1}(t) \right) dt + Bu^\gamma(t) dw(t). \quad (14)$$

Здесь и далее предполагается, что $\gamma > 1$.

В данной работе мы построим инвариантную вероятностную меру процесса, который является решением СДУ (14). Для этого мы воспользуемся уравнением Фоккера–Планка, которое соответствует уравнению (14). Для анализа взаимосвязи симметрии СДУ Ито и симметрии уравнения Фоккера–Планка построим группы преобразований, допускаемые уравнением Фоккера–Планка. Для полученных групп построим инвариантные решения и выделим среди них те, которые являются условными плотностями.

2. Основной результат. Для построения вероятностной меры случайного процесса рассмотрим уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению (14):

$$\begin{aligned} p_t - \frac{B^2}{2} y^{2\gamma} p_{yy} + \left[(A - B^2\gamma)y^{2\gamma-1} + \frac{y}{2(\gamma-1)} \right] p_y + \\ + \left[(2\gamma-1)(A - B^2\gamma)y^{2(\gamma-1)} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \right] p = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $p = p(t, x, y)$. Так как преобразованиям будут подвергаться только переменные t и y , то переменную x будем опускать.

Теорема 1. Уравнение Фоккера–Планка (15) инвариантно относительно группы преобразований с инфинитезимальным оператором

$$\begin{aligned} X = (c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{c_2 e^t - c_3 e^{-t}}{2(1-\gamma)} \right) y \frac{\partial}{\partial y} + \\ + \left(-\frac{c_2 e^t y^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)^2 B^2} + \frac{c_2 (A - B^2\gamma) e^t}{(1-\gamma) B^2} + \frac{c_3 e^{-t}}{2(1-\gamma)} + c_4 \right) \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned} \quad (16)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные константы.

Доказательство. Утверждение теоремы 1 доказывается, следуя классическому методу построения группы симметрии детерминированных дифференциальных уравнений. Метод подробно изложен, например, в [4, с. 65]. \square

Теорема 2. Пусть $\frac{2A}{B^2} < 2\gamma - 1$, тогда группа G_2 (которая получается из (16) путем подстановки в него $c_2 = 1, c_1 = c_3 = c_4 = 0$) порождает инвариантное решение уравнения Фоккера–Планка (15) следующего вида:

$$p(t, y) = y^{2\left(\frac{A}{B^2} - \gamma\right)} e^{-\frac{y^{2(1-\gamma)}}{2B^2(1-\gamma)^2}} Q^{(1)}\left(y e^{\frac{t}{2(\gamma-1)}}\right).$$

Здесь $y > 0$, $Q^{(1)}$ – решение уравнения $zQ_{zz}^{(1)} + \frac{A}{B^2}Q_z^{(1)} = 0$.

Доказательство. Найдем инварианты группы G_2 :

$$I_1 = ye^{\frac{t}{2(\gamma-1)}}, \quad I_2 = y^2 \frac{A-B^2\gamma}{B^2} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} p.$$

Так как $I_2 = F(I_1)$, то

$$p(t, y) = y^2 \frac{A-B^2\gamma}{B^2} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} Q^1 \left(ye^{\frac{t}{2(\gamma-1)}} \right), \quad y > 0.$$

Обозначим $z = ye^{\frac{t}{2(\gamma-1)}}$. Найдем $Q^{(1)}(z)$. Для этого подставим выражение для p в уравнение (15). Получим:

$$zQ_{zz}^{(1)} + \frac{A}{B^2}Q_z^{(1)} = 0.$$

Найдем из последнего уравнения $Q^{(1)}(z)$, подставим его в (15), получим:

$$p(t, y) = y^2 \frac{A-B^2\gamma}{B^2} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} \left(L_1 y^{1-\frac{2A}{B^2}} e^{1-\frac{2A}{B^2} \frac{t}{2\gamma-1}} + L_2 \right), \quad (17)$$

где $y > 0$, L_1, L_2 – произвольные константы. \square

Следствие 2. Функция $p(t, y)$, задаваемая равенством (17), является условной плотностью распределения при $L_1 = 0$, $L_2 > 0$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить выполнение равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y) dy = 1.$$

Подставим сюда правую часть равенства (17), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} y^{2\left(\frac{A}{B^2}-\gamma\right)} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} \left(L_1 y^{\left(1-\frac{2A}{B^2}\right)} e^{\left(1-\frac{2A}{B^2}\right) \frac{t}{2(\gamma-1)}} + L_2 \right) dy = \\ & = L_1 \int_0^{+\infty} y^{1-2\gamma} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} e^{\left(1-\frac{2A}{B^2}\right) \frac{t}{2(\gamma-1)}} dy + \\ & + L_2 \int_0^{+\infty} y^{2\left(\frac{A}{B^2}-\gamma\right)} e^{-\frac{y^2(1-\gamma)}{2B^2(1-\gamma)^2}} dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Если $L_1 \neq 0$, то первый интеграл в правой части равенства (18) равен

$$B^2(1-\gamma)e^{\left(1-\frac{2A}{B^2}\right) \frac{t}{2(\gamma-1)}}.$$

Если $L_1 = 0$, $L_2 > 0$, то получим функцию

$$g(x) = L_2 x^{2\left(\frac{A}{B^2} - \gamma\right)} e^{-\frac{x^{2(1-\gamma)}}{2B^2(1-\gamma)^2}},$$

которая, как показано в работе [18], является плотностью стационарного процесса при $\gamma > 1$, $\frac{A}{B^2} < 2\gamma - 1$. \square

Теорема 3. *Группа G_3 (которая получается из (16) путем подстановки в него $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = c_4 = 0$) порождает инвариантное решение уравнения Фоккера–Планка (15) следующего вида:*

$$p(t, y) = \frac{1}{y} Q^{(2)} \left(ye^{\frac{t}{2(1-\gamma)}} \right),$$

где $Q^{(2)}$ является решением уравнения:

$$z^2 Q_{zz}^{(2)} - \left(1 + \frac{2A}{B^2} - 4\gamma\right) z Q_z^{(2)} + 2(1 - \gamma) \left(1 + \frac{2A}{B^2} - 2\gamma\right) Q^{(2)} = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Найдем инварианты однопараметрической группы G_3 :

$$I_1 = ye^{\frac{t}{2(1-\gamma)}}, \quad I_2 = yp.$$

Так как $I_2 = F(I_1)$, то

$$p(t, y) = \frac{1}{y} Q^{(2)} \left(ye^{\frac{t}{2(1-\gamma)}} \right).$$

Найдем $Q^{(2)}(z)$, где $z = ye^{\frac{t}{2(1-\gamma)}}$. Подставим найденное выражение для p в уравнение (15), затем найдем $Q^{(2)}(z)$ и подставим его в уравнение (19). В итоге:

$$p(t, y) = L_1 y^{\nu_1 - 1} e^{-\frac{\nu_1 t}{2(1-\gamma)}} + L_2 y^{\nu_2 - 1} e^{-\frac{\nu_2 t}{2(1-\gamma)}}. \quad (20)$$

Здесь $y > 0$, L_1, L_2 – произвольные константы,

$$\nu_{1,2} = 1 + \frac{A}{B^2} - 2\gamma \pm \sqrt{\left(\frac{A}{B^2} - 1\right)^2 - 2(1 - \gamma)}.$$

\square

Очевидно, что, если хотя бы одна из констант L_i ($i = 1, 2$) отрицательна, то $p(t, y)$, задаваемая формулой (20), не является плотностью распределения. Пусть $L_i \geq 0$.

Следствие 3. *Если $\gamma > 1$, то функция $p(t, y)$, задаваемая формулой (20), не является условной плотностью распределения.*

Доказательство. Утверждение следствия верно, так как при $\gamma > 1$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y) dy = +\infty$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Группы G_1 и G_4 являются группами переносов вдоль оси времени и оси p соответственно. В контексте данной статьи они интереса не представляют.

Из четырех построенных групп G_1, G_2, G_3, G_4 только G_2 порождает вероятностную меру. Касательный вектор этой группы имеет вид:

$$\xi(t) = e^t, \theta(t, y) = \frac{e^t}{2(1-\gamma)}y, \eta(t, y, p) = \left(\frac{e^t}{2(1-\gamma)^2 B^2} y^{2(1-\gamma)} - \frac{(A-\gamma B^2)}{(1-\gamma)B^2} e^t \right) p.$$

Рассмотрим сужения групп G_2 , и G_3 , действующие только на переменные t, y , т.е. группу G_2^* с касательным вектором $\xi(t) = e^t, \theta(t, y) = \frac{e^t}{2(1-\gamma)}y$ и группу G_3^* с касательным вектором $\xi(t) = e^{-t}, \theta(t, y) = \frac{e^{-t}}{2(\gamma-1)}y$

Утверждение 2. *Стохастическое дифференциальное уравнение (14) не является инвариантным относительно группы преобразований G_2^* , но является инвариантным относительно группы преобразований G_3^* .*

Доказательство. В справедливости утверждения 2 нетрудно убедиться, подставив коэффициенты уравнения (14) и координаты касательных векторов групп G_2^* и G_3^* в систему определяющих уравнений (12). \square

3. Выводы. В статье рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение Ито, решение которого описывает процесс горения в случайной среде. Методами группового анализа стохастических дифференциальных уравнений выписана его группа инвариантности. С целью построения инвариантной вероятностной меры для исходного процесса записано уравнение Фоккера–Планка, соответствующее рассмотренному уравнению. Показано, что уравнение Фоккера–Планка допускает четырехпараметрическую группу преобразований, из которых лишь одна порождает инвариантную вероятностную меру. Это группа G_2 с касательным вектором

$$\xi(t) = e^t, \theta(t, y) = \frac{e^t}{2(1-\gamma)}y, \eta(t, y, p) = \left(\frac{e^t}{2(1-\gamma)^2 B^2} y^{2(1-\gamma)} - \frac{(A-\gamma B^2)}{(1-\gamma)B^2} e^t \right) p.$$

Сужение группы G_3^* уравнения Фоккера–Планка, действующее на переменную времени и фазовую переменную, образует группу, относительно которой инвариантно исходное уравнение Ито. Но при этом инвариантное решение уравнения Фоккера–Планка, порождаемое группой G_3 , не является плотностью распределения случайного процесса, являющегося амплитудой решения СДУ, описывающего процесс горения в случайной среде.

1. Биргкоф Г. Гидродинамика. – М.: ИЛ, 1963. – 245 с.
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 630 с.
3. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. – 240 с.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.

6. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. – № 8. – 44 с.
7. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа – М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. – № 9. – 45 с.
8. *Фуцич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М: Наука, 1990. – 400 с.
9. *Фуцич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений Максвелла. – К.: Наукова думка, 1983. – 200 с.
10. *Фуцич В.И., Жданов Р.З.* Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – К.: Наукова думка, 1992. – 288 с.
11. *Вольтера В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
12. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. – М.: Сов. Радио, 1975. – 45 с.
13. *Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М.* Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // Математическое моделирование. – 2005. – **17**, № 10. – С. 31–38.
14. *Александрова О.В.* Симметрии и первые интегралы систем стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вестник Новгородского Государственного Университета имени Ярослава Мудрого. – 2013. – **1**, № 75. – С. 54–59.
15. *Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М.* Марковские процессы // Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления: ВИНТИ, 1989. – **46**, 2. – С. 5–248.
16. *Alexandrova O. V.* Group analysis of the Ito Stochastic system. // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2006. – **14**, № 3/4. – P. 255–279.
17. *Мельник С.А.* Расслоение решений квазилинейного стохастического уравнения параболического типа // Украинский математический вестник. – 2006. – **3**, №2. – С. 242–254.
18. *Melnik S. A.* The group analysis of the stochastic differential equation // Annals Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. – 2002. – **21**. – P. 7–12.

O. V. Aleksandrova

Symmetry of nonlinear stochastic differential equation by Ito.

The article defines the invariance group for the non-linear Ito stochastic differential equation, which has an applied value. The solution of the analyzed equation describes the process of burning in a random environment. Fokker–Planck equation was written for the equation in question. The interrelation of invariance groups is established, which is allowed by the Ito equation and the corresponding Fokker–Planck equation. For the Fokker–Planck equation invariant solutions are constructed.

Keywords: *symmetry, Fokker–Planck equation, admissible operator, invariant solutions.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры», Макеевка
aolga3387@gmail.com

Получено 14.12.18

УДК 681.518.5

©2018. А. Б. Бирюков, А. А. Иванова

ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИАГНОСТИКИ НА БАЗЕ АНАЛИЗА МОМЕНТАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ БАЛАНСОВ

Проиллюстрированы сущность и возможности разработанных для разных отраслей промышленности систем диагностики, анализирующих моментальные тепловые балансы. Сформулированы общие подходы к построению таких систем диагностики. Показан способ анализа погрешностей определения искомых величин. Выделены моменты, позволяющие повысить эффективность разработки и использования новых систем диагностики.

Ключевые слова: система диагностики, диагностические параметры, технологический процесс, косвенное определение величин, моментальный тепловой баланс.

1. Введение. За последние два десятилетия важную роль в технических науках приобрело такое направление как техническая диагностика, представляющая собой область знаний, охватывающая теорию, методы и средства определения технического состояния объектов.

Диагностика ведется по, так называемым, диагностическим параметрам, которые по своей сути являются репрезентативными и позволяют судить о состоянии объекта. Диагностические параметры могут быть прямыми и косвенными. Прямые параметры непосредственно характеризуют состояние объекта, а для косвенных имеется функциональная связь с прямыми параметрами. Различают следующие основные методы диагностики: органолептические, вибрационные, акустические, тепловые, трибодиагностика, анализ продуктов износа в продуктах сгорания, акустическая эмиссия, радиография; вихректочковый, ультразвуковой и капиллярный контроль; параметрическая диагностика, электродиагностический контроль.

Диагностика состояния оборудования становится общепринятым и необходимым элементом современных систем автоматического управления. Методы теплового контроля и диагностики играют важнейшую роль в самых разных отраслях промышленности [1]. Нормативная документация по реализации тепловой диагностики предполагает, что она базируется на измерении температур и прежде всего температур поверхности оборудования или тел и сред, подвергающихся обработке. Это позволяет в некоторой мере оценить соответствие температурного поля заданным требованиям, выявить образование некоторых дефектов [1–4].

Однако в нормативной документации по тепловой диагностике [1] не уделяется достаточное внимание как calorиметрическим методам, так и интерпретации результатов, получаемых с их помощью, хотя известно, что они дают возможность практического исследования тепловых балансов оборудования. В работах [5–9] представлены системы диагностики тепловых процессов, основанные на анализе моментальных тепловых балансов, охватывающие разное оборудование (эле-

менты оборудования) и отрасли промышленности: кристаллизатор МНЛЗ, печи периодического и непрерывного действия для тепловой обработки металла, реакторы синтеза метанола, реакторы синтеза углеродных наноматериалов.

Целью данной работы является обобщение опыта в области построения и использования систем диагностики, анализирующих моментальные тепловые балансы, и выделение общих моментов, которые позволят повысить эффективность разработки новых систем.

2. Общие подходы к построению тепловых балансов. По своей сути тепловые балансы (интегральные и моментальные) отражают выполнение закона сохранения энергии в виде следующего условия: количество энергии, введенной в процесс (в виде тепловой, электрической, химической и других видов энергии), равно количеству энергии, выведенной из процесса (или используемой в нем).

Интегральный тепловой баланс можно строить, используя полные количества энергии, введенные и выведенные в течение процесса (Дж). Возможно использование количеств энергии, отнесенных к единице массы основного продукта (Дж/кг).

Для моментального теплового баланса статьи расхода и прихода энергии выражаются в единицах мощности (Вт).

Типовые статьи теплового баланса:

– *физическая теплота входящих или выходящих веществ*

$$Q_g = m \cdot c_m(t) \cdot t, \quad Q_g = V_V \cdot c_V(t) \cdot t,$$

$$Q = G \cdot c_m(t) \cdot t, \quad Q = V \cdot c_V(t) \cdot t,$$

где t – температура, К;

Q_g, Q – поступающее или выводимое с физической теплотой веществ количество энергии, в общем выражении и в единицах мощности соответственно, Дж, Вт;

c_m, c_V – массовая и объемная удельные теплоемкости веществ соответственно, Дж/(кг·К), Дж/(м³·К);

m, G – масса и массовый расход соответственно, кг, кг/с;

V_V, V – объем и объемный расход соответственно, м³, м³/с.

При реализации пересчета объемных расходов на массовые необходимо иметь в виду, что если объем и объемный расход взяты при нормальных физических условиях (н.ф.у.), то для перемножения с ними должна быть взята плотность среды при н.ф.у. Если же эти величины взяты при действительных физических условиях (д.ф.у.), то плотность также берется при д.ф.у.

В общем случае теплоемкости веществ являются функциями температуры. Для нахождения их значений можно воспользоваться табличными справочными данными [10], либо функциональными зависимостями из справочной литературы. Причем более доступными являются табличные данные. Для автоматизации расчетов соответствующие функциональные зависимости могут быть получены исследователем самостоятельно.

– *химическая энергия веществ.* В топливных технологиях для характеристики запаса химической энергии веществ, как правило, используют теплоту сгорания

для газообразных веществ:

$$Q_n^p = 0,01 \cdot (Q_{CO} \cdot \%CO + Q_{H_2} \cdot \%H_2 + Q_{CH_4} \cdot \%CH_4 + Q_{H_2S} \cdot \%H_2S + \sum_{i=1}^n (Q_{C_mH_n} \cdot \%C_mH_n))$$

где Q_{CO} , Q_{H_2} , Q_{CH_4} , Q_{H_2S} , $Q_{C_mH_n}$ – теплота сгорания соответствующих газовых компонентов, Дж/м³;

$\%CO$, $\%H_2$, $\%CH_4$, $\%H_2S$, $\%C_mH_n$ – процентное содержание газовых компонентов в газовой смеси, %.

Для твердых и жидких веществ:

$$Q_H^p = 340 \cdot C^p + 1030 \cdot H^p - 109 \cdot (Q^p - S^p) - 25 \cdot W^p,$$

где C^p , H^p , O^p , S^p , W^p – содержание углерода, водорода, кислорода, серы и влаги в элементарном рабочем составе топлива, %.

В ряде случаев для описания энергетического состояния возникает необходимость использовать не теплоту сгорания, а теплоту образования входных и выходных веществ. Иногда для упрощения формы представления теплового баланса вместо химической энергии входящих и выходящих веществ в приходной (для экзотермических реакций) или в расходной (для эндотермических реакций) статьях баланса фигурирует тепловой эффект реакции.

– *теплопотери реактора*. Для реакторов, имеющих в реакционном пространстве температуру выше температуры окружающей среды (в большинстве случаев это значительно более высокая температура) часть тепла переходит через ограждение реактора в окружающую среду. Величина потока теплопотерь определяется температурным напором (разница температур внутри и снаружи реактора), геометрическими характеристиками реактора, геометрическими и теплофизическими характеристиками ограждения реактора [11]. Обычно величина теплопотерь для современных реакторов не превышает нескольких процентов от расходной части теплового баланса (зачастую она не превышает одного процента).

– *ввод электрической энергии в процесс*, который может быть осуществлен при помощи нагревателей резистивного типа либо индукционным способом, либо при помощи дуг. Количество введенной энергии фиксируется при помощи электроизмерительных приборов.

Количественные значения ряда статей теплового баланса могут быть либо непосредственно определены при помощи измерительных приборов, либо рассчитаны на основании их показаний. Среди статей теплового баланса выделяется та, которая с одной стороны наиболее полно характеризует процесс, а, с другой стороны, не может быть непосредственно определена. Эта искомая статья определяется в результате арифметических действий над идентифицированными статьями теплового баланса.

Например, в системах диагностики тепловой работы печей периодического и непрерывного действия из теплового баланса определяется плотность теплового

потока усваиваемого поверхностью металла [6, 7]. В системе диагностики реакторов синтеза углеродных наноматериалов [9] из теплового баланса определяется количество теплоты, идущей на покрытие эндотермических реакторов синтеза углеродных наноматериалов (УНМ).

3. Анализ погрешностей системы диагностики. По сути, система диагностики базируется на косвенном определении искомых величин (статей теплового баланса), характеризующих тепловые (энергетические) процессы в исследуемых объектах. Определение искомых величин производится за счет расчетной обработки результатов измерения величин-аргументов (входных величин). Схема измерений входных величин аргументов для нескольких систем диагностики машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) представлена на рис. 1.

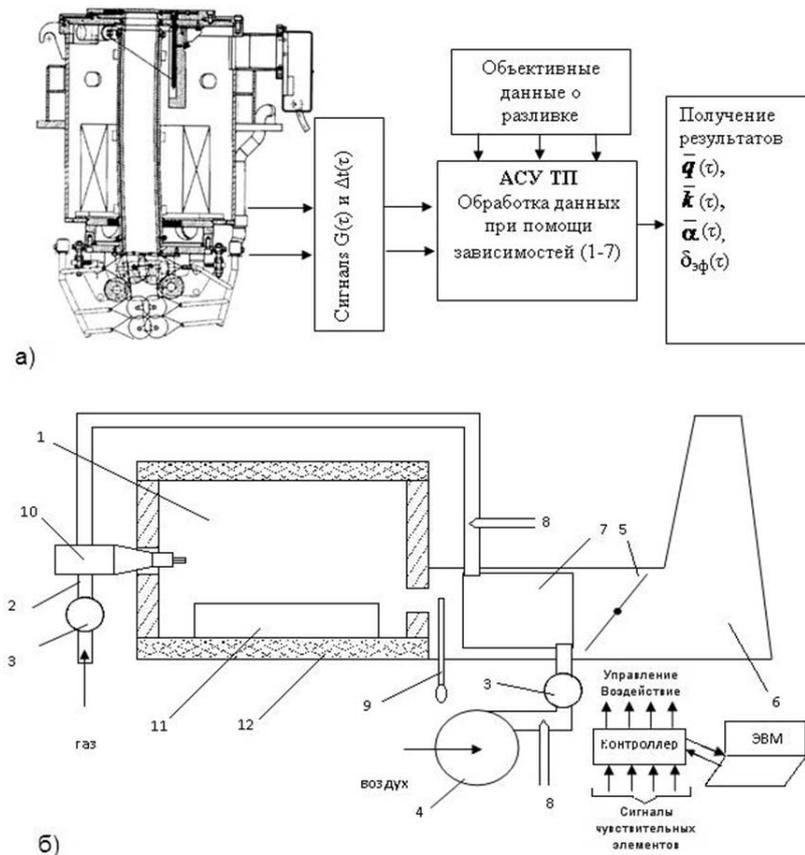


Рис. 1. Схема аппаратной части систем диагностики тепловой работы кристаллизатора МНЛЗ (а) и нагревательной печи периодического действия (б). 1 – камера печи; 2 – подвод газа к горелке; 3 – расходомеры для газа и воздуха; 4 – дутьевой вентилятор для подачи воздуха на горелки; 5 – дымовой клапан; 6 – дымовая труба; 7 – рекуператор; 8 – термопара для замера температуры воздуха до и после подогрева; 9 – отсасывающая термопара для замера температуры продуктов сгорания на выходе из рабочей камеры; 10 – газовая горелка; 11 – обрабатываемый материал; 12 – футеровка.

В рамках теории инженерного эксперимента имеется стандартная методика для оценки погрешности косвенных измерений [12, 13]. Её идея заключается в том, что итоговая погрешность зависит не только от погрешностей определения каждой из входных величин, но и от функциональной связи между ними. Составляется итоговое выражение, связывающее между собой искомую величину и входные величины. Далее от него берутся частные производные и с их помощью составляется выражение для определения относительной погрешности определения искомой величины.

Использование такого подхода в ряде случаев оказывается достаточно затруднительным. Во-первых, изначально связь между входными величинами и искомой может быть представлена несколькими выражениями, в которых присутствуют промежуточные величины; составление единой функциональной связи приводит к громоздкому выражению, которое неудобно дифференцировать.

В работе [12] предложен альтернативный подход, предполагающий проведение предварительного исследования параметрической чувствительности системы. Его суть заключается в следующем:

- задается базовый уровень входных величин;
- далее поочередно для каждой входной величины задается ряд значений с равномерным шагом внутри возможного диапазона изменения величины;
- для каждого вектора исходных данных определяются результаты диагностики;
- для каждого вектора исходных данных на рассматриваемую входную величину искусственно накладывается предельная погрешность (например, только положительная), соответствующая классу точности прибора, используемого для измерения, и получается искомая величина;
- определяется относительная погрешность искомой величины, полученной при наложении погрешности на входную величину и знак этой погрешности; при этом также на основании сравнения погрешностей для разных уровней входной величины делается вывод о влиянии или не влиянии уровня величины на значение погрешности;
- после анализа по приведенной схеме влияния погрешности каждой из входных величин на погрешность искомой величины эмулируется ситуация, когда одновременно задаются погрешности всех входных величин такого знака, чтобы они однонаправленно действовали на погрешность искомой величины. Полученная погрешность искомой величины и будет предельной погрешностью системы диагностики.

4. Задание граничных условий теплообмена. Результаты работы системы диагностики могут использоваться для задания граничных условий теплообмена при параллельном моделировании процесса тепловой обработки материала в режиме реального времени в рамках прогнозной модели.

Например, установленные значения средних плотностей теплового потока, отводимых от корки, формирующейся в кристаллизаторе непрерывнолитой заготовки, к воде [5], или подводимых к поверхности металла при его тепловой обработке

в печи [6, 7], позволяют проводить в реальном времени задание граничных условий II-го рода на поверхности металла.

5. Проверка адекватности системы диагностики. Возможно несколько вариантов проведения этой процедуры. Если проводилось параллельное моделирование температурного поля металла, подвергающегося тепловой обработке при задании граничных условий на основе данных системы диагностики, то проверка реальных параметров температурного поля при выдаче материала из печи и их сопоставление с прогнозными значениями будет давать представление о мере адекватности как системы диагностики, так и прогнозной математической модели.

Например, для металла, выдаваемого из печи, сопоставление можно вести по температуре поверхности металла либо по усилию прокатки, которое для заданного размера заготовки и вида металла дает представление о его среднемассовой температуре.

Если величина, определяемая при помощи системы диагностики, связана с количеством произведенного продукта, то сопоставление реального количества произведенного продукта с прогнозным значением является мерой адекватности системы диагностики.

6. Углубленное представление о закономерностях протекающих процессов. Расчетная обработка результатов работы системы диагностики позволяет получать дополнительные сведения о количественных закономерностях протекания процессов.

Так, например, в случае анализа моментальных тепловых балансов работающей печи появляется возможность углубленного изучения процесса теплопередачи в печной камере. На основании установленных значений плотности теплового потока при наличии определенных с помощью параллельного математического моделирования значений температур поверхности металла имеется возможность перейти к итоговому коэффициенту теплоотдачи. Поскольку итоговый коэффициент теплоотдачи представляет собой сумму лучистой и конвективной составляющих, то зная одну из них, находим величину неизвестной составляющей [6].

После получения сведения о значениях коэффициента конвективной теплоотдачи для разных параметров технологии появляется возможность определения значения коэффициентов критериального уравнения, описывающего конвективный теплообмен в конкретном агрегате.

7. Получение важных параметров процесса. Также расчетная обработка результатов диагностики позволяет получить закономерности изменения во времени важных параметров процесса.

Например, при производстве метанола суждение о состоянии катализатора предложено выносить в зависимости от текущих значений доли монооксида углерода, расходуемой по реакциям синтеза, которая в свою очередь определяется в рамках системы тепловой диагностики процесса [8]:

$$\xi = \frac{G_{vap} \cdot (i_{vp} - i_w) \cdot 100 \cdot 22,4}{CO \cdot V \cdot Q_M},$$

где ξ – доля расходования монооксида углерода в реакциях синтеза;

CO – процентное содержание монооксида углерода в синтез-газе, %;

V – объемный расход синтез-газа, м³/ч;

Q_M – тепловой эффект образования метанола, Дж/кмоль;

G_{vap} – расход пара из сепаратора, кг/с;

i_{vp}, i_w – энтальпия насыщенного пара на выходе из реактора и питательной воды соответственно, Дж/кг.

Применительно к печам расчетная обработка результатов работы системы диагностики позволяет получить изменение во времени таких важнейших характеристик процесса как коэффициент использования топлива (КИТ) и коэффициент полезного действия (КПД) [6]. На рис. 2 представлено изменение во времени названных величин, полученное для конкретной печи с выкатным подом при нагреве кузнечных слитков диаметров 1 м под последующую осадку на прессе.

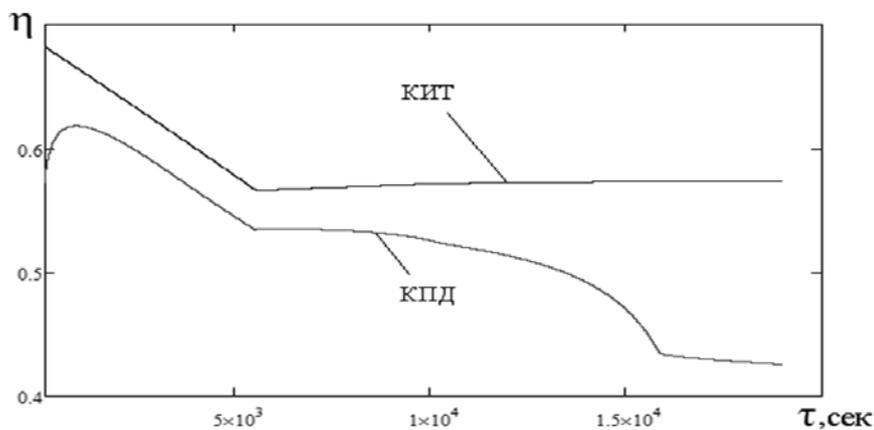


Рис. 2. Значение КИТ и КПД, восстановленное при помощи системы диагностики

Применительно к кристаллизаторам МНЛЗ в результате обработки результатов системы диагностики получаем возможность от средней плотности теплового потока в кристаллизаторе перейти к средним значениям коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи, и, наконец, к эффективной толщине газового зазора в кристаллизаторе (δ_{ef}) [5]. Контроль величины эффективной толщины газового зазора в режиме реального времени при помощи системы АСУ ТП предоставляет следующие возможности:

- оперативный контроль износа внутренней поверхности гильз кристаллизаторов на основании анализа изменения во времени величины δ_{ef} ;
- практическая проверка соответствия конусности кристаллизаторов усадке заготовок на основе сопоставления средних уровней δ_{ef} для конкретных сочетаний

профилей кристаллизатора и марок стали с оптимальным значением эффективной толщины газового зазора, установленным из практического опыта;

– выбор наилучших кристаллизаторов для условий конкретного производства на основе анализа соответствующих массивов информации о среднем значении эффективной толщины газового зазора;

– установление взаимосвязи износа гильз кристаллизаторов с образованием дефекта ромбичности (достигается путем совместной обработки информации о температурно-скоростных режимах разлива, марках стали, конусности кристаллизаторов, соответствовавших им величинах эффективных толщин газовых зазоров и данных о ромбичности заготовок при помощи аппарата математической статистики).

8. Практическое использование систем диагностики. Для практического использования систем диагностики необходима разработка соответствующих программных комплексов, которые функционируют в режиме реального времени, получая информацию о значениях входных величин АСУ ТП. На начальном этапе такая система может работать просто в режиме советчика и архивирования важной информации о параметрах изучаемого процесса. В перспективе возможна интеграция систем диагностики в высокоуровневые САУ для участия в управлении объектом. На рис. 3 представлен эмулятор системы диагностики теплотехнических параметров кристаллизатора, разработанный в среде LabVIEW.

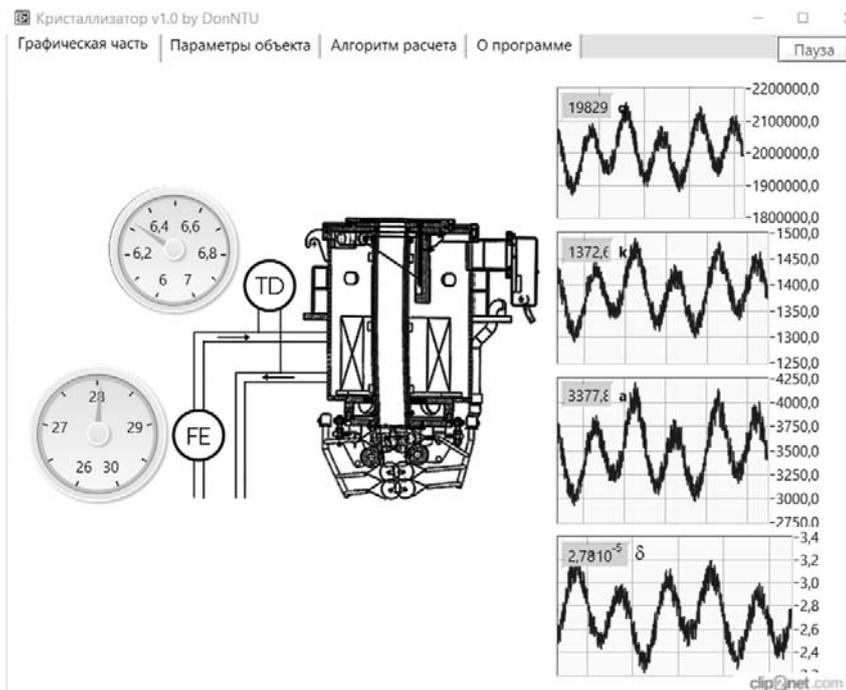


Рис. 3. Эмулятор системы диагностики теплотехнических параметров кристаллизатора сортовой МНЛЗ

9. Выводы. Сущность систем диагностики, основанных на анализе моментальных тепловых балансов, заключается в том, что среди статей теплового баланса выделяется такая, которая с одной стороны наиболее полно характеризует процесс, а, с другой стороны, не может быть непосредственно определена. Эта искомая статья определяется в результате арифметических действий над идентифицированными статьями теплового баланса.

Анализ погрешностей определения искомых величин в рамках системы диагностики можно оценить при помощи метода, базирующегося на оценке параметрической чувствительности системы по всем входным величинам и последующем эмулировании ситуации, когда одновременно возникают предельно возможные погрешности всех входных величин со знаками, обеспечивающими одинаковый характер воздействия на искомую величину.

Анализ моментальных тепловых балансов позволяет в результате расчетной обработки результатов измерения входных величин определять важные характеристики процесса, задавать граничные условия, обеспечивающие возможность прогнозного математического моделирования процесса в реальном времени.

1. ГОСТ Р 56511-2015 Контроль неразрушающий. Методы теплового вида. Общие требования.
2. *Вавилов В.П.* Инфракрасная термография и тепловой контроль. – М.: ИД Спектр, 2013. – 544 с.
3. *Будадин О.Н., Вавилов В.П., Абрамова Е.В.* Тепловой контроль. – М.: ИД Спектр, 2011. – 171 с.
4. *Вавилов В.П., Климов А.Г.* Тепловизоры и их применение. – М.: Интел универсал, 2002. – 87 с.
5. *Бирюков А.Б., Иванова А.А.* Диагностика теплотехнических параметров работы кристаллизаторов МНЛЗ // *Черная металлургия.* – 2015. – № 2 (1382). – С. 49–54.
6. *Бирюков А.Б., Новикова Е.В., Олешкевич Т.Г.* Диагностика нагревательных печей периодического действия на основании построения и анализа моментальных тепловых балансов // *Промышленная теплотехника.* – 2014. – **36**, № 2. – С. 29–35.
7. *Бирюков А.Б., Иванова А.А.* Диагностика температурного состояния металла при его тепловой обработке в печах непрерывного действия // *Металлург.* – 2018. – № 4. – С. 33–37.
8. *Бирюков А.Б., Алехина Н.В., Дробот С.Г.* Система диагностики тепловой работы современных реакторов синтеза метанола // *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Проблеми екології.* – 2011. – № 1–2. – С. 133–137.
9. *Бирюков А.Б., Кравцов В.В., Новикова Е.В., Алехина Н.В.* Системы диагностики тепловой работы лабораторных, полупромышленных и промышленных реакторов синтеза углеродных наноматериалов // *Промышленная теплотехника.* – 2012. – **29**, № 3. – С. 75–80.
10. *Казанцев Е.И.* Промышленные печи: Справочное руководство для расчета и проектирования, 2-е издание дополненное и переработанное. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.
11. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сужомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергоиздат, 1981. – 417 с.
12. *Якимов И.М., Мокшин В.В.* Компьютерные технологии моделирования и обработки экспериментальных данных: Учебное пособие. – Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та, 2012. – 124 с.
13. *Рабинович С.Г.* Погрешность измерений – Л: Энергия, 1978. – 236 с.
14. *Васильева А.В., Бирюков А.Б.* Исследование погрешностей системы диагностики при определении величин, характеризующих тепловую работу кристаллизаторов МНЛЗ // *Вестник ДонНТУ.* – 2016. – № 5. – С. 31–36.

A. B. Biryukov, A. A. Ivanova

Fundamentals of construction and use of diagnostic based on analysis instant heat balance.

The essence and capabilities of diagnostic systems developed for various industries, analyzing instant heat balances, are illustrated. The general approaches for such diagnostic systems construction are formulated. The method for analyzing sought-for values determining errors is shown. Aspects that allow to improve development and use of new diagnostic systems are formulated.

Keywords: *diagnostic system, diagnostic parameters, technological process, indirect determining of quantities, instantaneous heat balance.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
biryukov.ttf@gmail.com
ivanova.iamm@mail.ru

Получено 25.10.18

УДК 531.36, 517.91, 517.925.5

©2018. А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены наиболее характерные особенности, которые возникают при построении дополнительных функций на основе цепочек производных для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложены способы регуляризации инвариантных соотношений, позволяющие устранить эти особенности и упростить вид результирующей функции Ляпунова.

Ключевые слова: неавтономные системы, функция Ляпунова, метод дополнительных функций.

Введение. Основным подходом, который используется при исследовании устойчивости положений равновесия или определенных режимов движения систем, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, является второй метод Ляпунова [1]. Существование функции Ляпунова с требуемыми свойствами при достаточно общих предположениях на правые части системы определяется обратными теоремами [2]. Однако для того, чтобы построить для конкретной системы функцию Ляпунова с помощью этих теорем, требуется выдвинуть некоторое предположение о качественных свойствах нулевого решения и знать структуру общего решения системы.

Метод дополнительных функций [3, 4] дает специалисту, занимающемуся проблемами устойчивости, конструктивный способ построения функций Ляпунова без предварительного знания об устойчивости или неустойчивости исследуемого положения равновесия. Основное предназначение дополнительных функций заключается в возможности корректировки имеющейся функции со знакопостоянной производной в силу заданной системы с целью максимального сужения того множества, на котором производная обращается в нуль. Возможность построения функции со знакопостоянной производной для произвольной системы была показана в работе [5]. При этом следует отметить, что для явного нахождения такой функции по-прежнему необходимо иметь общее решение заданной системы. Но, в отличие от случая нахождения функции Ляпунова с помощью обратных теорем, не требуется точно знать характер поведения траекторий в окрестности начала координат (наличие свойств устойчивости или неустойчивости).

Для автономного случая функция, откорректированная с помощью дополнительных функций, в большинстве случаев позволяет провести практически полный анализ качественных свойств нулевого решения системы и выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные [6]. В неавтономном случае дополнительные функции также позволяют минимизировать по включению множество обращения в нуль производной до инвариантного подмноже-

ства. Однако для того, чтобы использовать получившуюся функцию для анализа устойчивости, требуется устанавливать некоторые дополнительные ограничения на функцию и ее производные, гарантирующие возможность одновременной по времени оценки их значений [7, 8].

Построение дополнительных функций основано на методе инвариантных соотношений, изначально разработанном П.В. Харламовым для автономных систем [9]. Соответствующий результат для неавтономных систем был получен в работе [10]. Как в автономном, так и в неавтономном случае существенным условием применимости метода инвариантных соотношений является отличие от нуля градиента функции, задающей инвариантное соотношение (для векторных соотношений – полнота ранга матрицы Якоби). В противном случае в структуре получаемых инвариантных многообразий возникают особенности [11]. Настоящая статья посвящена анализу таких особенностей и способам их устранения при построении дополнительных функций.

1. Постановка задачи. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in X \subset R^n, \quad t \in I = [t_0, \infty), \quad (1)$$

где функция $f(x, t)$ непрерывна на множестве $X \times I$ вместе со своими частными производными до порядка n включительно. Предполагается, что система (1) обладает нулевым решением (то есть $f(0, t) = 0$ при всех $t \in I$) и точка 0 является внутренней точкой области X .

Для удобства записи воспользуемся следующими обозначениями. Скалярное произведение двух векторов из R^n обозначим угловыми скобками

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n,$$

а символом D_f будем обозначать дифференцирование в силу системы (1):

$$D_f \varphi(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, f(x, t) \right\rangle.$$

Основная задача теории устойчивости заключается в установлении характера траекторий системы (1) в окрестности начала координат. В зависимости от их поведения, нулевое решение считается устойчивым (если все решения остаются в малой окрестности начала координат), асимптотически устойчивым (если есть асимптотическая сходимость всех траекторий к началу координат) или неустойчивым (если есть окрестность, которую могут покидать траектории с начальными условиями, сколь угодно близкими к началу координат).

2. Метод дополнительных функций. Пусть имеется достаточно гладкая функция $V(x, t)$, принимающая нулевое значение при $x = 0$, и производная $D_f V(x, t)$ которой в силу системы (1) является функцией отрицательно-постоянной в окрестности начала координат. Относительно знака самой функции не делается никаких

предположений. Существование такой функции и способы построения при известном общем решении были получены в работе [5]. Для конкретной системы иногда построить функцию с таким свойством можно на основании общих соображений. Например, если уравнения (1) описывают движение некоторой консервативной или диссипативной механической системы, в качестве $V(x, t)$ может быть рассмотрена функция, определяющая полную энергию системы, или ее аналоги.

Обозначим через M множество в расширенном фазовом пространстве $X \times I$, на котором $D_f V(x, t)$ принимает нулевые значения. Это множество гарантированно непусто и содержит по крайней мере луч $(0, t)$, так как $V(0, t) = 0$, а система (1) обладает нулевым решением.

Если во всех остальных точках множества $X \times I$ производная $D_f V(x, t)$ не обращается в нуль, корректировка функции V не требуется. В противном случае необходимо построить такую функцию $V_a(x, t)$, что $D_f V(x, t) + D_f V_a(x, t)$ обнуляется на множестве $N \subseteq M$, являющемся инвариантным относительно фазового потока системы (1), а во всех остальных точках по крайней мере в некоторой окрестности B_δ начала координат, то есть на множестве $((X \cap B_\delta) \times I) \setminus N$, принимает отрицательные значения. Важным условием является также то, что сама функция $V(x, t) + V_a(x, t)$ должна сохранять (по крайней мере в окрестности B_δ) свойства знакоопределенности или знакопостоянства исходной функции $V(x, t)$ (если последняя ими обладала). Такое преобразование определяет основную идею метода дополнительных функций, а сама функция $V_a(x, t)$, обеспечивающая сужение множества M обращения в нуль производной $D_f V(x, t)$, называется дополнительной.

3. Метод инвариантных соотношений. Для построения дополнительной функции необходимо сначала найти содержащееся в множестве M инвариантное многообразие N . Для этого должен быть применен метод инвариантных соотношений.

Пусть исследуемое множество M определяется функцией φ :

$$M = \{(x, t) : \varphi(x, t) = 0\}.$$

Тогда инвариантное множество N задается бесконечной системой функциональных уравнений [10]:

$$\varphi(x, t) = 0, D_f \varphi(x, t) = 0, \dots, D_f^s \varphi(x, t) = 0, \dots \quad (2)$$

В качестве φ может быть выбрана функция $D_f V$. Однако, учитывая то, что большинство содержательных результатов в теории инвариантных соотношений получено для случая, когда градиент φ не обращается в нуль на множестве M , может потребоваться произвести с $D_f V$ некоторые преобразования. Тогда в результате получится некоторая система инвариантных соотношений или даже совокупность (объединение) нескольких соотношений или систем.

Так как бесконечная система (2) определяет соотношения на $n + 1$ переменных (x, t) , можно редуцировать эту систему, оставив в ней не более чем $n + 1$ уравнений. При этом в случае, если $\text{grad} \varphi \neq 0$, это будут первые $n + 1$ (или меньшее количество) уравнений в цепочке:

Теорема. [10] Если в последовательности (2) существует k функционально независимых уравнений, то независимыми будут и первые k уравнений системы (2).

Важную роль в методе инвариантных соотношений играет понятие слоя. Определим последовательность множеств $M_0 = X \times I$, $M_i = M_{i-1} \cap \{D_f^{i-1}\varphi(x, t) = 0\}$. Тогда, в соответствии с теоремой, начиная с некоторого значения k , будет выполнено $M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \dots = N$. Таким образом, множества $M_0 \setminus M_1$, $M_1 \setminus M_2$, \dots , $M_{k-1} \setminus M_k$ и множество N образуют разбиение всей области определения $X \times I$ системы (1) на подмножества, которые будем называть слоями области $X \times I$ относительно инвариантного соотношения φ .

4. Регуляризация инвариантных соотношений. В предыдущем разделе было сделано допущение, что рассматриваемое инвариантное соотношение φ будет иметь градиент, отличный от нуля во всех точках множества M , где φ обращается в нуль. Здесь мы рассмотрим ряд наиболее часто встречающихся в приложениях особенностей и предложим для соответствующих функций φ преобразования, приводящие соотношение к форме, для которой условие на градиент уже будет иметь место.

Случай 1. Предположим, что градиент функции φ обращается в нуль на множестве $G \subset M$. Если в G есть некоторая изолированная точка (x^*, t^*) , где $x^* \neq 0$, то ограничив фазовое пространство системы (1) до множества $\|x\| \leq \|x^*\|/2$, мы исключим из рассмотрения эту особую точку, при этом выводы об устойчивости или неустойчивости нулевого решения новой системы будут применимы и к исходной. Если таких изолированных точек несколько, то достаточно будет взять точку с минимальной нормой по x .

Таким образом, можно исключить из рассмотрения все изолированные особые точки (исключение составляет лишь случай, когда имеем дело со счетным множеством изолированных точек, которые сгущаются к началу координат). Аналогично рассматривается случай, когда множество G имеет даже более сложную структуру, но отделено от начала координат.

Случай 2. Рассмотрим случай, когда вырождение происходит на некотором многообразии, которое может быть представлено как решение системы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, t) = 0, \\ \dots \\ \varphi_m(x, t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Как правило, функция $\varphi(x, t)$ в этом случае имеет вид:

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1^{2d_1} + \dots + \alpha_m \varphi_m^{2d_m},$$

где d_i – положительные целые числа. Тогда исходное скалярное соотношение $\varphi = 0$ заменяют векторным $\varphi^* = 0$, которое определяется уравнениями (3). Его теоретический анализ производится по той же схеме метода инвариантных соотношений,

описанной в предыдущем разделе, с учетом того, что при вычислении производных в силу системы под $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$ понимается матрица Якоби вектор-функции $\varphi^*(x, t)$. Хотя на практике чаще используют параллельное вычисление цепочек производных для каждой из компонент $\varphi_i(x, t)$. Каждая цепочка продолжается до тех пор, пока в ней не будет получена производная, функционально зависящая от уже вычисленных в ней и в других цепочках.

Случай 3. Перейдем теперь к случаю, когда исходное множество M представляет собой объединение нескольких многообразий, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} \varphi_1(x, t) = 0, \\ \dots \\ \varphi_m(x, t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Как правило, функция φ тогда имеет вид

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_m.$$

В этом случае обнуление градиента функции φ происходит на множествах, определяемых пересечениями некоторого количества (не менее двух) из многообразий (4).

В этом случае следует провести анализ каждого инвариантного соотношения $\varphi_i(x, t) = 0$ по отдельности, обеспечивая построение дополнительных функций, исключая строго положительные значения производной функции Ляпунова на этом многообразии. При этом, в дальнейшем может понадобиться проделать аналогичные действия для пересечений некоторых из множеств (4).

Следует отметить особо случай, когда в (4) все функции φ_i совпадают, т. е. $\varphi = \varphi_1^m$. Тогда в рамках указанного подхода мы должны заменить функцию φ для анализа функцией φ_1 .

Случай 4. Возможен также смешанный случай, когда M представляет собой объединение многообразий разных размерностей. При этом в системе (4) некоторые из уравнений превращаются в векторные уравнения вида (3). Этот случай разрешается комбинацией уже описанных выше подходов.

Случай 5. Иногда возможно преобразование функции φ , обеспечивающее ненулевой градиент, за счет использования нелинейной замены переменных (например, $y_1 = x_1^3$). Однако следует пользоваться такой возможностью очень осторожно, чтобы не допустить потери гладкости правых частей уравнения и функции φ .

Закключение. В работе представлены наиболее характерные особенности, которые возникают при построении дополнительных функций для неавтономных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены основные приемы преобразования системы рассматриваемых инвариантных соотношений, которые могут быть применены на любом этапе построения цепочек производных и позволяют устранить возникающие особенности.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М., Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. *Massera J.L.* Contributions on stability theory // Ann. of Math. – 1956. – **64**. – P. 182–206.
3. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
4. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
5. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Существование и построение функции со знакопостоянной производной для динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 6. – С. 5–15.
6. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
7. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Метод дополнительных функций в теории устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений // Докл. НАН Украины. – 2014. – № 8. – С. 20–27.
8. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Использование дополнительных функций для исследования устойчивости и неустойчивости неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 78–86.
9. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
10. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–19.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

A.M. Kovalev, V.N. Nesporny

Features of constructing additional function for non-autonomous systems of ordinary differential equations.

Most representative singularities which arises in the process of constructing additional function on the base of derivative chains for nonautonomous systems of ordinary differential equations are considered. The technique of a regularization of invariant relations allowing to eliminate these singularities and simplify a form of final Lyapunov function is proposed.

Keywords: *nonautonomous systems, Lyapunov function, method of additional functions.*

УДК 531.36, 531.38

©2018. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч, Г. В. Мозале́вская

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ, РЕАЛИЗУЮЩИХ СЛУЧАЙ ПОСТОЯНСТВА ПРИВЕДЕННОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассматривается задача о движении в поле силы тяжести гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной наружной осью подвеса и электроприводом ротора. При исследовании устойчивости стационарных движений такого прибора методом функций Ляпунова в качестве особого возникает случай, когда при некотором значении постоянной циклического интеграла приведенная потенциальная энергия является постоянной по отношению к углу поворота внутренней «рамки» карданова подвеса. В работе проанализированы условия на параметры прибора, при которых реализуется этот случай, и показано, что действительно существуют конструкции, удовлетворяющие указанным условиям. Приведены примеры таких конструкций.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, метод функций Ляпунова, приведенная потенциальная энергия.

1. Постановка задачи. В [1] изучена устойчивость стационарных движений для обобщенной модели [2, 3] гироскопа в кардановом подвесе, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного электромотором синхронного или асинхронного типа, который поддерживает вращение гироскопа (ротора) при наличии момента трения относительно оси ротора. При этом использовались модели электромоторов, в которых не учитывается изменение электрических токов, а принимаются упрощенные выражения для вращающего момента электромотора.

Пусть α, β – углы поворота наружной и внутренней «рамок» карданова подвеса, φ – угол поворота ротора относительно внутренней «рамки», роль которой выполняет статор электромотора. Кинетическая энергия для обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе выражается формулой

$$T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta) = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}], \quad (1)$$

где C – осевой момент инерции ротора, коэффициенты H, R зависят только от постоянных механических параметров. Коэффициенты G, N, Q и потенциальная энергия силы тяжести U зависят от угла β по формулам

$$\begin{aligned} G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta, \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin \beta + n_2 \cos \beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta, \\ U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_0 – произвольная постоянная, а выражения остальных коэффициентов формул (2) и величин H, R через механические параметры следуют из формул (8)–(15)

статьи [3]. Все эти выражения приведены в [4]. Случаю уравновешенного гироскопа соответствует $U \equiv \text{const}$.

При любом β кинетическая энергия (1) – положительно определенная квадратичная форма угловых скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$. Поэтому, согласно критерию Сильвестра,

$$G(\beta) > 0, \quad G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \quad J(\beta) > 0$$

при любом β . Здесь $J(\beta)$ – определитель квадратичной формы $2T$.

Лагранжевы уравнения движения рассматриваемой системы допускают первый интеграл

$$\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}),$$

выражающий сохранение проекции кинетического момента системы на вертикаль.

Эти уравнения имеют семейство стационарных решений

$$\dot{\alpha} = \Omega^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \beta = \beta^0,$$

которые описывают равномерные вращения ротора с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$ (при $\Omega^0 = 0$) и регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса (при $\Omega^0 \neq 0$). В случае синхронного электромотора постоянная $\omega > 0$ равна угловой скорости вращения магнитного поля в статоре, а для асинхронного электромотора величина ω меньше этой угловой скорости. Постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0 \left[\frac{1}{2} \Omega^0 G'(\beta^0) + \omega Q'(\beta^0) \right] + U'(\beta^0) = 0, \quad (3)$$

где штрих означает дифференцирование по β .

Введя вместо $\dot{\alpha}$ в качестве переменной величину p , а вместо угла φ – угол $\gamma = \varphi - \omega t$, получаем преобразованную систему уравнений движения, стационарные решения которой имеют вид

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0,$$

здесь $p^0 = \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0)$. Условие (3) существования стационарных решений при этом переходит в условие, которое можно записать в виде $U'_*(p^0, \beta^0) = 0$, где

$$U_*(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \quad (4)$$

– приведенная потенциальная энергия силы тяжести.

Следовательно, для функции $U_*(p^0, \beta)$ существуют четыре возможности: функция $U_*(p^0, \beta)$ переменной β в точке $\beta = \beta^0$ имеет А) изолированный минимум, В) изолированный максимум, С) перегиб, D) $U_*(p^0, \beta) \equiv \text{const}$.

В [1, 5] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Постоянная \bar{p} такая, что $U_*(\bar{p}, \beta) \equiv \text{const}$, существует тогда и только тогда, когда конструктивные параметры гироскопа в кардановом подвесе удовлетворяют одной из двух групп условий (см. (2)):*

$$D_1 : g_2 = g_3 = 0, u_1 = u_2 = 0, g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0 \\ (g_4 < 0, g_0 + g_4 > 0, |g_1| > 4|g_4|).$$

$$D_2 : g_2 = g_3 = g_4 = 0, u_2 = 0, 2u_1g_1 + \omega^2q_1^2 = 0 \\ (g_1, u_1 \neq 0, |g_0| > |g_1|).$$

Для таких конструкций специальные значения постоянной p однозначно определены формулами

$$\bar{p} = \omega q_0 - 2\omega q_1(g_0 + g_4)/g_1 \quad (\text{случай } D_1), \quad (5)$$

$$\bar{p} = \omega q_0 - \omega q_1 g_0/g_1 \quad (\text{случай } D_2), \quad (6)$$

а приведенная механическая потенциальная энергия (4) равна

$$U_*(p, \beta) = -4(p - \bar{p})g_4 \frac{(p - \bar{p})g_1 + 2(\bar{p} - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)}{g_1(g_1 - 4g_4 \sin \beta)^2} \quad (\text{случай } D_1), \quad (7)$$

$$U_*(p, \beta) = (p - \bar{p}) \frac{(p - \bar{p})g_1 - 2\omega q_1(g_0 + g_1 \sin \beta)}{2g_1(g_0 + g_1 \sin \beta)} \quad (\text{случай } D_2). \quad (8)$$

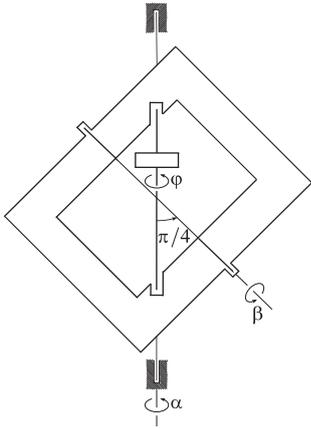


Рис. 1. Гироскоп в кардановом подвесе, в котором реализуется случай $U_*(p, \beta) \stackrel{\beta}{\equiv} \text{const}$

В этой лемме даны условия на параметры, при которых имеет место случай D, но не доказано, что существуют значения параметров, удовлетворяющие этим условиям. Та же проблема возникла и в [4] при исследовании устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе с использованием многотоковой модели синхронного электромотора.

Целью настоящей работы является доказательство того, что в рамках обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе существуют конструкции прибора, для которых выполняются условия D_1 и D_2 . Для этого приведены примеры систем, удовлетворяющих условиям D_1 и D_2 . Такие примеры построены в классе гироскопов в кардановом подвесе, конструкция которых отличается от общепринятой тем, что внутренняя ось подвеса составляет с наружной осью подвеса и осью ротора углы $\pi/4$ вместо углов $\pi/2$ в общепринятой модели

(рис. 1). При этом для построения примера выполнения условий D_1 рассматривается случай уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, у которого центр масс ротора совпадает с центром подвеса, а для построения примера выполнения условий D_2 рассматривается случай неуравновешенного гироскопа, у которого центр масс ротора сдвинут вдоль оси ротора из центра подвеса на расстояние $s > 0$.

Найдем для последнего случая детальные выражения потенциальной энергии U и коэффициентов G, H, N, Q, R в формуле (1) для кинетической энергии. Эти выражения получим из общих формул, приведенных в приложении к статье [4]. Пользуясь принятыми в этом приложении многоиндексными обозначениями, в общих формулах следует принять

$$\begin{aligned}\theta^2 &= \theta^3 = \pi/4, & A_{ij}^k &= 0 \quad (k = 1, 2; i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \\ \mathbf{c}^1 &= (c_1^1, c_2^1, c_3^1) = (0, 0, 0), & \mathbf{c}^2 &= (c_1^2, c_2^2, c_3^2) = (0, 0, 0), \\ \mathbf{s}^1 &= (0, s_2^1, s_3^1) = (0, 0, 0), & \mathbf{s}^2 &= (0, s_2^2, s_3^2) = (0, 0, s).\end{aligned}$$

Воспользуемся более простыми обозначениями для моментов инерции

$$\begin{aligned}C_2 &= A_{11}^1, & A_1 &= A_{11}^2, & B_1 &= A_{33}^2, & C_1 &= A_{22}^2, \\ A &= A_{22}^3 = A_{33}^3, & C &= A_{11}^3.\end{aligned}$$

Тогда формулы для G, H, N, Q, R, U записываются следующим образом

$$\begin{aligned}G(\beta) &= C_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}B_1 + \frac{1}{4}C_1 + \frac{5}{8}A + \frac{3}{8}C \\ &\quad + \frac{1}{2}(C - A) \sin \beta + \frac{1}{8}(2C_1 + A - 2B_1 - C) \cos 2\beta, \\ H &= A_1 + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A, & N(\beta) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(A_1 + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A) + \frac{\sqrt{2}}{4}(C - A) \sin \beta, \\ Q(\beta) &= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C \sin \beta, & R &= \frac{\sqrt{2}}{2}C, & U(\beta) &= mgs \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta.\end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты формул (2), входящие в условия D_1, D_2 , равны

$$\begin{aligned}g_0 &= C_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}B_1 + \frac{1}{4}C_1 + \frac{5}{8}A + \frac{3}{8}C, \\ g_1 &= \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A, & g_2 &= g_3 = 0, \\ g_4 &= \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{8}A - \frac{1}{4}B_1 - \frac{1}{8}C, \\ q_1 &= \frac{1}{2}C, & u_1 &= mgs \frac{\sqrt{2}}{2}, & u_2 &= 0.\end{aligned} \tag{9}$$

2. Существование значений параметров, обеспечивающих выполнение условий D_1 . Пусть $s = 0$. Тогда выполняются равенства $g_2 = g_3 = 0$, $u_1 = u_2 = 0$, входящие в условия D_1 , и для выполнения этих условий надо выбрать шесть моментов инерции $C_2, A_1, B_1, C_1, A, C > 0$ так, чтобы удовлетворить оставшимся условиям

$$g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0, \quad g_4 < 0, \quad g_0 + g_4 > 0, \quad |g_1| > 4|g_4|. \tag{10}$$

Из второго и третьего соотношений (10) следует неравенство $g_0 > 0$, что позволяет ввести параметры

$$x = -g_4/g_0 \quad (x > 0), \quad y = g_1/g_0. \quad (11)$$

Тогда первое и последнее соотношения (10) эквивалентны условиям

$$y^2 = 8x(1-x), \quad y^2 > 16x^2.$$

При $x > 0$ равенство $y^2 = 8x(1-x)$ определяет на плоскости (x, y^2) участок параболы с вершиной в точке $(1/2, 2)$, соответствующий значениям $x \in (0, 1)$, а неравенство $y^2 > 16x^2$ выделяет из него часть параболы, соответствующую значениям $x \in (0, 1/3)$.

Таким образом, приходим к следующему способу определения моментов инерции, удовлетворяющих условиям D_1 . Выбрав значение $x \in (0, 1/3)$, находим для параметра y два значения $y_i(x) = (-1)^{i-1}y_0(x)$, $i = 1, 2$, где $y_0(x) = \sqrt{8x(1-x)}$. Подставив эти значения в формулы (11), имеем при каждом $i = 1, 2$ две пары равенств

$$\frac{1}{x}g_4 = -g_0, \quad \frac{1}{y_i(x)}g_1 = g_0, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Отсюда с учетом выражений (9) величин g_0, g_1, g_4 получаем две пары линейных соотношений для определения моментов инерции.

Докажем, что при некоторых значениях x обе пары этих соотношений разрешимы относительно моментов инерции, и приведем способы выбора моментов инерции, удовлетворяющих этим соотношениям.

Исключив при выбранном $x \in (0, 1/3)$ величину g_0 из равенств (12), получаем равенство

$$\frac{1}{x}g_4 + \frac{1}{y_i(x)}g_1 = 0, \quad i = 1, 2,$$

заменяющее второе из них. После подстановки сюда выражений (9) величин g_1, g_4 приходим к условию

$$\varepsilon_i(x)C_1 - \varepsilon_i(x)B_1 + A - C = 0, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_i(x) = \frac{2y_0(x)}{y_0(x) - (-1)^{i-1}4x} = \begin{cases} \frac{2(1-x) + \sqrt{2x(1-x)}}{1-3x}, & x \in (0, 1/3), \quad i = 1, \\ \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2x}}, & x \in (0, 1/3), \quad i = 2. \end{cases} \quad (14)$$

Корректность такого определения $\varepsilon_i(x)$ следует из того, что здесь знаменатели положительны при $x \in (0, 1/3)$. Не останавливаясь на исследовании функций (14) методами математического анализа, приведем на рис. 2 их графики, построенные при помощи компьютера.

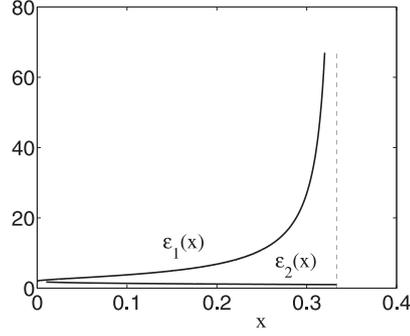


Рис. 2. Графики функций $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, $x \in (0, 1/3)$

Обращаясь теперь к первому равенству (12), подставим в него выражения (9) величин g_0, g_4 . Получаем в дополнение к (13) второе условие на моменты инерции

$$8C_2 + 4A_1 + \left(2 + \frac{2}{x}\right) C_1 + \left(2 - \frac{2}{x}\right) B_1 + \left(5 + \frac{1}{x}\right) A + \left(3 - \frac{1}{x}\right) C = 0. \quad (15)$$

Таким образом, вопрос о существовании значений параметров, обеспечивающих выполнение условий D_1 свелся к вопросу о разрешимости условий (13), (15) при положительных моментах инерции.

Записав условие (15) в виде

$$8C_2 + 4A_1 - \left(2 - \frac{2}{x}\right) (C_1 - B_1) + 4C_1 + \left(5 + \frac{1}{x}\right) A + \left(3 - \frac{1}{x}\right) C = 0,$$

подставим в него выражение для разности $C_1 - B_1$, следующее из (13). Получаем соотношение

$$8C_2 + 4A_1 + 4C_1 = k_{C_i}(x)C + k_{A_i}(x)A, \quad x \in (0, 1/3), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где функции $k_{C_i}(x), k_{A_i}(x)$, $i = 1, 2$, определены на интервале $(0, 1/3)$ формулами

$$\begin{aligned} k_{C_i}(x) &= \frac{2}{\varepsilon_i(x)} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - 3 = -2 + (-1)^{i-1} 2 \sqrt{\frac{1-x}{2x}}, \\ k_{A_i}(x) &= -\frac{2}{\varepsilon_i(x)} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} - 5 = -6 - (-1)^{i-1} 2 \sqrt{\frac{1-x}{2x}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку главные моменты инерции положительны, левая часть соотношения (16) положительна, а вместе с ней должна быть положительной и его правая часть. При положительных C, A это возможно только в том случае, когда при выбранных значениях x, i хотя бы одна из величин (17) положительна.

На рис. 3 изображены графики функций $k_{C_1}(x), k_{A_1}(x)$, $x \in (0, 1/3)$, а на рис. 4 – графики функций $k_{C_2}(x), k_{A_2}(x)$, $x \in (0, 1/3)$. Функция $k_{A_2}(x)$ обращается в нуль при $x = x_0 = 1/19$. Таким образом, при $i = 1$ имеем

$$k_{C_1}(x) > 0, \quad k_{A_1}(x) < 0, \quad x \in (0, 1/3), \quad (18)$$

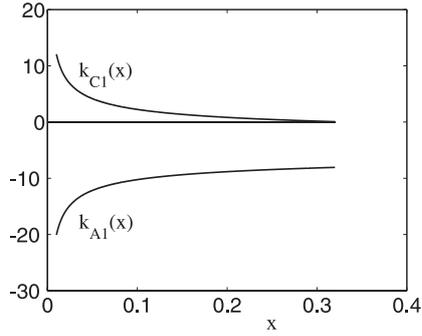


Рис. 3. Графики функций $k_{C1}(x)$, $k_{A1}(x)$

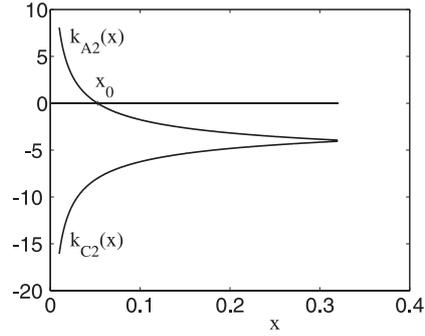


Рис. 4. Графики функций $k_{C2}(x)$, $k_{A2}(x)$

а при $i = 2$ имеем

$$\begin{aligned} k_{C2}(x) < 0, \quad k_{A2}(x) > 0, \quad x \in (0, x_0), \\ k_{C2}(x) < 0, \quad k_{A2}(x) < 0, \quad x \in (x_0, 1/3). \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, при $i = 1$ соотношение (16) разрешимо относительно моментов инерции для любого $x \in (0, 1/3)$, а при $i = 2$ оно разрешимо для $x \in (0, x_0)$.

Рассмотрим вопрос о совместной разрешимости соотношений (13), (16) в случае D_1 при $i = 1$ (вариант D_{11}) и при $i = 2$ (вариант D_{12}).

ВАРИАНТ D_{11} . При $i = 1$ согласно (18) имеем $k_{A1}(x) < 0$, $x \in (0, 1/3)$, и при любых $C_2, A_1, C_1, A > 0$ соотношение (16) определяет величину $C > 0$ в виде

$$C = \frac{1}{k_{C1}(x)}(8C_2 + 4A_1 + 4C_1 + |k_{A1}(x)|A), \quad x \in (0, 1/3), \quad (20)$$

где $k_{C1}(x) > 0$. Для разности $C - A$ отсюда следует выражение

$$C - A = \frac{1}{k_{C1}(x)}(8C_2 + 4A_1 + 4C_1) + l_0(x)A, \quad x \in (0, 1/3), \quad (21)$$

где

$$l_0(x) = \frac{|k_{A1}(x)|}{k_{C1}(x)} - 1, \quad x \in (0, 1/3).$$

На рис. 5 изображен график функции $l_0(x)$, $x \in (0, 1/3)$. Он показывает, что $l_0(x) > 0$, $x \in (0, 1/3)$, и поэтому, согласно формуле (21), имеем $C - A > 0$ при любых $C_2, A_1, C_1, A > 0$ и любом $x \in (0, 1/3)$.

Возвращаясь к соотношению (13), подставим в него выражение (21) для $C - A$, а затем разрешим его относительно B_1 . Получаем для B_1 формулу

$$B_1 = l_1(x)C_1 - l_2(x)(8C_2 + 4A_1) - l_3(x)A, \quad x \in (0, 1/3), \quad (22)$$

где

$$l_1(x) = 1 - \frac{4}{\varepsilon_1(x)k_{C1}(x)}, \quad l_2(x) = \frac{1}{\varepsilon_1(x)k_{C1}(x)}, \quad l_3(x) = \frac{l_0(x)}{\varepsilon_1(x)}, \quad x \in (0, 1/3).$$

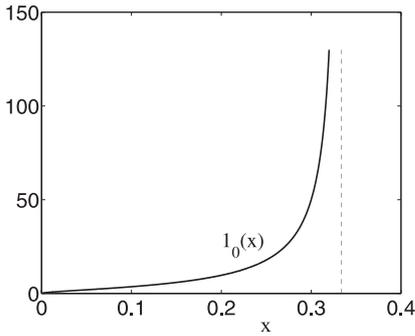


Рис. 5. График функции $l_0(x)$, $x \in (0, 1/3)$

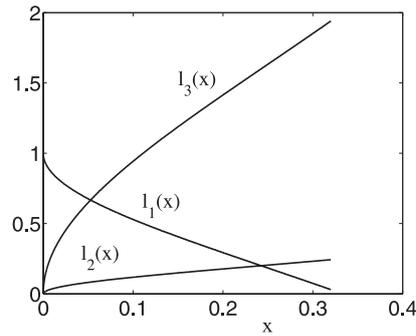


Рис. 6. Графики функций $l_1(x)$, $l_2(x)$, $l_3(x)$

В формуле (22) коэффициенты при C_2, A_1, A отрицательны при всех $x \in (0, 1/3)$. Поэтому при положительных C_2, A_1, C_1, A формула (22) определяет положительные значения B_1 только при тех значениях $x \in (0, 1/3)$, для которых выполнено неравенство $l_1(x) > 0$ и значение $C_1 > 0$ достаточно велико. Из приведенного на рис. 6 графика функции $l_1(x)$ видно, что неравенство $l_1(x) > 0$ выполнено при всех $x \in (0, 1/3)$.

В результате для варианта D_{11} приходим к такому способу определения моментов инерции C_2, A_1, B_1, C_1, A, C , удовлетворяющих условиям D_1 .

Выбираем любое значение $x \in (0, 1/3)$ и любые значения $C_2, A_1, A > 0$. Затем выбираем одно из значений $C_1 > 0$, при которых положительна правая часть формулы (22) для B_1 . Такие значения определяются неравенством $C_1 > C_{1\min}$, где $C_{1\min} > 0$ находится из условия равенства нулю правой части формулы (22):

$$C_{1\min} = \frac{1}{l_1(x)} [l_2(x)(8C_2 + 4A_1) + l_3(x)A]. \quad (23)$$

Взяв любое $C_1 > C_{1\min}$, по формуле (22) определяем $B_1 > 0$. Наконец, при известных C_2, A_1, B_1, C_1, A по формуле (20) находим $C > 0$.

На рис. 6 даны графики функций $l_1(x), l_2(x), l_3(x)$, входящих в формулу (22).

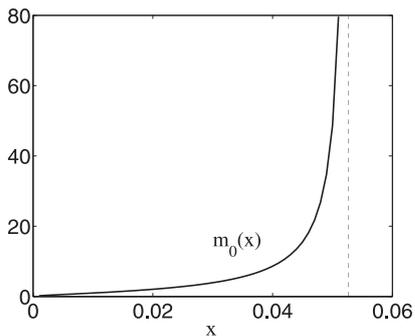


Рис. 7. График функции $m_0(x)$, $x \in (0, x_0)$

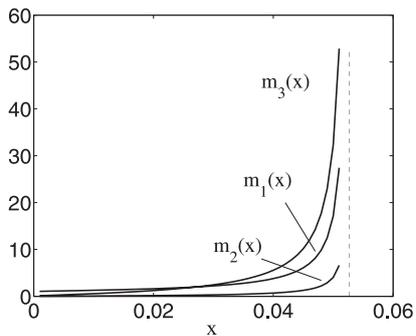


Рис. 8. Графики функций $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$

ВАРИАНТ D_{12} . При $i = 2$ согласно (19) имеем $k_{A2}(x) > 0$, $k_{C2}(x) < 0$ при

$x \in (0, x_0)$, и при таких значениях x и любых $C_2, A_1, C_1, C > 0$ соотношение (16) определяет $A > 0$ по формуле

$$A = \frac{1}{k_{A2}(x)}(8C_2 + 4A_1 + 4C_1 + |k_{C2}(x)|C). \quad (24)$$

Для разности $A - C$ получаем отсюда выражение

$$A - C = \frac{1}{k_{A2}(x)}(8C_2 + 4A_1 + 4C_1) + m_0(x)C, \quad (25)$$

где

$$m_0(x) = \frac{|k_{C2}(x)|}{k_{A2}(x)} - 1, \quad x \in (0, x_0).$$

На интервале $(0, x_0)$ имеем $m_0(x) > 0$ (рис. 7), и поэтому из соотношения (25) следует, что $A - C > 0$ при любом $x \in (0, x_0)$ и любых $C_2, A_1, C_1, C > 0$.

Подставив выражение (25) в равенство (13), взятое при $i = 2$, получаем

$$B_1 = m_1(x)C_1 + m_2(x)(8C_2 + 4A_1) + m_3(x)C, \quad x \in (0, x_0). \quad (26)$$

Здесь функции $m_1(x), m_2(x), m_3(x)$ определены равенствами

$$m_1(x) = 1 + \frac{4}{\varepsilon_2(x)k_{A2}(x)}, \quad m_2(x) = \frac{4}{\varepsilon_2(x)k_{A2}(x)}, \quad m_3(x) = \frac{m_0(x)}{\varepsilon_2(x)}, \quad x \in (0, x_0). \quad (27)$$

Графики этих функций даны на рис. 8.

Все функции (27) положительны. Поэтому для варианта D_{12} приходим к такому способу определения моментов инерции C_2, A_1, B_1, C_1, A, C , удовлетворяющих условиям D_1 . Выбрав значение $x \in (0, x_0)$, задаем любые $C_2, A_1, C_1, C > 0$ и по формулам (24), (26) определяем $A, B_1 > 0$.

3. Существование значений параметров, обеспечивающих выполнение условий D_2 . Чтобы установить существование конструкций гироскопа в кардановом подвесе, для которых реализуются условия D_2 , воспользуемся моделью неуравновешенного гироскопа в кардановом повесе, приведенной в п. 1. В этом случае коэффициенты формул (2), входящие в условия D_2 , выражаются по формулам (9), где $s > 0$. Таким образом, соотношения $g_2 = g_3 = 0, u_2 = 0, u_1 \neq 0$ выполнены, и надо выбрать моменты инерции $C_2, A_1, B_1, C_1, A, C > 0$ и расстояние $s > 0$ так, чтобы удовлетворить остальным условиям

$$2u_1g_1 + \omega^2q_1^2 = 0, \quad g_4 = 0, \quad g_1 \neq 0, \quad |g_0| > |g_1|. \quad (28)$$

Рассмотрим первое из условий (28). Здесь величины g_1, q_1 , входящие в коэффициенты G, Q в выражении (1), имеют одну и ту же размерность момента инерции. Величины ω^2q_1, u_1 имеют размерность энергии. Поэтому отношения

$$\frac{g_1}{q_1} = -x, \quad \frac{u_1}{\omega^2q_1} = y \quad (29)$$

– безразмерные величины. Они связаны равенством

$$2xy = 1, \quad (30)$$

которое эквивалентно первому из условий (28). Поскольку $u_1, q_1 > 0$ согласно (9), то $y > 0$, и тогда из (30) следует, что допустимы только значения $x > 0$.

При $y > 0$ согласно (29) имеем $g_1 < 0$, и третье условие (28) выполнено.

Так как $g_0 > 0$ в соответствии с (9), четвертое условие (28) эквивалентно двум неравенствам: $g_0 > g_1$, $g_0 > -g_1$. Первое из них выполнено, так как $g_0 > 0, g_1 < 0$, а для того, чтобы убедиться в выполнении второго, достаточно подставить в него выражения (9) для g_0, g_1 .

Вернемся к первому из условий (28), записанному в виде (30). Выбрав любое значение $x > 0$, из соотношения (30) находим соответствующее значение $y = y(x) = 1/2x$. Воспользовавшись при таких x, y формулами (29), подставляем в них выражения (9) для g_1, q_1, u_1 . Получаем два соотношения для параметров прибора:

$$mgs \, 2\sqrt{2}x = \omega^2 C, \quad A = (1+x)C. \quad (31)$$

При заданной угловой скорости $\omega > 0$ при каждом значении $C > 0$ по первой формуле (31) находим произведение ms , входящее в формулу (9) для u_1 , а по второй формуле (31) определяем величину A .

Теперь осталось удовлетворить второму условию (28), то есть соотношению $g_4 = 0$. С учетом определения (9) величины g_4 это соотношение записывается в виде равенства $B_1 - C_1 = (A - C)/2$. Согласно (31), здесь $A - C = Cx > 0$, и данное равенство при любом $C_1 > 0$ определяет $B_1 > 0$ по формуле

$$B_1 = C_1 + \frac{1}{2}Cx. \quad (32)$$

4. Числовые примеры. Ниже даны примеры выбора числовых значений параметров гироскопа в кардановом подвесе, при которых выполняются условия D_1 (варианты D_{11}, D_{12}) и условия D_2 . Числовые значения задаются в системе единиц *сантиметр, грамм, секунда*, наименования единиц при этом опускаются.

ВАРИАНТ D_{11} . Полагая $\omega = 1000$, $x = 0.05$, $C_2 = 1000$, $A_1 = 1000$, $A = 1000$, по формуле (23) находим $C_{1\min} = 2401.3$ и берем $C_1 = 1.5 \cdot C_{1\min} = 3601.9$. Затем по формулам (20), (22) определяем $C = 9262.3$, $B_1 = 811.1071$. При таких значениях параметров имеем $\bar{p} = -9.6431 \cdot 10^6$ согласно формуле (5).

На рис. 9, а изображена поверхность $U_*(p, \beta)$, определенная при выбранных значениях параметров прибора формулой (7). Даны также сечения этой поверхности плоскостью $\beta = -\pi/2$ и плоскостями $p = \text{const}$. В частности, при $p = \bar{p}$ имеем $U_*(\bar{p}, \beta) = 0$ для всех β , и поэтому сечение поверхности $U_*(p, \beta)$ плоскостью $p = \bar{p}$ представляет собой горизонтальную прямую.

При малых по модулю возмущениях $p - \bar{p}$ сечения поверхности $U_*(p, \beta)$ плоскостями $p = \text{const} \neq \bar{p}$ имеют вид деформированных синусоидальных кривых,

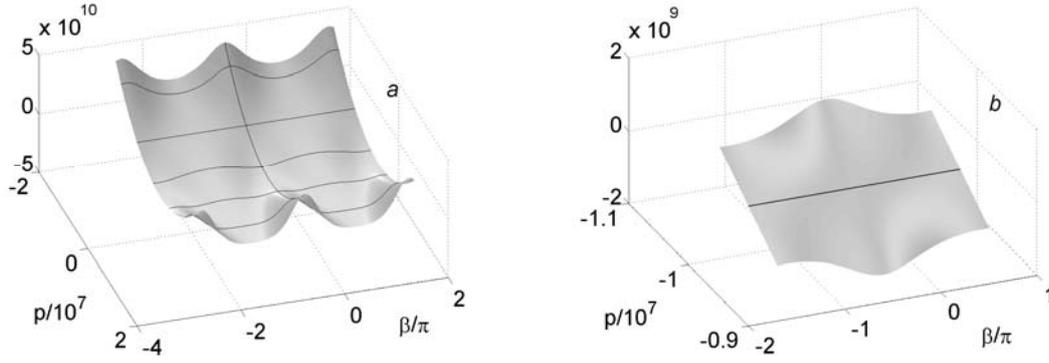


Рис. 9. Поверхность $U_*(p, \beta)$ в случае D_1 , вариант 1: а) общий вид, б) часть, соответствующая 2π -периоду изменения β и малым по модулю возмущениям $p - \bar{p}$

причем точки минимумов и максимумов этих кривых меняются местами при изменении знака возмущения $p - \bar{p}$. Это свойство хорошо видно на рис. 9, б.

Такое свойство всегда выполняется в случае D_1 . Действительно, из выражения (7) функции $U_*(p, \beta)$ для случая D_1 следует, что ее производная по β равна

$$U'_*(p, \beta) = -32(p - \bar{p})g_4^2 \times \frac{(p - \bar{p})g_1 + (\bar{p} - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)}{g_1(g_1 - 4g_4 \sin \beta)^3} \cos \beta. \quad (33)$$

Здесь, согласно лемме 1, $g_4, g_1, p^* - \omega q_0 \neq 0, g_1 - 4g_4 \sin \beta \neq 0$ при любом β . Пусть значение p настолько близко к \bar{p} , что

$$0 < |p - \bar{p}| < \min_{\beta \in [0, 2\pi]} |(\bar{p} - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)/g_1|.$$

Тогда дробь в (33) сохраняет свой знак при всех β , и поэтому производная $U'_*(p, \beta)$ равна нулю лишь в точках $\beta_{1n} = 2\pi n + \pi/2, \beta_{2n} = 2\pi n - \pi/2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где $\cos \beta = 0$. При этом в зависимости от знака $p - p^*$ функция $U_*(p, \beta)$ имеет минимумы в точках $\beta_{1n}(\beta_{2n})$ и максимумы в точках $\beta_{2n}(\beta_{1n})$.

ВАРИАНТ D_{12} . Пусть $\omega = 1000, x = 0.05, C_2 = 1000, C_1 = 1000, A_1 = 1000, C = 1000$. По формулам (24), (26) находим $A = 1.4697 \cdot 10^5, B_1 = 9.7666 \cdot 10^4$, а по формуле (5) определяем $\bar{p} = 2.0411 \cdot 10^6$. Вид поверхности $U_*(p, \beta)$ для варианта D_{12} такой же, как и для варианта D_{11} (рис. 10).

ВАРИАНТ D_2 . Полагаем $m = 1000, g = 981, \omega = 100, x = 1$. Задаем $C = 1000$ и по формулам (31) находим $ms = 3604.0, A = 2000$. Затем определяем $s = 3.6040$. Выбрав $C_1 = 1000$, по формуле (32) находим $B_1 = 1500$. Итак, определены величины s, C, A, C_1, B_1 . Оставшиеся два момента инерции C_2, A_1 выбираем по произволу: $C_2 = 500, A_1 = 1000$. По формуле (6) получаем $p = 375000$.

Поверхность $U_*(p, \beta)$, определенная формулой (8), показана на рис. 11. У ее сечений плоскостями $p = \text{const}$ точки минимумов и максимумов не меняются местами при изменении знака $p - \bar{p}$.

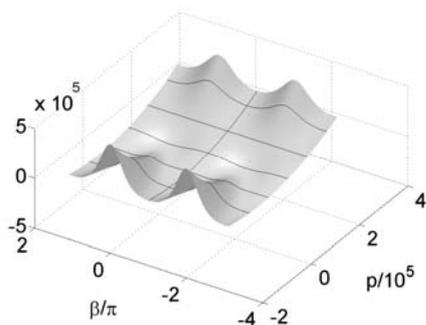


Рис. 10. Поверхность $U_*(p, \beta)$ в случае D_1 , вариант 2

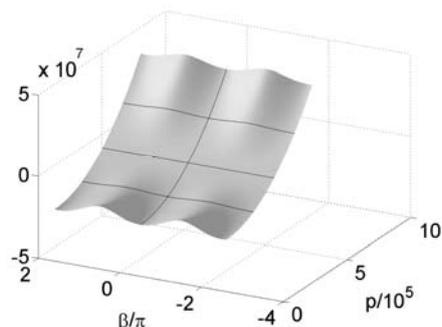


Рис. 11. Поверхность $U_*(p, \beta)$ в случае D_2

1. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 57–73.
2. Харламов П.В. Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 73–82.
3. Коносевиц Б.И. Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 82–92.
4. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Устойчивость стационарных решений уравнений многоголовой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 87–100.
5. Коносевиц Б.И. Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1977. – Вып. 9. – С. 61–73.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich, G. V. Mozalevskaya

Existence of constructions of a gimbals mounted gyroscope, realizing the case of constancy of the reduced potential energy.

The problem under consideration is the motion of a gimbals mounted gyroscope in the field of gravity. The outer gimbal axis is vertical, and the gyroscope is set in rotation by the electric motor. On investigation of stability of stationary motions of this device by Lyapunov functions method, the special case appears, when, under some value of the constant of the cyclic integral, the reduced potential energy is constant with respect to the angle of rotation of the inner gimbal. In the article, conditions for parameters of the device are analyzed, when this case is realized, and it is proved that there exist constructions, satisfying these conditions. Examples of such constructions are given.

Keywords: *gimbals mounted gyroscope, Lyapunov functions method, reduced potential energy.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 20.06.18

УДК 531.38; 531.39

©2018. Г. А. Котов

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕЦЕССИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Исследованы условия существования прецессионных движений твёрдого тела под действием потенциальных сил. С помощью методов решения обратных задач механики построена силовая функция на инвариантных соотношениях, описывающих прецессии общего вида, и функция, характеризующая скорость собственного вращения тела. Изучены решения дифференциального уравнения в частных производных, которое является разрешающим уравнением задачи.

Ключевые слова: потенциальные силы, прецессии общего вида, уравнение в частных производных.

Введение. В обзорной статье П.В. Харламова [1] особое внимание уделяется актуальности развития обобщённых задач динамики твёрдого тела. К таким задачам относится и задача о движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных сил.

Изучая интегрирование уравнений движения тела, Д.Н. Горячев [2] рассматривал, в основном, первые интегралы, поскольку в случае нового интеграла применима теория Якоби сведения задачи к квадратурам. Разработка метода инвариантных соотношений (ИС) построения частных решений уравнений движения [3, 4] позволила найти многочисленные классы решений в классических задачах динамики (см. обзоры [5, 6]).

Наиболее важным подходом в исследовании условий существования ИС служит подход, который основан на рассмотрении специальных (программных) классов движений тела, имеющего неподвижную точку [5–7].

К одному из таких классов принадлежат прецессионные движения тела, имеющего неподвижную точку. Известная регулярная прецессия гироскопа Лагранжа [8, 9] послужила основанием для рассмотрения прецессий тяжёлого твёрдого тела относительно наклонной оси (прецессия Д. Гриоли [10]). Наиболее значительное число частных решений в задачах динамики твёрдого тела получил Г.В. Горр [15]. Он ввёл важный класс движений: прецессионно-изоконические движения (см., например, [11]), и показал их существование не только в классических, но и в обобщённых задачах динамики твёрдого тела. Развитие исследований по рассмотрению прецессий твёрдого тела отмечено в публикациях [5–7, 13].

В задачах о движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных сил прецессионные движения изучены только в рамках прямой задачи механики [12]. В данной статье при нахождении условий существования прецессий использован метод решения обратных задач механики и результаты [14]. Получены новые виды силовой функции на ИС прецессионных движений,

которые позволили построить новые классы решений уравнений движения тела в потенциальном поле сил.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных сил

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Здесь введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – потенциальная функция, дифференцируемая по всем своим аргументам; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции тела; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает производную по времени t .

Исследование решений уравнений (1) будем проводить в рамках подхода решения обратных задач динамики твёрдого тела. То есть построение силовой функции происходит на основании заданных ИС. Можно показать, что при произвольной дифференцируемой функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$

где k – произвольная постоянная.

Если функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)) = 0$$

в силу уравнений (1), то уравнения (1) допускают интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad (3)$$

где E – произвольная постоянная.

Рассмотрим следующую задачу динамики: определить потенциальную функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ с помощью соотношения (3) в случае заданных прецессионных движений тела.

Прецессионными движениями [7] твердого тела с неподвижной точкой называются такие движения, для которых постоянен угол между двумя фиксированными в теле и пространстве осями, проходящими через неподвижную точку этого тела. Свяжем ось в неподвижном пространстве с вектором $\boldsymbol{\nu}$, а для задания направления оси в теле введем постоянный единичный вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, неизменно связанный с телом, то есть $\dot{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$. Обозначим постоянный угол между векторами \boldsymbol{a} и $\boldsymbol{\nu}$ через θ_0 . Тогда

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = \cos \theta_0 = a_0. \quad (4)$$

Производная от равенства (4) с учетом уравнения Пуассона из (1) имеет вид $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$, откуда следует, что для прецессионных движений выполняется векторное инвариантное соотношение [5]

$$\boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \boldsymbol{a} + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \boldsymbol{\nu}, \quad (5)$$

где $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – дифференцируемые функции своих аргументов. Силовая функция с учетом ИС (5) такова

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2} [\varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a}) + 2\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \psi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})] - E. \quad (6)$$

Таким образом, на ИС (5) силовая функция принимает значение (6), которое необходимо использовать в рассмотрении динамического уравнения из (1). Целью данной статьи является исследование условий существования ИС (5), полученного равенства (6) и уравнения Пуассона из (1).

2. Вывод основного уравнения для прецессионных движений. В качестве подвижной системы координат выберем главную систему. В ней тензор инерции имеет вид $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$. Интеграл момента количества движения из (2) с учетом (5) запишем так

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \quad (7)$$

Поскольку $\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2 > 0$, то из равенства (7) определим функцию $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$

$$\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\nu})}{\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}}. \quad (8)$$

Перепишем функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (6) с учетом (8):

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{\varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)[(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\nu})^2] + k^2}{2(\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - E. \quad (9)$$

Необходимое условие существования ИС (5) для уравнений (1) имеет вид [15]:

$$A_1 \frac{\partial \omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + A_2 \frac{\partial \omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + A_3 \frac{\partial \omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} = 0,$$

где

$$\omega_i = a_i \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_i \frac{k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(A_1 a_1 \nu_1 + A_2 a_2 \nu_2 + A_3 a_3 \nu_3)}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2}.$$

Запишем последнее уравнение в скалярной форме

$$\begin{aligned} & (A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2) \left\{ A_1 \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} [a_1 (A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2) - \right. \\ & - \nu_1 (A_2 a_2 \nu_2 + A_3 a_3 \nu_3)] + A_2 \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} [a_2 (A_3 \nu_3^2 + A_1 \nu_1^2) - \\ & - \nu_2 (A_3 a_3 \nu_3 + A_1 a_1 \nu_1)] + A_3 \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} [a_3 (A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2) - \\ & \left. - \nu_3 (A_1 a_1 \nu_1 + A_2 a_2 \nu_2)] \right\} + k [A_1 \nu_1^2 (A_2 + A_3 - A_1) + \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & + A_2 \nu_2^2 (A_3 + A_1 - A_2) + A_3 \nu_3^2 (A_1 + A_2 - A_3) \Big] - \\
 & - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \left\{ \left(A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2 \right) \left[a_1 A_1 \nu_1 (2A_1 + A_2 + A_3) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + a_2 A_2 \nu_2 (2A_2 + A_3 + A_1) + a_3 A_3 \nu_3 (2A_3 + A_1 + A_2) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - 2(a_1 A_1 \nu_1 + a_2 A_2 \nu_2 + a_3 A_3 \nu_3) \left(A_1^2 \nu_1^2 + A_2^2 \nu_2^2 + A_3^2 \nu_3^2 \right) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение (10) является неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Исследование этого уравнения в общем случае представляется весьма трудным, поэтому рассмотрим случай

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0). \quad (11)$$

Основное уравнение (10) для прецессионных движений (4) в силу (11) таково

$$\begin{aligned}
 & A_1 (A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} (A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2) - A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2} \nu_1 \nu_2 - A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_3} \nu_1 \nu_3 \right] - \\
 & - \varphi A_1 \nu_1 \left[A_1 \nu_1^2 (A_2 + A_3) + A_2 \nu_2^2 (2A_1 + A_3 - A_2) + A_3 \nu_3^2 (2A_1 + A_2 - A_3) \right] + \quad (12) \\
 & + k \left[A_1 \nu_1^2 (A_2 + A_3 - A_1) + A_2 \nu_2^2 (A_1 + A_3 - A_2) + A_3 \nu_3^2 (A_1 + A_2 - A_3) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Если из уравнения (12) будет определена функция $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, тогда функция $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (8) и силовая функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \frac{k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) A_1 \nu_1}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2}, \\
 U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \frac{A_1 \varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) (A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2) + k^2}{2(A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2)} - E.
 \end{aligned} \quad (13)$$

3. Случай сферического распределения масс твердого тела. Положим $A_1 = A_2 = A_3$ и преобразуем уравнение (12):

$$A_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} (\nu_2^2 + \nu_3^2) - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_3} \nu_1 \nu_3 \right) = 2\varphi A_1 \nu_1 - k. \quad (14)$$

Согласно теории интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [16], для сведения уравнения (14) к однородному уравнению введем функцию $V_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$. Дифференциальное уравнение относительно функции $V_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$ в общем случае имеет три первых интеграла, после нахождения которых из условия $V_1(c_1, c_2, c_3) = 0$ можно определить функцию $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Запишем дифференциальное уравнение относительно функции $V_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$, эквивалентное (14),

$$A_1 (\nu_2^2 + \nu_3^2) \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} - A_1 \nu_1 \nu_2 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_2} - A_1 \nu_1 \nu_3 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_3} + (2\varphi A_1 \nu_1 - k) \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = 0.$$

Из этого уравнения составим систему уравнений для характеристических линий

$$\frac{d\nu_1}{A_1(\nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{d\nu_2}{-A_1\nu_1\nu_2} = \frac{d\nu_3}{-A_1\nu_1\nu_3} = \frac{d\varphi}{2\varphi A_1\nu_1 - k}.$$

Из обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{d\nu_2}{-A_1\nu_1\nu_2} = \frac{d\nu_3}{-A_1\nu_1\nu_3}$ следует интеграл $\frac{\nu_3}{\nu_2} = c_2$. Из уравнения $\frac{d\nu_1}{A_1(\nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{d\nu_3}{-A_1\nu_1\nu_3}$ вытекает решение $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2$. Здесь c_1, c_2 – произвольные постоянные.

С помощью найденных интегралов из системы характеристик получим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\nu_1} - \frac{2\nu_1}{c_1^2 - \nu_1^2} \varphi = \frac{-k}{A_1(c_1^2 - \nu_1^2)},$$

интегралом которого является равенство

$$A_1(c_1^2 - \nu_1^2) \varphi(\nu_1) + k\nu_1 = c_3.$$

В указанном решении c_3 – произвольная постоянная. С учетом первого интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2$ получим функцию φ всех трех аргументов

$$A_1(\nu_2^2 + \nu_3^2) \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + k\nu_1 = c_3.$$

Функцию $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, как решение уравнения (14), определим из равенства

$$V_1\left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}, A_1\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2) + k\nu_1\right) = 0$$

в виде

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{A_1(\nu_2^2 + \nu_3^2)} \left[\Phi_1\left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}\right) - k\nu_1 \right]. \quad (15)$$

В формуле (15) функция Φ_1 – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Рассмотрим уравнение Пуассона из (1) в скалярной записи с учетом (4), (5), (11).

$$\dot{\nu}_1 = 0, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \dot{\nu}_3 = -\nu_2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \quad (16)$$

В силу (4) из (16) следует $\nu_1 = a_0$. Геометрическому интегралу из (2) удовлетворим, положив $\nu_2 = a'_0 \sin \mu(t)$, $\nu_3 = a'_0 \cos \mu(t)$, где $\mu(t)$ – вспомогательная переменная, $a'_0 = \sin \theta_0$. На многообразии

$$\nu_1 = a_0, \quad \nu_2 = a'_0 \sin \mu(t), \quad \nu_3 = a'_0 \cos \mu(t) \quad (17)$$

функцию (15) можно записать так

$$\varphi(\mu(t)) = \frac{\Phi_1(\operatorname{ctg} \mu(t)) - ka_0}{a_0^2 A_1}. \quad (18)$$

Подставляя выражения для ν_2, ν_3 из (17) во второе уравнение из (16) и учитывая вид функции (18), получим уравнение для определения переменной $\mu(t)$

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\Phi_1(\operatorname{ctg} \mu) - ka_0} = \frac{t - t_0}{a_0'^2 A_1}. \quad (19)$$

Функции (13) преобразуются к виду

$$\psi(\mu(t)) = \frac{k - a_0 \Phi_1(\operatorname{ctg} \mu(t))}{a_0'^2 A_1}, \quad U(\mu(t)) = \frac{(\Phi_1(\operatorname{ctg} \mu(t)) - a_0 k)^2 + k^2}{2A_1} - E.$$

Решение уравнений (1) таково

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0, a_0' \sin \mu(t), a_0' \cos \mu(t)), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a_0'^2 A_1} \left[\Phi_1(\operatorname{ctg} \mu(t)) (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}) + k (\boldsymbol{\nu} - a_0 \mathbf{a}) \right],$$

где переменная $\mu(t)$ находится путем обращения интеграла (19).

Данное решение описывает прецессионное движение общего вида. Если ось собственного вращения принадлежит горизонтальной плоскости ($a_0 = 0$), то движение представляет собой полурегулярную прецессию первого типа.

4. Случай динамической симметрии тела относительно оси собственного вращения. Пусть $A_2 = A_3 \neq A_1$. Запишем уравнение (12) для рассматриваемого случая.

$$\begin{aligned} & A_2 (A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_2 \nu_3^2) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} (\nu_2^2 + \nu_3^2) - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_3} \nu_1 \nu_3 \right] - \\ & - 2\varphi A_1 A_2 \nu_1 (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) + k \left[\nu_1^2 (2A_2 - A_1) + A_2 (\nu_2^2 + \nu_3^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G &= A_2 (A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_2 \nu_3^2), \\ F &= 2\varphi A_1 A_2 \nu_1 (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) - k \left[\nu_1^2 (2A_2 - A_1) + A_2 (\nu_2^2 + \nu_3^2) \right]. \end{aligned}$$

Введем функцию $V_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$ и от уравнения (20) перейдем сразу к системе уравнений для характеристических линий

$$\frac{d\nu_1}{G(\nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{d\nu_2}{-G\nu_1\nu_2} = \frac{d\nu_3}{-G\nu_1\nu_3} = \frac{d\varphi}{F}. \quad (21)$$

Аналогично случаю сферического распределения масс твердого тела, два первых интеграла системы (21) очевидны:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2, \quad \frac{\nu_3}{\nu_2} = c_2.$$

С учетом указанных первых интегралов из системы характеристик (21) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\nu_1} - \frac{2A_1c_1^2\nu_1}{[A_2c_1^2 - \nu_1^2(A_2 - A_1)](c_1^2 - \nu_1^2)} \varphi = \frac{-k[A_2c_1^2 + \nu_1^2(A_2 - A_1)]}{A_2[A_2c_1^2 - \nu_1^2(A_2 - A_1)](c_1^2 - \nu_1^2)},$$

решение которого таково

$$\varphi(\nu_1) = \frac{[A_2c_1^2 - (A_2 - A_1)\nu_1^2]c_3}{c_1^2 - \nu_1^2} - \frac{\nu_1 k}{A_2(c_1^2 - \nu_1^2)}.$$

Здесь c_3 – произвольная постоянная. Преобразуем это решение с учетом интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2$ к виду

$$\frac{A_2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) (\nu_2^2 + \nu_3^2) + k\nu_1}{A_2 [A_1\nu_1^2 + A_2(\nu_2^2 + \nu_3^2)]} = c_3.$$

Из равенства

$$V_2 \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}, \frac{A_2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) (\nu_2^2 + \nu_3^2) + k\nu_1}{A_2 [A_1\nu_1^2 + A_2(\nu_2^2 + \nu_3^2)]} \right) = 0$$

найдем функцию

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{A_2(\nu_2^2 + \nu_3^2)} \left\{ A_2 \Phi_2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}) [A_1\nu_1^2 + A_2(\nu_2^2 + \nu_3^2)] - k\nu_1 \right\}. \quad (22)$$

В формуле (22) функция Φ_2 – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

На многообразии (17) функция (22) такова

$$\varphi(\mu(t)) = \frac{1}{a_0'^2 A_2} \left\{ A_2 \Phi_2(\text{ctg } \mu(t)) (a_0^2 A_1 + a_0'^2 A_2) - a_0 k \right\}. \quad (23)$$

Следовательно, функцию $\mu(t)$ в данном случае можно определить из уравнения

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{A_2 (a_0^2 A_1 + a_0'^2 A_2) \Phi_2(\text{ctg } \mu) - a_0 k} = \frac{t - t_0}{a_0'^2 A_2}. \quad (24)$$

Запишем скорость прецессии и силовую функцию из (13) для тела с распределением масс $A_2 = A_3 \neq A_1$ с учетом (23):

$$\psi(\mu(t)) = \frac{k - a_0 A_1 A_2 \Phi_2(\text{ctg } \mu(t))}{a_0'^2 A_2},$$

$$U(\mu(t)) = \frac{A_1 A_2^2 \Phi_2^2(\text{ctg } \mu(t)) (a_0^2 A_1 + a_0'^2 A_2) + k [k - 2a_0 A_1 A_2 \Phi_2^2(\text{ctg } \mu(t))]}{2a_0'^2 A_2} - E.$$

Из указанного выражения для $\psi(\mu(t))$ и формулы (23) следует, что в общем случае имеет место прецессия общего вида. Аналогично случаю сферического распределения масс, при угле прецессии θ_0 равном $\frac{\pi}{2}$ скорость прецессии становится постоянной, т.е. движение представляет собой полурегулярную прецессию первого типа.

Вектор симметрии силового поля имеет вид $\boldsymbol{\nu} = (a_0, a'_0 \sin \mu(t), a'_0 \cos \mu(t))$, а угловую скорость тела запишем так

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a_0'^2 A_2} \left\{ A_2 \Phi_2(\text{ctg } \mu(t)) [(a_0'^2 A_1 + a_0'^2 A_1) \mathbf{a} - a_0 A_1 \boldsymbol{\nu}] + k (\boldsymbol{\nu} - a_0 \mathbf{a}) \right\}.$$

В указанных формулах функция $\mu(t)$ находится из интеграла (24).

5. Случай $A_1 = A_3 \neq A_2$. Рассмотрим уравнение (12) при $A_1 = A_3$

$$\begin{aligned} A_1(A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + A_2\nu_2^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} (A_2\nu_2^2 + A_1\nu_3^2) - A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2} \nu_1 \nu_2 - A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_3} \nu_1 \nu_3 \right) - \\ - \varphi A_1 \nu_1 [A_1(A_1 + A_2)(\nu_1^2 + \nu_3^2) - A_2\nu_2^2(A_2 - 3A_1)] + \\ + A_2 k [A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + (2A_1 - A_2)\nu_2^2] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем функцию $V_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$ и составим систему характеристик

$$\frac{d\nu_1}{A_2\nu_2^2 + A_1\nu_3^2} = \frac{d\nu_2}{-A_2\nu_1\nu_2} = \frac{d\nu_3}{-A_1\nu_1\nu_3} = \frac{A_1[A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + A_2\nu_2^2]d\varphi}{H}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} H = \varphi A_1 \nu_1 [A_1(A_1 + A_2)(\nu_1^2 + \nu_3^2) - A_2\nu_2^2(A_2 - 3A_1)] - \\ - A_2 k [A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + (2A_1 - A_2)\nu_2^2]. \end{aligned}$$

Из первых двух равенств системы (26) найдем два первых интеграла

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2, \quad \frac{\nu_3^{A_2}}{\nu_2^{A_1}} = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

С учетом интегралов (27) из системы (26) получим уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{d\nu_2}{A_2\nu_1\nu_2} = \\ = \frac{A_1[A_1 c_1^2 - (A_1 - A_2)\nu_2^2]d\varphi}{\varphi A_1 \nu_1 [A_1(A_1 + A_2)c_1^2 - (A_1 - A_2)^2\nu_2^2] - A_2 k [A_1 c_1^2 + (A_1 - A_2)\nu_2^2]}. \end{aligned}$$

Используя интегралы (27), преобразуем это уравнение к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\nu_2} + \frac{A_1(A_1 + A_2)c_1^2 - (A_1 - A_2)^2\nu_2^2}{A_2\nu_2 [A_1 c_1^2 - (A_1 - A_2)\nu_2^2]} \varphi = \\ = \frac{k [A_1 c_1^2 + (A_1 - A_2)\nu_2^2]}{A_1 \nu_2 [A_1 c_1^2 - (A_1 - A_2)\nu_2^2] \sqrt{c_1^2 - \nu_2^2 - (c_2 \nu_2^{A_1})^{\frac{2}{A_2}}}}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\nu_2) &= (I + c_3) \frac{A_1 c_1^2 - (A_1 - A_2) \nu_2^2}{\nu_2^{\alpha+1}}, \quad c_3 \in \mathbb{R}, \\ I &= \int \frac{k \nu_2^\alpha [A_1 c_1^2 + (A_1 - A_2) \nu_2^2] d\nu_2}{A_1 \sqrt{c_1^2 - \nu_2^2 - \tilde{c}_2^2 \nu_2^{2\alpha}} [A_1 c_1^2 - (A_1 - A_2) \nu_2^2]^2}, \quad \tilde{c}_2 = c_2^{\frac{1}{A_2}}, \quad \alpha = \frac{A_1}{A_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Взять указанный интеграл I при произвольных α не представляется возможным, поэтому положим $k = 0$. С учетом первых интегралов (27) получим

$$\frac{\nu_2^{\alpha+1} \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + A_2 \nu_2^2} = c_3.$$

Из равенства $V_3(c_1, c_2, c_3) = 0$ определим функцию

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \Phi_3 \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3^{A_2}}{\nu_2^{A_1}} \right) \frac{A_1(\nu_1^2 + \nu_3^2) + A_2 \nu_2^2}{\nu_2^{\alpha+1}}.$$

Здесь Φ_3 – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Рассмотрим полученную функцию $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на многообразии (17):

$$\begin{aligned} \varphi(\mu(t)) &= \\ &= \Phi_3 \left((a'_0)^{A_2 - A_1} \frac{\cos^{A_2}(\mu(t))}{\sin^{A_1}(\mu(t))} \right) \frac{A_1 [a_0^2 + a_0'^2 \cos^2(\mu(t))] + a_0'^2 A_2 \sin^2(\mu(t))}{[a_0' \sin(\mu(t))]^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

На основании формулы (29) с помощью равенств $\nu_2 = a_0' \sin(\mu(t))$, $\nu_3 = a_0' \cos(\mu(t))$ из второго равенства в системе (16) получим уравнение $\dot{\mu}(t) = \tilde{\varphi}(\mu(t))$, которое позволяет определить вспомогательную переменную $\mu(t)$:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\tilde{\varphi}(\mu)} = t - t_0. \quad (30)$$

Для получения решения уравнений (1) необходимо на многообразии (17) с учетом условия $k = 0$ последовательно подставить равенство (29) в функции ψ и U из (13). Найденные таким образом функции позволяют определить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (5) и силовую функцию потенциального поля. Компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ указаны в (17). В этих формулах функция $\mu(t)$ находится путем обращения интеграла (30).

6. Заключение. В статье рассмотрены условия существования инвариантных соотношений, описывающих прецессионные движения общего вида твердого тела, имеющего неподвижную точку. На основании подходов решения обратных задач динамики с помощью этих ИС построена силовая функция, характеризующая потенциальное поле. Получено разрешающее дифференциальное уравнение в частных производных для скорости собственного вращения тела, исследованы решения этого уравнения при дополнительных предположениях относительно распределения масс твердого тела и положения оси собственного вращения.

1. Харламов П.В. Современное состояние и перспектива развития классических задач динамики твёрдого тела // Механика твёрдого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
2. Горячев Д.Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твёрдого тела. – Варшава, 1910. – 62 с.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твёрдого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
5. Горр Г. В., Мазнев А. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2018. – 265 с.
8. Суслев Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
9. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels // NY: Johnson Reprint Corp., 1965. – 966 s.
10. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
11. Горр Г.В. Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, вып. 3. – С. 451–458.
12. Горр Г. В. О прецессиях гиростата в потенциальном поле сил // Механика твёрдого тела. – 1978. – Вып. 11. – С. 64–67. – **38**, вып. 3. – С. 451–458.
13. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твёрдого тела и в динамике систем связанных твёрдых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
14. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики тяжёлого твёрдого тела с одной закреплённой точкой // Диф. уравнения. – 1972. – **8**, № 8. – С. 1357–1362.
15. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твёрдого тела (теория, результаты, комментарии). – М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
16. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – М., Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 359 с.

G. A. Kotov

About existence conditions of the rigid body's with fixed point precessions, acted in the potential field of forces.

The conditions of existence of precession motions for rigid body acted in the potential field of forces are studied. On the base of inverse mechanics problems solving the force function was built. This function based on the invariant relations, which describe general case precessions. Also the self-rotation function was obtained. The solutions of partial differential equation which is the solving equation of studied problem were investigated.

Keywords: *potential forces, general case precessions, partial differential equation.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры», Макеевка
kotov_ga@rambler.ru

Получено 20.11.18

УДК 519.713, 511.4, 517.938

©2018. А.Н. Курганский, И. Потапов

ГРАФЫ ДЕ БРЁЙНА И СТЕПЕНИ ЧИСЛА $3/2$

Рассматривается множество $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ бесконечных в обе стороны слов ξ в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ с разделяющим на целую левую $\lfloor \xi \rfloor$ дробную правую $\{\xi\}$ части знаком (запятой). Для таких слов определено умножение на целые числа и деление на 6 как умножение и деление столбиком в системе счисления 6. В работе развивается конечно-автоматный подход анализа последовательностей вида $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ для слов $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ совпадающих по ряду свойств с Z -числами в $3/2$ -проблеме Малера. Каждая такая последовательность Z -слов, записываемых друг под другом так, чтобы одинаковые разряды находились в одном столбце, представляет собой бесконечное 2-мерное слово в алфавите \mathbb{Z}_6 . Конечно-автоматное представление столбцов целой части таких 2-мерных Z -слов обладают структурными свойствами графа де Брёйна. Такое представление доставляет ряд достаточных условий пустоты множества Z -чисел. Подход основывается на ряде результатов работы [1], авторы которой применяют клеточные автоматы для анализа последовательностей $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$, где $\xi \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: распределение по модулю 1, Z -числа, конечные автоматы, кусочно-аффинные отображения

1. Введение. Известно [10], что последовательность $\{\xi\alpha^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, равномерно распределена в интервале $[0, 1)$ для почти всех положительных $\xi \in \mathbb{R}$, где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x . При этом существуют числа ξ , для которых указанная последовательность ведёт себя иначе. Отсюда возникают задачи о свойствах $\{\xi\alpha^i\}$ для конкретных ξ и α , а также обратные задачи о существовании ξ и α , реализующих $\{\xi\alpha^i\}$ с заданными свойствами. Примером обратной задачи является открытая $3/2$ -проблема Малера [9] о существовании Z -чисел ξ таких, что последовательность $\{\xi(3/2)^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, полностью лежит в интервале $[0, 1/2)$.

В работе [1], развивающей результаты работ [3, 4, 5, 6], рассматривается множество $Z_{p/q}(S)$ таких ξ , что последовательность $\{\xi(3/2)^i\}$ полностью лежит в S , где $S \subseteq [0, 1)$ является некоторым конечным объединением интервалов, $p, q \in \mathbb{N}$, и для него в контексте $3/2$ -проблемы Малера ставится задача о поиске как можно большего множества S , при котором $Z_{p/q}(S) = \emptyset$, и как можно меньшего множества S , при котором $Z_{p/q}(S) \neq \emptyset$. Подходы к решению данной задачи основываются на исследовании клеточных автоматов, связь которых с $3/2$ -проблемой Малера устанавливается в [7, 8].

В настоящей работе в рамках развития результатов работы [2] предлагается конечно-автоматный подход к проблематике $3/2$ -проблемы Малера. Рассматривается множество $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ бесконечных в обе стороны слов ξ в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ с разделяющим на условно целую $\lfloor \xi \rfloor$ (левую) и дробную $\{\xi\}$ (правую) части знаком (запятой). Для таких слов определено умножение на целые числа и деление на 6, содержательно совпадающее с умножением и делением столбиком в системе счисления 6. В работе развивается конечно-автоматный метод анализа

последовательностей вида $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ для слов $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$, совпадающих по ряду свойств с Z -числами в 3/2-проблеме Малера. Такая последовательность Z -слов, записанных друг под другом так, чтобы одинаковые разряды находились в одном столбце, представляет собой бесконечное 2-мерное слово в алфавите \mathbb{Z}_6 . Конечно-автоматное представление столбцов целой части таких 2-мерных Z -слов обладает структурными свойствами графа де Брёйна. Такое представление доставляет ряд наглядных достаточных условий пустоты множества Z -чисел. Подход основывается на идее предложения 2.5 работы [1], авторы которой применяют клеточные автоматы для анализа последовательностей $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$, где $\xi \in \mathbb{R}$. Обобщенная форма предложения 2.5 работы [1] в настоящей работе представлена теоремой 6.

2. Обозначения и определения. Как обычно, через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}$ and \mathbb{R} обозначаем натуральные, целые, простые, рациональные и действительные числа. Используем следующие сокращения и обозначения: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n^+ = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathbb{Z}_n^- = \{-(n-1), (n-2), \dots, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}^\pm = \mathbb{Z}$.

Фигурные скобки используются для записи множеств, а также в записи $\{x\}$ дробной части числа x . Через $\lfloor x \rfloor$ обозначаем наибольшее целое число, меньшее x . Через 2^M обозначаем булеан множества M . Если $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : X' \rightarrow Y'$, то gf обозначает суперпозицию функций: $gf : X \rightarrow Z$, а $f \times h$ декартово произведение функций. Если $A \subseteq X$, то $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Для работы с 1-мерными и 2-мерными словами будут использоваться следующие средства выделения их фрагментов с помощью индексов, частично заимствованные из языка Python, инструментами которого проводились вычислительные эксперименты данной работы. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $c < d$. Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} [a : b] : \mathbb{Z}_{b-a} &\rightarrow \{a, a+1, \dots, b-1\}, & [a : b](x) &= x + a, \\ [a : +\infty] : \mathbb{Z}^+ &\rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq a\}, & [a : +\infty](x) &= x + a, \\ [-\infty : b] : \mathbb{Z}^- &\rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x < b\}, & [-\infty : b](x) &= x + b, \\ [a : b, c : d] &= [a : b] \times [c : d]. \end{aligned}$$

Через $[\cdot]$ обозначим тождественное отображение на \mathbb{Z}^\pm . Также используем сокращения записи: $[a] = [a : a+1]$, $[\cdot b] = [-\infty : b]$, $[a \cdot] = [a : +\infty]$.

Множество $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ рассматриваем как модуль над кольцом \mathbb{Z} . Элементы \mathbb{Z}^2 представляем вектор-столбцами. В отображениях вида $f : \mathbb{Z} \rightarrow X$, $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow X$ элементы из \mathbb{Z} и \mathbb{Z}^2 называем координатами их образов в X .

Одномерные слова. Под одномерным словом в алфавите A мы понимаем то же, что и в теории формальных языков. Однако, поскольку в работе речь идёт о словах в алфавите цифр, то есть о числах, в том числе с разделяющим целую и дробную части знаком, то слово $w \in A^*$ длины n мы также будем интерпретировать как функцию $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$. Например, пусть $A = \mathbb{Z}_{10}$ и $w = 314159$. Тогда $w(0) = 9$, $w(5) = 3$, а $w[1 : 4] = 415$. Под бесконечными словами мы понимаем отображения: $w : \mathbb{Z} \rightarrow A$ (бесконечное в обе стороны), $w : \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ (бесконечное влево),

$w : \mathbb{Z}^- \rightarrow A$ (бесконечное вправо). К примеру, число $w = 3.14159$ мы понимаем как отображение из $\mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_6^-$ в алфавит цифр. В частности, $w(-2) = 4$. Слова любой размерности в алфавите A будем называть A -словами. Поскольку в работе речь идёт в основном о \mathbb{Z}_6 -словах, то мы будем опускать указание на алфавит, когда он понятен из контекста.

Двумерные слова. Пусть $K \subseteq \mathbb{Z}^2$. Под 2-мерным словом u в алфавите A понимаем любое отображение $u : K \rightarrow A$. Если K конечно или бесконечное, то u называется, соответственно, конечным или бесконечным.

Под конечным 2-мерным прямоугольным словом u размера $n \times m$ в алфавите A понимаем отображение $u : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow A$. Так как в работе под словами понимаются числовые объекты, то мы используем такую индексацию цифр слова u :

$$u = \begin{pmatrix} u_{0,m-1} & u_{0,m-2} & \dots & u_{0,0} \\ u_{1,m-1} & u_{1,m-2} & \dots & u_{1,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,m-1} & u_{n-1,m-2} & \dots & u_{n-1,0} \end{pmatrix}.$$

Понимаем, что $u(i, j) = u[i, j] = u_{i,j}$, при этом $u(i, j)$ является цифрой, а $u[i, j]$ однобуквенным словом.

Бесконечными прямоугольными 2-мерными словами являются следующие отображения: $u : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}^\sigma \rightarrow A$, $u : \mathbb{Z}^\sigma \times \mathbb{Z}_m \rightarrow A$, $u : \mathbb{Z}^\sigma \times \mathbb{Z}^{\sigma'} \rightarrow A$, где $\sigma, \sigma' \in \{-, +, \pm\}$. Прямоугольным подсловом (фрагментом) размера $n \times m$ 2-мерного слова u называем суперпозицию $u[i : i+n, j : j+m]$ отображения u и отображения $[i : i+n, j : j+m]$ для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $x \in \mathbb{Z}_6$. Под $x^n, x^{\pm\omega}, x^{+\omega}, x^{-\omega}$ понимаем следующие всюду определенные слова: $x^n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \{x\}$, $x^{\pm\omega} : \mathbb{Z}^\pm \rightarrow \{x\}$, $x^{-\omega} : \mathbb{Z}^- \rightarrow \{x\}$, $x^{+\omega} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{x\}$. Например, $0^5 = 00000$, $0^{+\omega} = \dots 000$, $0^{-\omega} = 000 \dots$, $0^{\pm\omega} = \dots 0, 0 \dots$, где запятая в выражении для $0^{\pm\omega}$ разделяет условные дробную (справа) и целую (слева) части.

ЗАМЕЧАНИЕ. Запись слова $w = a_{n-1}a_{n-1} \dots a_0$, $a_i \in A$, мы понимаем как функцию $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ такую, что $w(i) = w[i] = a_i$. В строковой записи $w = a_{n-1}a_{n-1} \dots a_0$ слова $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ начало координат мы приписываем её крайнему правому символу. Таким образом, мы используем принятую для целых чисел нумерацию цифр. Исключения будут оговариваться. Например, одним из способов указания на другую нумерацию будет разделяющий на целую и дробную часть числа знак. Исходя из сказанного, должно быть понятно, если это важно, как происходит нумерация цифр при конкатенации или сцеплении слов. Операция сцепления слов определена ниже.

Под транспонированием слова u понимаем такое слово u^T , что $u^T[i, j] = u[j, i]$. Вообще, для прямоугольных 2-мерных слов заимствуем термины из языка матриц.

Горизонтальное сцепление слов. Наряду с конкатенацией в работе используется операция сцепления слов. Пусть слова $u = (v_1v_2 \dots v_n)$ и $u' = (w_1w_2 \dots w_m)$ имеют соответственно размеры $r \times n$ и $r \times m$, где v_i и w_j r -мерные столбцы. Если $v_n = w_1$, то $u \circ u' = (v_1v_2 \dots v_nw_2 \dots w_m)$, иначе $u \circ u'$ не определено. Операцию

о назовём горизонтальным сцеплением слов. Для примера: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Пусть A и B множества слов, тогда $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\}$ и

$$\begin{aligned} A^{1^\circ} &= A, & A^{n^\circ} &= A^{(n-1)^\circ} \circ A, \\ A^{-\omega^\circ} &= A \circ A \circ \dots, & A^{+\omega^\circ} &= \dots \circ A \circ A, \\ A^{\pm\omega^\circ} &= A^{+\omega^\circ} \circ A^{-\omega^\circ} = \dots \circ A \circ A \circ \dots \end{aligned}$$

В $A^{\pm\omega^\circ}$ по умолчанию, если не оговаривается другое, подразумеваем привязку к нулевому разряду крайнего правого символа $A^{+\omega^\circ}$.

Вертикальное сцепление слов. Пусть слова u и u' имеют размеры $n \times r$ и $m \times r$. При этом последняя строка слова u совпадает с верхней строкой слова u' . Тогда вертикальное сцепление $u \bullet u'$ определяется так: $u \bullet u' = (u'^T \circ u^T)^T$. Для примера: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Как и для \circ определяем обозначения $A \bullet B$, A^{n^\bullet} , $A^{-\omega^\bullet}$, $A^{+\omega^\bullet}$, $A^{\pm\omega^\bullet}$.

Отношения одномерных слов в двумерных словах. Всякое множество двумерных слов W устанавливает отношения между столбцами и строками. Например, множество W двумерных слов вида $w : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ устанавливает бинарное отношение R на строках в алфавите A : $(w, w') \in R$, если $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \in W$. Аналогично, множество W двумерных слов вида $w : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow A$ устанавливает бинарное отношение на столбцах в алфавите A . В работе не будет использоваться дополнительное обозначение для таких отношений. Само множество W будет интерпретироваться в зависимости от контекста как то или иное, но в явном виде оговариваемое, отношение между одномерными словами.

Универсальное множество слов $\mathcal{U}_{3/2}$. Для бесконечных в обе стороны \mathbb{Z}_6 -слов формально определяем операцию сложения и вычитания столбиком, а также умножение столбиком на целые числа и деление на 6 как это делается для чисел в 6-ричной системе счисления. Через $\mathcal{U}_{3/2}$ обозначаем множество всех 2-мерных слов $u : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, строки которых представляют собой последовательности 1-мерных \mathbb{Z}_6 -слов, получаемых друг из друга умножением предыдущего на $3/2$:

$$\mathcal{U}_{3/2} = \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \mid \forall i \in \mathbb{Z} \quad u[i+1, :] = 3/2 u[i, :]\}.$$

Обозначим:

$$\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m} = \{u[i : i+n, j : j+m] \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}, i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 2}, \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы множеств $\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times n}$ и $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$ назовём, соответственно, горизонтальными и вертикальными n -мерными продукционными парами.

Пусть A – преобразование параллельного переноса пространства \mathbb{Z}^2 , то есть для некоторого $a \in \mathbb{Z}^2$ и любого $x \in \mathbb{Z}^2$ $A(x) = x + a$. Тогда для любого $u \in \mathcal{U}_{3/2}$ верно $uA \in \mathcal{U}_{3/2}$. Таким образом, справедливы леммы 1, 2.

Лемма 1. *Выполняется равенство: $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m} = \{u[0 : n, 0 : m] \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}$.*

Лемма 2. Для всех $i, j \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{U}_{3/2}[:, i] = \mathcal{U}_{3/2}[:, j]$, $\mathcal{U}_{3/2}[i, :] = \mathcal{U}_{3/2}[j, :]$.

Пусть линейные преобразования $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ и $B : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ заданы матрицами: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то есть $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}$. Зафиксируем обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_{3/2} &= \{uA \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}, & \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times m} &= \left\{ u[0:n, 0:m] \mid u \in \dot{\mathcal{U}}_{3/2} \right\}, & \dot{\mathcal{B}} &= \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times 2}, \\ \dot{\mathcal{U}}_{3/2} &= \{uB \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}, & \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times m} &= \left\{ u[0:n, 0:m] \mid u \in \dot{\mathcal{U}}_{3/2} \right\}, & \dot{\mathcal{B}} &= \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times 2}, \\ \mathcal{B}^{00} &= \dot{\mathcal{B}}^{00} = \mathcal{B}^{00} = \mathcal{I}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если для слов $u, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ и некоторого аффинного преобразования $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ выполняется $w = uA$, то называем слова u и w конгруэнтными и пишем $u \sim w$. Отношение \sim является эквивалентностью. Пусть U, W множества слов. Если для любого $u \in U$ существует $w \in W$ такое, что $u \sim w$, и наоборот, то пишем $U \sim W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы множеств $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ и $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ назовём диагонально, соответственно, восходящими и нисходящими n -мерными продукционными парами. Иногда элементы из $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ просто называем диагональными продукционными парами.

V-таблицы и H-таблицы. Используем следующее обозначение:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & \dots & c_m \\ \hline a_{m+1} & b_{m+1} & \dots & c_{m+1} \\ a_{m+2} & b_{m+2} & \dots & c_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & c_n \end{array} \right] = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_i & b_i & \dots & c_i \\ a_j & b_j & \dots & c_j \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & b_{m+1} & b_{m+2} & \dots & b_n \\ \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_n \end{array} \right] = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_i & a_j \\ b_i & b_j \\ \dots & \dots \\ c_i & c_j \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Представление декартова произведения столбцов в форме левой части в (2) назовём V -таблицей, а декартово произведение строк в форме левой части в (1) назовём H -таблицей. В H -таблице T множество строк над разделяющей чертой (соответственно: под чертой) назовём верхней (нижней) компонентой таблицы и будем обозначать $\pi_U(T)$ ($\pi_O(T)$). В V -таблице T множество столбцов слева от разделяющей черты (соответственно: справа) назовём левой (правой) компонентой таблицы и будем обозначать $\pi_L(T)$ ($\pi_R(T)$).

Всякое конечное множество W горизонтальных продукционных пар представимо в виде объединения некоторых H -таблиц. Объединение таблиц мы обозначаем простым приписыванием их друг к другу, как показано, например, в леммах 5,

6, 8 и т.д. Если каждая строка в верхних (нижних) компонентах таблиц встречается только в одной H -таблице, то такое представление множества W назовём представлением в виде H -таблиц с уникальными верхними (нижними) компонентами. Аналогично, для множеств вертикальных продукционных пар используем представление V -таблицами с уникальными левыми и правыми компонентами.

Представляя множество продукционных пар с помощью H -таблиц с уникальной верхней (нижней) компонентой, мы подразумеваем, что различные таблицы различаются в нижних (верхних) компонентах, то есть нет таких двух таблиц, которые можно представить одной. Аналогичное подразумевается для V -таблиц.

Поскольку V -таблицы и H -таблицы являются формой представления множеств, соответственно, вертикальных и горизонтальных продукционных пар, то для H -таблиц очевидным образом определена операция горизонтального сцепления \circ , а для V -таблиц операция вертикального сцепления \bullet .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W – множество двумерных слов. Слово $w \in W$ назовём горизонтальным тупиком в W , если $W^{+\omega^\circ} \circ w \circ W^{-\omega^\circ} = \emptyset$. Слово $w \in W$ назовём вертикальным тупиком в W , если $W^{+\omega^\bullet} \bullet w \bullet W^{-\omega^\bullet} = \emptyset$.

Лемма 3. $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m}$ не содержит горизонтальных и вертикальных тупиков.

Доказательство. Прямо следует из определения $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m}$. \square

Лемма 4. Если W не содержит горизонтальных (вертикальных) тупиков, то W^{n° (W^{n^\bullet}) не содержит горизонтальных (вертикальных) тупиков, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений. \square

3. n -мерные продукционные пары. Пусть двумерное \mathbb{Z}_6 -слово

$$\begin{array}{cccccc} a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \\ & & c_4 & c_3 & c_2 & & \\ & & & d_3 & & & \end{array} .$$

такое, что каждая её последующая строка получена из предыдущей умножением на $3/2$ и удалением крайних цифр согласно схеме слова. Леммы 5, 6, 8, 10 и 11 получены перебором всех слов $a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ в алфавите \mathbb{Z}_6 .

Лемма 5. Множество \mathcal{I} в форме H -таблиц с уникальными нижними компонентами имеет вид:

$$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 0 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} .$$

Лемма 6. Множество \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальными нижними ком-

понентами имеет вид:

0 0	0 1	0 2	0 3	1 0	1 1	1 4	1 5	0 0	0 2	1 0	1 4
2 2	2 3	2 4	2 5	3 2	3 3	3 0	3 1	2 2	2 4	3 2	3 0
4 4	4 5	4 0	4 1	5 4	5 5	5 2	5 3	2 3	2 5	3 3	3 1
0 0	0 2	0 3	1 5	2 3	2 5	1 0	2 2	4 4	4 0	5 4	5 2
3 0	3 2	3 3	4 5	5 3	5 5	4 0	5 2	4 5	4 1	5 5	5 3
								0 1	1 4	2 4	1 1
								3 1	4 4	5 4	4 1

Рассмотрим 2-мерные продукционные пары \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальной нижней компонентой. Обозначим здесь это множество таблиц через $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Все 12 таблиц в нижней компоненте содержат ровно 2 строки. Среди них 8 таблиц в верхней компоненте содержат 3 строки, назовём их H -0235-таблицами, а 4 таблицы 6 строк, назовём их H -14-таблицами. H -14-таблицы в крайнем правом столбце верхней компоненты содержат все цифры $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Разобьём H -14-таблицы на строки следующим образом так, чтобы в крайнем правом столбце стояли либо $\{1, 3, 5\}$, либо $\{0, 2, 4\}$:

0 0	0 1	0 2	0 3	1 0	1 1	1 4	1 5
2 2	2 3	2 4	2 5	3 2	3 3	3 0	3 1
4 4	4 5	4 0	4 1	5 4	5 5	5 2	5 3
0 1	0 1	1 4	1 4	2 4	2 4	1 1	1 1
3 1	3 1	4 4	4 4	5 4	5 4	4 1	4 1

В такой форме \mathcal{B} представляется с помощью 16 таблиц, которые обозначим так же $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Каждая таблица $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ имеет свойства, сформулированные в виде следующей леммы.

Лемма 7. *Каждая таблица $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ имеет парную ей таблицу в $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ с такой же верхней компонентной $\pi_U(T)$. Множество элементов любого столбца в $\pi_U(T)$ равно либо $\{0, 2, 4\}$, либо $\{1, 3, 5\}$. $\pi_U(T)$ имеет ровно три строки и они попарно различаются в каждом столбце. Строки нижней компоненты $\pi_O(T)$ отличаются только в крайнем левом столбце. Если множество элементов столбца в $\pi_U(T)$ равно $\{0, 2, 4\}$, то для элементов $\{x, y\}$ соответствующего столбца в $\pi_O(T)$ выполняется либо $\{x, y\} \subseteq \{0, 3\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$. Если же множество элементов столбца в $\pi_U(T)$ равно $\{1, 3, 5\}$, то соответственно либо $\{x, y\} \subseteq \{2, 5\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$.*

Пусть $(n - 1)$ -мерная H -таблица T удовлетворяет лемме 7. Тогда множество $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \circ T$ состоит из 4 n -мерных H -таблиц с такими же свойствами. Отсюда следует

Теорема 1. *Множество H -таблиц с уникальными нижними компонентами, представляющее множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ}$, состоит из $3 \cdot 4^{n-1}$ элементов. При этом $2 \cdot 4^{n-1}$ H -таблиц (H -0235-таблиц) содержат ровно 3 строки и 4^{n-1} таблиц (H -14-таблиц) ровно 6 строк в верхних компонентах. H -14-таблицы в крайнем правом столбце верхней компоненты содержат все символы из алфавита \mathbb{Z}_6 . Если H -14-таблицы раздвоить так, чтобы крайний правый столбец таблиц состоял либо из $\{1, 3, 5\}$, либо из $\{0, 2, 4\}$, то все таблицы будут удовлетворять свойствам леммы 7.*

Лемма 10. Множество \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальными верхними компонентами имеет вид:

0 4	0 5	0 3	1 0	1 1	1 2	0 0	0 1	0 2	1 3	1 4	1 5
2 4	2 5	2 3	3 0	3 1	3 2	2 0	2 1	2 2	3 3	3 4	3 5
4 4	4 5	4 3	5 0	5 1	5 2	4 0	4 1	4 2	5 3	5 4	5 5
0 0	0 1	0 4	2 0	2 1	2 3	0 0	0 1	0 3	1 1	1 3	1 4
0 1	0 2	0 5	2 1	2 2	2 4	0 1	0 2	0 4	1 2	1 4	1 5
3 3	3 4	3 1	5 3	5 4	5 0	1 3	1 4	1 0	2 4	2 0	2 1
3 4	3 5	3 2	5 4	5 5	5 1	1 4	1 5	1 1	2 5	2 1	2 2
						3 3	3 4	3 0	4 4	4 0	4 1
						3 4	3 5	3 1	4 5	4 1	4 2
						4 0	4 1	4 3	5 1	5 3	5 4
						4 1	4 2	4 4	5 2	5 4	5 5

Лемма 11. Множество $\mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2}$ в форме V -таблиц с уникальными левыми и правыми компонентами имеет вид:

0 0 2 2 4 4	0 0 0 0 1 1 1 2 2	0 0 2 2 4 4	2 3 3 3 3
0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 1 2 2 3 3	0 0 0 0 0 0	4 4 4 5 5
0 3 0 3 0 3	0 1 1 2 2 3 4 4 5	1 4 1 4 1 4	0 0 1 1 2
1 1 3 3 5 5	0 0 0 1 1 1 1	0 0 2 2 4 4	5 5
1 1 1 1 1 1	3 3 4 4 4 5 5	1 1 1 1 1 1	2 2
2 5 2 5 2 5	1 2 3 3 4 4 5	2 5 2 5 2 5	0 1
1 1 3 3 5 5	2 2 2 2 3 3 3 4 4	1 1 3 3 5 5	4 5 5 5 5
2 2 2 2 2 2	0 0 1 1 1 2 2 3 3	2 2 2 2 2 2	4 4 4 5 5
0 3 0 3 0 3	0 1 1 2 2 3 4 4 5	1 4 1 4 1 4	0 0 1 1 2
0 0 2 2 4 4	1 1 2 2 2 3 3 3 3	0 0 2 2 4 4	0 0 0 0 1
3 3 3 3 3 3	2 2 3 3 4 4 4 5 5	3 3 3 3 3 3	0 0 1 1 1
2 5 2 5 2 5	0 1 1 2 3 3 4 4 5	1 4 1 4 1 4	3 4 4 5 5
0 0 2 2 4 4	4 4 4 4 5 5 5	1 1 3 3 5 5	0 0
4 4 4 4 4 4	0 0 1 1 1 2 2	4 4 4 4 4 4	3 3
0 3 0 3 0 3	0 1 1 2 2 3 4	0 3 0 3 0 3	4 5
1 1 3 3 5 5	3 3 4 4 4 5 5 5 5	1 1 3 3 5 5	2 2 2 2 3
5 5 5 5 5 5	2 2 3 3 4 4 4 5 5	5 5 5 5 5 5	0 0 1 1 1
2 5 2 5 2 5	0 1 1 2 3 3 4 4 5	1 4 1 4 1 4	3 4 4 5 5

Лемма 12. (о симметрии) Множество \mathcal{B} , \mathcal{a} , следовательно, и \mathcal{B} , \mathcal{B} , $\mathcal{U}_{3/2}$, инвариантно относительно преобразования $f(x) = 5 - x$ алфавита \mathbb{Z}_6 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Языки W и W^{dual} в алфавите \mathbb{Z}_6 назовём двойственными, если один из другого получается преобразованием $f(x) = 5 - x$ алфавита.

Следствие 3. Верно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{U}_{3/2} = \mathcal{U}_{3/2}^{dual}$.

Лемма 13. Верно следующее:

1. Если $\begin{pmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \\ c_1 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \\ c_2 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2}$, то $b_1 = b_2$.
2. Если $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то $b_1 = b_2$.
3. Если $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то $b_1 = b_2$.

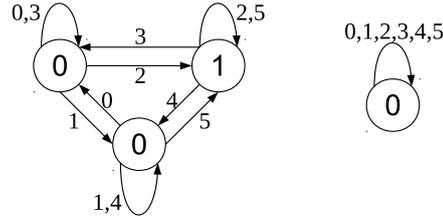


Рис. 1. Автомат (слева), порождающий язык верхних и язык нижних строк (читаемых справа налево) слов из $\mathcal{B}^{n\circ}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Автомат (справа), порождающий язык верхних и язык нижних строк слов из $\mathcal{B}^{n\circ}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Он же для языка верхних и языка нижних строк слов из $\mathcal{B}^{n\circ}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Все состояния начальные и заключительные. Пустые слова не принимаются во внимание.

Доказательство. Следует из леммы 11 и теоремы 2. \square

Лемма 14. Верно, что $(\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать $(\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$, достаточно показать, что из $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ следует $\begin{pmatrix} c & b \\ e & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, и, наоборот, из $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ следует $\begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. В силу конечности рассматриваемых объектов эти факты устанавливаются экспериментально. Отношение $(\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ доказывается аналогично. \square

Лемма 15. Множества $\mathcal{B}^{n\circ}$, $\mathcal{B}^{n\circ}$, $\mathcal{B}^{n\circ}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$ не содержат вертикальных тупиков, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. По конечным множествам \mathcal{B} , \mathcal{B} , \mathcal{B} построим автоматы, допускающие языки нижних строк и языки верхних строк слов соответственно из $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{n\circ}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{n\circ}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{n\circ}$. Автоматы показаны на рисунке 1. Из построений следует, что языки верхних и языки нижних строк совпадают для каждого рассматриваемого множества. \square

Лемма 16. Верны равенства:

$$\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}, \quad \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}, \quad \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}.$$

$$\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}, \quad \mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}, \quad \mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}.$$

Доказательство. Первые три равенства доказываются экспериментально.

Включение $\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] \subseteq \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$ верно по определению. Обратное включение верно в силу равенства $\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}$, так как если $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то b_1 формально получается умножением abc на $3/2$, а значит вся нижняя строка $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$ получается из верхней умножением на $3/2$. Далее отсюда следует, что $\mathcal{U}_{3/2} = (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$. Теперь оставшиеся равенства $\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$, $\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$ следуют из $(\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ и того, что $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega\circ}$ не содержат вертикальных тупиков. \square

Следствие 4. *Справедливы равенства:*

$$\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times n} = \mathcal{B}^{(n-1)^\circ}, \quad \mathcal{U}_{3/2} = (\mathcal{B}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}.$$

$$\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n} = \dot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\circ}, \quad \dot{\mathcal{U}}_{3/2} = (\dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet},$$

$$\ddot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n} = \ddot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\circ}, \quad \ddot{\mathcal{U}}_{3/2} = (\ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}.$$

Заметим, что $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2} \neq \mathcal{B}^{(n-1)^\bullet}$, $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times 2} \neq \dot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\bullet}$, $\ddot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times 2} \neq \ddot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\bullet}$.

Через \mathcal{L} обозначим частичное отображение на словах такое, что $\mathcal{L}(x_1x_2x_3) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & x_1 \\ b & x_2 \\ c & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2},$$

а для $n \geq 3$ $\mathcal{L}(x_1x_2 \dots x_n) = \mathcal{L}(x_1x_2x_3)\mathcal{L}(x_2x_3x_4) \dots \mathcal{L}(x_{n-2}x_{n-1}x_n)$. И, наконец, для бесконечных слов: пусть $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $c' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, тогда $\mathcal{L}(c) = c'$, если для любого $i \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{L}(c(i-1)c(i)c(i+1)) = c'(i)$.

Следствие 5. *Отображение \mathcal{L} является функцией.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово w назовём правильным, если определена функция $\mathcal{L}(w)$. При этом, если $w = abc \in \mathbb{Z}_6^3$ правильное слово, то правильными также назовём слова ab , bc , a , b , c и пустое слово.

Теорема 3. *Если слово w правильное, то и $\mathcal{L}(w)$ правильное.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для всех слов w длины 5. Поскольку их конечное число, то лемма устанавливается экспериментально. \square

Лемма 17. *Для любого $n > 1$ правые столбцы слов из \mathcal{B}^{n^\bullet} правильные.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для $n = 2$. Этот факт устанавливается экспериментально. \square

Лемма 18. *Пусть $W = \mathcal{B}^{(n-1)^\bullet}$, $n > 1$. Множество крайних левых столбцов слов из W содержится во множестве крайних правых столбцов слов из W .*

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово

$$\begin{pmatrix} b_{-1} & c_{-1} \\ b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n+2} & c_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n+3)^\bullet}.$$

Это значит также, что

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n-1)^\bullet}.$$

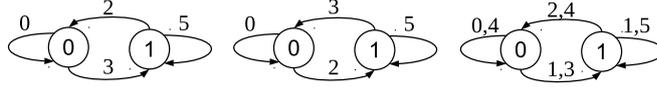


Рис. 2. Автоматы, порождающие все правильные слова в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ (читаемые сверху вниз – слева, читаемые снизу вверх – посередине) и читаемые сверху вниз в алфавите \mathbb{Z}_6 (справа). В автоматах все состояния начальные и заключительные.

По лемме 17 и теореме 3 слово $b_0b_1 \dots b_{n+1}$ правильное.

Пусть $a_1a_2 \dots a_n = \mathcal{L}(b_0b_1 \dots b_{n+1})$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n-1)\bullet}.$$

Что и требовалось доказать. \square

Следствие 6. Множество всех горизонтально нетупиковых слов из $\mathcal{B}^{(n-1)\bullet}$ равно $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$.

Доказательство. Понятно, что $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2} \subseteq W$. Пусть $w \in W^{\pm\omega}$. В силу построений каждая строка в w получается из предыдущей умножением на $3/2$. Следовательно $W \subseteq \mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$. Что и требовалось доказать. \square

Лемма 19. Автоматы, порождающие правильные слова в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ и в алфавите \mathbb{Z}_6 имеют вид, как показано на рисунке 2 слева и справа, соответственно.

Доказательство. Автоматы строятся по множеству \mathcal{B} . \square

4. n-мерные 0235-продукционные пары.

Продукционные пары, крайние правые столбцы которых не содержат символов 1 и 4, назовём 0235-продукционными парами. Продукционные пары, крайние правые столбцы которых не содержат символов 1, 4, 5, назовём 023-продукционными парами.

Лемма 20. Список 1-мерных 0235-продукционных пар представляется в виде:

$$\mathcal{I}_{0235} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Список 1-мерных 023-продукционных пар представляется в виде:

$$\mathcal{I}_{023} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим множества 1-мерных 0235-продукционных и 023-продукционных пар через \mathcal{I}_{0235} и \mathcal{I}_{023} , соответственно. По определению положим, что $\mathcal{I}_{0235}^{0\bullet} = \{0, 2, 3, 5\}$, $\mathcal{I}_{0235}^{1\bullet} = \mathcal{I}_{0235}$.

Следствие 7. *Список всех 3-мерных вертикальных продукционных пар с левыми столбцами в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ имеет в форме V-таблиц следующий вид:*

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array} \right]. \end{array}$$

Лемма 21.

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{array} \right].$$

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 3 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{array} \right].$$

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 5 \end{array} \right].$$

Теорема 4. *H-таблицы, представляющие множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$, имеют уникальные верхние и нижние компоненты, в которых ровно по две строки. В таком представлении $2 \cdot 6^{n-1}$ таблиц. В каждой таблице строки $x_n x_{n-1} \dots x_1$ и $x'_n x'_{n-1} \dots x'_1$ верхней компоненты, как и строки $y_n y_{n-1} \dots y_1$ и $y'_n y'_{n-1} \dots y'_1$ нижней компоненты отличаются только в крайнем левом столбце. При этом, если $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$, то $y_i, y'_i \in \{1, 2, 4, 5\}$, а если $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, то $y_i, y'_i \in \{0, 1, 3, 4\}$.*

Доказательство. Доказательство в форме математической индукции легко следует из леммы 21 для $\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235}$ и леммы 8 для \mathcal{B} . \square

Следствие 8. *В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ ровно $4 \cdot 6^{n-1}$ различных строк.*

Множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ получается из представления $\mathcal{B}^{(n-1)}$ в форме H-таблиц удалением всех H-14-таблиц и удалением в каждой H-0235-таблице из верхней компоненты единственной строки, заканчивающейся на 1 или 4. Отсюда следует

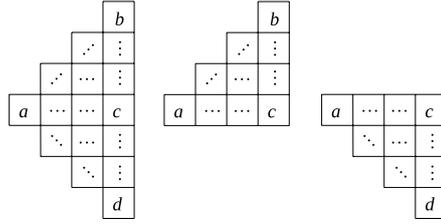


Рис. 3. Иллюстрация вида фрагментов слов к теореме 6.

Теорема 5. *H -таблицы, представляющие множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$, имеют уникальные верхние и нижние компоненты, в которых ровно по две строки. Всего в представлении $2 \cdot 4^{n-1}$ таблиц. В каждой таблице строки $x_n x_{n-1} \dots x_1$ и $x'_n x'_{n-1} \dots x'_1$ верхней компоненты отличаются в каждом столбце, при этом $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$ или $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, $1 \leq i \leq n$. В каждой таблице строки $y_n y_{n-1} \dots y_1$ и $y'_n y'_{n-1} \dots y'_1$ нижней компоненты отличаются только в крайнем левом столбце, при этом $y_n, y'_n \in \{0, 3\}$, или $y_n, y'_n \in \{2, 5\}$, или $y_n, y'_n \in \{1, 4\}$. Если $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$, то $y_i, y'_i \in \{1, 2, 4, 5\}$, а если $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, то $y_i, y'_i \in \{0, 1, 3, 4\}$.*

Следствие 9. *В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ ровно 4^n различных строк.*

Следствие 10. *Верны следующие утверждения.*

1. Если

$$\begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ a_n \dots a_1 a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}, \quad \begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ b_n \dots b_1 b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235},$$

то $a_{n-1} \dots a_1 a_0 = b_{n-1} \dots b_1 b_0$.

2. Если

$$\begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ a_n \dots a_1 a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}, \quad \begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ b_n \dots b_1 b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235},$$

то $a_{n-1} \dots a_1 a_0 = b_{n-1} \dots b_1 b_0$.

Теорема 6. *Пусть T – множество 2-мерных треугольных фрагментов слов из $\mathcal{U}_{3/2}$ как показано на рисунке 3 (слева), в которых вертикальное слово $b \dots c \dots d$ не содержит символов 1 и 4. Множество T определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством вертикальных слов $b \dots c \dots d$ и множеством диагональных слов $a \dots b$ в T .*

Доказательство. По следствию 10, пункт 1, слово $a \dots b$ полностью и однозначно определяет фрагмент, показанный на рисунке 3 в центре. По следствию 10, пункт 2, слово $a \dots c$ полностью и однозначно определяет фрагмент, показанный на рисунке 3 справа. То, что слово $b \dots d$ однозначно определяет всё треугольное слово, следует из леммы 13, пункт 1. \square

Следствие 11. Множество квадратных слов $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{n\bullet}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его нулевыми (крайними верхними) строками и нулевыми (крайними правыми) столбцами.

Следствие 12. Множество слов $(\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его нулевыми строками и столбцами.

Обозначим здесь множество всех строк слов из $(\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ через A . Обозначаем дальше биекцию из следствия 12 через $\mathcal{F} : A \rightarrow \mathcal{I}_{0235}^{+\omega\bullet}$.

Теорема 7. Для любого $n \in \mathbb{N}$ язык всех правильных слов в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ включается в язык крайних левых столбцов слов из $\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathcal{B}^{n\circ})^{m\bullet}$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 о структуре H -таблиц для $\mathcal{B}^{n\circ}$. Удалим из H -таблиц все строки с цифрами 1 и 4 в крайнем левом столбце. В верхних компонентах останутся ровно 2 строки с цифрами 0 и 2 или 3 и 5 в крайних левых столбцах. Некоторые нижние компоненты окажутся пустыми. Удалим соответствующие таблицы как тупиковые. Полученная совокупность таблиц представляет некоторую конечную совокупность продукционных пар W , в которых множество строк верхних компонент строго включается в множество строк нижних. Это значит, что для любого $w \in W$ $w \bullet W \neq \emptyset$. Так как в верхних компонентах в левом столбце всегда ровно два символа 0 и 2 или 3 и 5, то построив по W минимальный автомат, допускающий язык читаемых снизу вверх левых столбцов, мы получим автомат на среднем рисунке 2. \square

Следствие 13. Для любого слова $u \in (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{\pm\omega\bullet}$ существует слово $w \in (\mathcal{I}_{0235} \circ \mathcal{B}^{-\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ такое, что $u \circ w \in \mathcal{U}_{3/2}$.

Теорема 8. Пусть $U = U_1 = (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235} \circ \mathcal{B}^{-\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ или $U = U_2 = (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{\pm\omega\bullet}$ или $U = U_3 = (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$. Пусть $i \geq 0$, $W_i = \{u[:, i] \mid u \in U\}$. Тогда ограничение отображения L на множество W_i , то есть $L : W_i \rightarrow W_{i+1}$, является биекцией.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая $U = U_1$. Из него по следствию 13 получим U_2 и U_3 . При этом достаточно доказать инъективность L .

Пусть $u, u' \in U_1$ и для некоторого $i \geq 0$ i -ые столбцы слов u и u' не равны, $u[:, i] \neq u'[:, i]$. Предположим, что теорема не верна и $L(u[:, i]) = L(u'[:, i])$, то есть $u[:, i+n] = u'[:, i+n]$, $n > 0$. Но тогда $u[j, i:] = u'[j, i:]$ или, другими словами, рассматривая строки двумерных слов как числовые объекты в системе счисления по основанию 6 с евклидовым расстоянием, $|u[j, :] - u'[j, :]| < 6^{i+1}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ $u[j, 0] \neq u'[j, 0]$. Не нарушая общности рассуждений положим $j = 0$, а также $u[0, 0] > u'[0, 0]$. Если показать, что $u[0, :] - u'[0, :] \neq 0$, то при достаточно большом n мы получим $|u[n, :] - u'[n, :]| = \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n (u[0, :] - u'[0, :]) \right| > 6^{i+1}$, а это противоречит тому, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ должно выполняться равенство $u[j, i:] = u'[j, i:]$. Отсюда будет следовать $L(u[:, i]) \neq L(u'[:, i])$.

Итак, покажем, что $u[0, :] - u'[0, :] \neq 0$. Заметим, что из $u[0, :] - u'[0, :] = 0$ следует $u[j, :] - u'[j, :] = 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Из равенства чисел с разными цифрами в

нулевым разряде необходимо следует одна из следующих ситуаций. Либо $u[0, 0] = 5$ и все символы справа от $u[0, 0]$ равны 5, то есть $u[0, : 1] = 55 \dots 5 \dots$, и $u'[0, : 1] = 00 \dots 0 \dots$. Либо $u[0, : 1] = 30 \dots 0 \dots$ и $u'[0, : 1] = 25 \dots 5 \dots$.

Из следствия 7, учитывая алфавит $\{0, 2, 3, 5\}$ нулевого столбца, следует, что ситуация $u[0, : 1] = 30 \dots 0 \dots$ и $u'[0, : 1] = 25 \dots 5 \dots$ невозможна.

Рассмотрим ситуацию $u[0, 0] = 5$, $u'[0, 0] = 0$. Найдем наименьший положительный индекс $j \in \mathbb{Z}$ такой, что $u[j, 0] \neq 5$ или $u'[j, 0] \neq 0$. Если же такого j нет, то все столбцы слева от $u[:, 0]$, начиная с некоторого момента, как можно увидеть из леммы 11, состоят из 5, а все столбцы слева от $u'[:, 0]$, начиная с некоторого момента, состоят из 0, то есть $L(u[:, i]) \neq L(u'[:, i])$, и мы сразу приходим к противоречию с предположением $L(u[:, i]) = L(u'[:, i])$.

Предположим, что $u[j, 0] \neq 5$ и $j > 0$. Тогда $u[j, 0] = 2$. Далее возможны только две ситуации: $u'[j, 0] = 0$ или $u'[j, 0] = 3$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u'[j, 0] \neq 0$ и $j > 0$. Тогда $u[j, 0] = 3$. Далее возможны только две ситуации: $u[j, 0] = 5$ или $u[j, 0] = 2$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u[j, 0] \neq 5$ и $j < 0$. Тогда $u[j, 0] = 3$. Далее возможны только две ситуации: $u'[j, 0] = 0$ или $u'[j, 0] = 2$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u'[j, 0] \neq 0$ и $j < 0$. Тогда $u[j, 0] = 2$. Далее возможны только две ситуации: $u[j, 0] = 5$ или $u[j, 0] = 3$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$. \square

5. Графы n -мерных 0235-продукционных пар. Зафиксируем натуральное $n > 1$. Обозначим $\mathcal{S}_n = \mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$. Множество всех различных строк в словах из \mathcal{S}_n обозначим через \mathcal{A}_n . Дальше мы не будем указывать нижний индекс n в обозначении \mathcal{S}_n и \mathcal{A}_n , пока в этом не возникнет необходимость. Рассматриваем \mathcal{S} как бинарное отношение на \mathcal{A} , то есть $w\mathcal{S}w'$ означает то же самое, что и $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.

Определим граф $G = (\mathcal{A}, \mathcal{S})$ в котором \mathcal{A} – множество вершин, \mathcal{S} – множество дуг. В графе G каждая вершина имеет ровно две входящие и две выходящие дуги. Вершину графа, состоящую из одних 0, назовем нулевой вершиной. Вершины назовём двойственными, если они соответствуют двойственным словам. Через G^{-1} обозначим граф, полученный из G заменой направления всех дуг на обратные. Поскольку $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} = (\mathcal{B}^{(n-1)\circ})^{dual}$, то верна

Лемма 22. *Взаимно-однозначное отображение $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ вершин графа G , связывающее двойственные вершины, является изоморфизмом графов $G \simeq \phi(G)$.*

Очевидным образом, исходя из H -табличного представления продукционных пар и теоремы 5, верна следующая лемма.

Лемма 23. *Если для вершин s, s', t графа G верно, что (s, t) и (s', t) являются дугами G , то вторые дуги, исходящие из s и s' , также ведут в одну вершину, то есть существует t' такая, что (s, t') и (s', t') являются дугами.*

Определим преобразование ρ графа G , которое назовем свёрткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разобьём вершины графа G на пары $\{s, s'\}$, исходящие дуги которых имеют общие концы. По этим парам построим новый граф такой, что из пары $\{s_0, s'_0\}$ дуга ведёт в $\{s_1, s'_1\}$ тогда и только тогда, когда в графе G существует

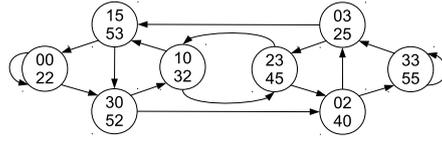


Рис. 4. Граф $\rho(G)$ для $n = 2$

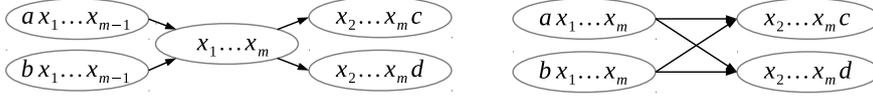


Рис. 5. Фрагмент перехода от графа Γ_n (слева) к графу $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$ (справа), $m = 2n - 1$

либо дуга (s_0, s_1) , либо (s_0, s'_1) или, что то же самое, существует либо дуга (s'_0, s_1) , либо (s'_0, s'_1) . Другим словами, свёртка $\rho(G)$ получается из G склейкой вершин s и s' , у которых совпадают концы исходящих дуг.

Вершины графа $\rho(G)$ представляем парами строк из \mathcal{A} . Пример графа $\rho(G)$ для $n = 2$ показан на рисунке 4.

Лемма 23 верна и для графа $\rho(G)$, то есть к графу $\rho(G)$ применима операция свёртки $\rho^2(G) = \rho(\rho(G))$. Более того $\rho^2(G_{n+1}) \simeq G_n$ и $G_n \simeq G_n^{-1}$, $n \geq 1$. Прежде чем это доказать, рассмотрим граф G с другой точки зрения.

Исходя из леммы 20 построим автомат, допускающий язык $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_{0235}^{n\bullet} \cup \{\lambda\}$ всех правильных столбцов в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$. Автомат представлен на рисунке 2 слева. По этому языку и n построим следующий граф Γ_n . Множеством его вершин является $\mathcal{I}_{0235}^{(2n-2)\bullet}$. Пусть $w = x_{2n-1} \dots x_2 x_1$, $w' = x'_{2n-1} \dots x'_2 x'_1 \in \mathcal{I}_{0235}^{(2n-2)\bullet}$. Упорядоченная пара (w, w') является дугой графа Γ_n тогда и только тогда, когда $x_{2n-2} \dots x_2 x_1 = x'_{2n-1} \dots x'_2$. Из определения следует, что Γ_n является графом де Брёйна. В силу теоремы 6 верно

Следствие 14. Графы G_n и Γ_n изоморфны, $n \geq 0$.

Для графа Γ_n очевиден следующий переход к Γ_{n+1} за два шага. На первом шаге строится промежуточный граф $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Его вершинами являются дуги графа Γ_n . Пусть w, w' вершины графа $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Пара (w, w') является дугой графа $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда в графе Γ_n конец дуги w является началом дуги w' . На рисунке 5 показан фрагмент перехода от графа Γ_n к $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Видно, что вершины $ax_1 \dots x_n$ и $bx_1 \dots x_n$ удовлетворяют свойствам, сформулированным в лемме 23. Склеивка вершин вида $ax_1 \dots x_n$ и $bx_1 \dots x_n$ в вершину $x_1 \dots x_n$ является операцией свёртки. Таким образом верна теорема.

Теорема 9. Верно, что $\rho^2(G_n) \simeq G_{n-1}$, $n > 1$.

В силу того, что графы G_1 и G_1^{-1} изоморфны и построение графа G_i из G_{i-1} зависит только от структуры графа G_{i-1} и не зависит от имён вершин, верно следующее утверждение:

Теорема 10. Графы G_n и G_n^{-1} изоморфны.

6. Автоматы n -мерных 0235-продукционных пар. По графу G определим автомат $A = (\mathcal{A}, \mathbb{Z}_6, \delta_A)$, где \mathcal{A} – множество состояний, \mathbb{Z}_6 – входной алфавит, $\delta_A : \mathcal{A} \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathcal{A}$ – функция переходов такая, что для любых $s, s' \in \mathcal{A}$ и $x \in \mathbb{Z}_6$ $\delta_A(s, x) = s'$ тогда и только тогда, когда (s, s') является дугой графа G и $s' = xx_2 \dots x_n$. Язык без пустого слова, допускаемый состоянием $s \in \mathcal{A}$ автомата A , когда все состояния заключительные, обозначим через $\lambda_A(s)$. Через $\rho(A)$ обозначим автомат, полученный из A свёрткой. Заметим, что склеиваемые состояния при свёртке имеют в автомате A одинаковые значения функции δ_A .

Теорема 11. $s = s', s, s' \in \rho(A)$, если, и только если, $\lambda_{\rho(A)}(s) = \lambda_{\rho(A)}(s')$.

Доказательство. Следует из теоремы 8. \square

Построим по автомату A эквивалентный ему по допускаемому языку минимальный инициальный (с одним начальным состоянием) детерминированный автомат D . Ядром K автомата D назовем его подавтомат, образованный состояниями, принадлежащими сильно-связным компонентам графа автомата D , то есть в ядро входят состояния, через которые проходят циклические пути.

Лемма 24. Ядро K и автомат A изоморфны.

Доказательство. Оба автомата минимальны и допускают одно и то же множество языков. \square

Обозначим через η_n минимальное положительное целое такое, что для всех слов $w \in \mathbb{Z}_6^*$ длины η_n в автомате D любой путь длины больше либо равной η_n ведёт из начальной вершины в ядро. Обозначим через θ_n минимальное положительное целое такое, что слово 0^{θ_n} в автомате D ведёт из начальной вершины в ядро.

Лемма 25. Пусть $w_1, w_2 \in (\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{m\bullet}$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что $w_1[:, n-1] = w_2[:, n-1]$ и слово $w_1[:, n-1]$ ведёт в автомате D из начального состояния в ядро. Тогда $w_1 = w_2$.

Доказательство. Предположим, что $w_1[:, n-2] \neq w_2[:, n-2]$. Обозначим $\tilde{a}' = w_1[:, n-1]$. Пусть s_0 – начальное состояние автомата D , а t – состояние ядра такое, что $\delta_D(s_0, \tilde{a}) = t$. Пусть \tilde{a}'' произвольное бесконечное слово, порождаемое состоянием t . Тогда конкатенация \tilde{a} слов \tilde{a}' и \tilde{a}'' принадлежит $(\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}[:, n-1]$ и существуют два слова $w'_1, w''_2 \in (\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ с одинаковыми крайними левыми столбцами \tilde{a} , рядом с которыми в w'_1 и w''_2 справа стоят разные столбцы, начинающиеся на $w_1[:, n-2]$ и $w_2[:, n-2]$ соответственно, что противоречит теореме 8. \square

Следствие 15. Если $w_1, w_2 \in (\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{(\eta_n-1)\bullet}$ и $w_1[:, n-1] = w_2[:, n-1]$, то $w_1 = w_2$.

Следствие 16. Если $w \in (\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{(\theta_n-1)\bullet}$ и столбец $w[:, n-1]$ состоит из нулей, то всё слово w состоит из нулей.

7. Достаточные условия пустоты множества \mathbf{Z} -чисел. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$ произвольное \mathbf{Z} -число. Рассмотрим его как элемент языка $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$, то есть как бесконечную в обе стороны (влево и вправо) последовательность цифр с разделяющим на целую и дробную части знаком. Отсутствующие цифры заполним нулями. Бесконечная

в обе стороны (вверх и вниз) последовательность чисел $\{\xi(3/2)^i | i \in \mathbb{Z}^\pm\}$, записанная друг под другом так, что цифры одинаковых разрядов находятся в одном столбце, образует слово $u \in \mathcal{U}_{3/2}$. Такие 2-мерные слова u назовём вещественными 2-мерными Z -словами. Вещественное 2-мерное Z -слово $u \in \mathcal{U}_{3/2}$ характеризуется тем, что 1) слово $u[0 :, -1]$ состоит из символов алфавита $\{0, 1, 2\}$ и 2) (условие вещественности) любая строка $u[i, :]$, $i \in \mathbb{Z}^\pm$, начиная с некоторого места влево состоит из одних нулей. Если условие 2) не выполняется, то мы будем говорить не о вещественном Z -слове, а просто о Z -слове.

Продукционные пары, крайние правые столбцы которых не содержат символов 3, 4 и 5, назовём 012-продукционными парами. Обозначим множество 1-мерных 012-продукционных пар через \mathcal{I}_{012} .

Лемма 26. *Множество вертикально нетупиковых слов в $\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{012}$ имеет вид:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следствие 17. *Если $\{\{\xi(3/2)^i | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/2)$, то для $\zeta = \xi \cdot 10^{-1}$ верно $\{\{\zeta(3/2)^i | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/6) \cup [1/3, 2/3)$.*

Следствие 18. *Если не существует $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такого, что $\{\xi(3/2)^i | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/6) \cup [1/3, 2/3)$, то множество Z -чисел пусто.*

Пусть $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ – вещественное Z -слово и $\xi = u[0, :] \in \mathbb{R}$. Слово u изображено на рисунке 6. Дискретная решётка системы координат XY представлена в непрерывной форме. Отрезок OF демонстрирует целую часть числа ξ . Луч по оси X влево от F соответствует цифрам 0. Координата x крайней левой отличной от 0 цифры числа $(\frac{3}{2})^y \xi$ равна $\lfloor \log_6((\frac{3}{2})^y \xi) \rfloor \approx y \log_6 \frac{3}{2} + \log_6 \xi$. Прямая $x = y \log_6 \frac{3}{2} + \log_6 \xi$ показана как прямая FC . Не закрашенная часть рисунка выделяет фрагмент слова u , состоящий из 0. Выберем на оси X левее точки F произвольную точку $H = (x_A, 0)$. Вертикальная прямая HA пересекает прямую FC в точке $C = (x_A, \frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} x_A - \frac{\log_6 \xi}{\log_6 \frac{3}{2}})$. Прямая OA задана уравнением $y = x$. Прямая $O'C$ имеет вид $y = -x + c$, $c = (\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} + 1) x_A - \frac{\log_6 \xi}{\log_6 \frac{3}{2}}$. Отрезок OO' обозначает столбец $u[0 : h, 0]$. AC является крайним левым столбцом на его горизонтальном уровне, не состоящим из одних нулей. Обозначим через $A'C'$ столбец, стоящий непосредственно рядом слева от столбца AC , то есть столбец $u[x_A : h - x_A + 1, x_A + 1]$. Расстояние $|A'B|$ от $A'C'$ до OO' равно $x_A + 1$. Высота $|A'C'|$ столбца $A'C'$ равна $|HC| - x_A + O(1) = (\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} - 1) x_A + O(1)$.

Столбец $A'C'$ есть результат отображения L столбца AC , расширенного сверху и снизу по одному символу. Но столбец из нулей также получается отображением L столбца из нулей, значит здесь L не является инъективным и ситуация на рисунке 6 по следствию 16 возможна, если только $|A'C'| < \theta_n$, где $n = |A'B|$.

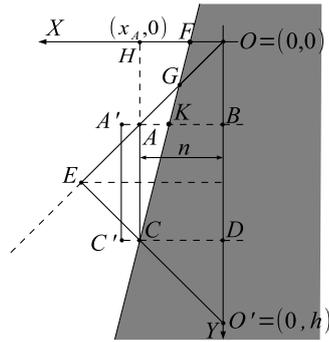


Рис. 6. Геометрическая иллюстрация необходимого условия $|AC| \leq \theta(n) \leq \eta(n)$ существования Z -чисел

Следствие 19. Если $\theta(n) < \left(\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} - 1\right)n + O(1) \approx 3.42n$, то множество Z -чисел пусто.

Теорема 12. Множество Z -чисел пусто, если, и только если, в вертикально нетупиковых словах в $\hat{B}^{+\omega} \circ \mathcal{I}_{023}$ нет строк из языка $0^{+\omega} \circ \mathbb{Z}_6^*$, где \mathbb{Z}_6^* – конечные слова в алфавите \mathbb{Z}_6 .

Доказательство. Достаточность очевидна, если посмотреть на луч OG на рисунке 6. Необходимость выводится из следствия 13. \square

Следствие 20. Множество Z -чисел пусто, если биекция \mathcal{F} (следствие 12) обладает свойством: если слово $w \in \mathbb{Z}_6^{+\omega}$ начиная с некоторого момента является периодическим, то в слове $\mathcal{F}(w)$ все цифры $\{0, 2, 3, 5\}$ распределены равномерно.

Доказательство. Пусть \mathcal{F} обладает указанным свойством. Луч OG на рисунке 6 с некоторого момента состоит из одних 0, то есть периодический. Значит в луче OO' есть цифра 5. \square

1. Kari J., Kopra J. Cellular Automata and Powers of p/q // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications. – 2018. – **51**, № 4. – P. 191–204.
2. Bournez O., Kurganskyy O., Potapov I. Reachability Problems for One-Dimensional Piecewise Affine Maps // International Journal of Foundations of Computer Science. – 2018. – **29**, № 4. – P. 529–549.
3. Akiyama S. Mahler’s Z-number and $3/2$ number system // Unif. Distrib. Theory. – 2008. – **3**. – P. 91–99.
4. Akiyama S., Frougny Ch., Sakarovitch J. Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems // Israel J. Math. – 2008. – **168**. – P. 53–91.
5. Dubickas A. On the powers of $3/2$ and other rational numbers // Math. Nachr. – 2008. – **281**. – P. 951–958.
6. Flatto L., Lagarias J.C., Pollington A.D. On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$ // Acta Arithmetica. – 1995. – **70**. – P. 125–147.
7. Kari J. Cellular Automata, the Collatz Conjecture and Powers of $3/2$ // Developments in Language Theory, Lecture Notes in Computer Science. – 2012. – **7410**. – P. 40–49.
8. Kari J. Universal pattern generation by cellular automata // Theoretical Computer Science. –

2012. – **429**. – P. 180–184.

9. *Mahler K.* An unsolved problem on the powers of $3/2$ // Journal of the Australian Mathematical Society. – 1968. – **8**. – P. 313–321.
10. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. – 1916. – **77**. – P. 313–352

O. Kurganskyy, I. Potapov

De Bruijn graphs and powers of $3/2$.

In this paper we consider the set $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ of two-way infinite words ξ over the alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ with the integer left part $\lfloor \xi \rfloor$ and the fractional right part $\{\xi\}$ separated by a radix point. For such words, the operation of multiplication by integers and division by 6 are defined as the column multiplication and division in base 6 numerical system. The paper develops a finite automata approach for analysis of sequences $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ for the words $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ that have some common properties with Z -numbers in Mahler's $3/2$ -problem. Such sequence of Z -words written under each other with the same digit positions in the same column is an infinite 2-dimensional word over the alphabet \mathbb{Z}_6 . The automata representation of the columns in the integer part of 2-dimensional Z -words has the nice structural properties of the de Bruijn graphs. This way provides some sufficient conditions for the emptiness of the set of Z -numbers. Our approach has been initially inspired by the proposition 2.5 in [1] where authors applies cellular automata for analysis of $(\{\xi (\frac{3}{2})^n\})_{n \in \mathbb{Z}}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Keywords: *modulo 1 distribution, Z-numbers, finite automata, piecewise affine maps, De Bruijn graphs.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
University of Liverpool, England
topologia@mail.ru

Получено 06.11.18

УДК 517.5

©2018. Д. А. Зарайский

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СВЁРТКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БЕЗ УСЛОВИЯ НА НОСИТЕЛИ

Показано, что определение свёртки распределений с произвольными носителями из монографии [1] может быть эквивалентным образом сформулировано в терминах пространства распределений Л. Шварца [2], соответствующего пространству пробных функций $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial^{|\alpha|} f / dx^\alpha \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Кроме того, дано элементарное доказательство результата Л. Шварца о втором сопряжённом к пространству $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ключевые слова: пространства распределений, свёртка распределений.

1. Введение. Стандартное определение свёртки распределений требует, как известно, чтобы один из свёртывателей имел компактный носитель, либо, более общим образом, чтобы отображение $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x + y$, было *собственным* на декартовом произведении носителей свёртывателей (т.е. прообраз компактного множества при нём был компактен). В монографии Владимирова [1] даётся определение свёртки распределений, обобщающее как этот случай, так и свёртку функций, принадлежащих L^1 , либо мер ограниченной вариации на \mathbb{R}^n (их пространство будем обозначать далее $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [1, § 4] Последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к 1 в \mathbb{R}^n , если на произвольном компакте, начиная с некоторого номера, $\eta_k = 1$, и $\eta_k(x)$ равномерно ограничены по k и x вместе со всеми их частными производными $\eta_k^{(\alpha)}$ (константой, зависящей от мультииндекса α).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [1, § 4] Свёртка распределений $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определена, если существует не зависящий от последовательности $\{\eta_k\}$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, сходящейся к 1 в смысле предыдущего определения, (конечный) предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f \otimes g, \eta_k \sigma^* \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x) g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \rangle, \quad (1)$$

которому и полагается равным значение $\langle f * g, \varphi \rangle$. (Поскольку две последовательности можно перемежающимся образом объединить, из существования такого предела для произвольной последовательности, конечно же, следует, что предел от её выбора не зависит.)

В настоящей работе мы показываем (предложение 3), что это определение может быть эквивалентным образом сформулировано как принадлежность распределений $(\sigma^* \varphi)(f \otimes g) = \varphi(x + y) f(x) g(y)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ соответствующему пространству распределений – пространству Л. Шварца «интегрируемых распределений» \mathcal{D}'_{L^1} [2, § VI.8]. Мы обозначаем последнее $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ (с тем, чтобы пространство пробных функций и распределений обозначались одной буквой, и ввиду того, что $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ содержит пространство мер ограниченной вариации $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ и

оказывается наименьшим таким пространством, замкнутым относительно дифференцирований).

Далее мы даём прямое доказательство результата Шварца, описывающего пространство, сопряжённое к $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$. Наше доказательство относительно элементарно: используются только основные определения и факты из теории топологических векторных пространств (которые можно найти в начальных главах [3] или [4]). Пространство $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ содержит константы, и, согласно предложению 2, равенство (1) можно переписать как следующее определение свёртки:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle (\sigma^* \varphi)(f \otimes g), 1 \rangle. \quad (2)$$

2. Определение и свойства пространств \mathcal{M} и \mathcal{M}' . Определим $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ как пространство функций $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма $\|\varphi\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi^{(\alpha)}|$, и $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ как пространство функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых конечны все $\|\varphi\|_m$. Указанные нормы превращают, очевидно, $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ в банахово пространство, а $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ – в пространство Фреше. Обозначим также $\dot{C}^m(\mathbb{R}^n)$ подпространство $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ (очевидно, замкнутое), состоящее из функций φ , таких что $\varphi^{(\alpha)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $|\alpha| \leq m$. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, очевидно, плотно в $\dot{C}^m(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m=0}^\infty \dot{C}^m(\mathbb{R}^n)$ является замкнутым подпространством $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ также плотно в нём, $\dot{C}^m(\mathbb{R}^n)$ является пополнением $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ по $\|\cdot\|_m$. Пространство пробных функций $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать также $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, сопряжённое к нему обозначим $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$, его подпространство, состоящее из функционалов, непрерывных в $\|\cdot\|_m$, – $\mathcal{M}^m(\mathbb{R}^n)$. Далее $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ будем рассматривать как подпространство в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1. $\mathcal{M}^m(\mathbb{R}^n)$ является множеством распределений u , имеющих вид

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} \mu_\alpha^{(\alpha)}, \quad \mu_\alpha \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Доказательство. (Мы следуем [5, § 2.1], где рассматривается та же прямая сумма пространств $\dot{C}(\mathbb{R}^n)$, но только в применении к $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). В одну сторону утверждение очевидно. Обратное, пусть $u \in \mathcal{M}^m(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\varphi \mapsto \{\varphi^{(\alpha)}\}_{|\alpha| \leq m}$ изометрично отображает $\mathcal{M}^m(\mathbb{R}^n)$ на подпространство прямой суммы $\bigoplus_{|\alpha| \leq m} \dot{C}(\mathbb{R}^n)$ (снабжённой нормой $\|\{\varphi_\alpha\}\| = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\varphi_\alpha\|_{L^\infty}$). Переносом с помощью этого отображения функционал u , продолжая его с помощью теоремы Хана – Банаха на всё пространство $\bigoplus_{|\alpha| \leq m} \dot{C}(\mathbb{R}^n)$ и учитывая, что $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ является сопряжённым к $\dot{C}(\mathbb{R}^n)$, получаем: $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \mu_\alpha, \varphi^{(\alpha)} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \mu_\alpha^{(\alpha)}, \varphi \rangle$ – с точностью до знаков требуемое представление. \square

Представление u , обеспечиваемое предыдущим предложением, даёт линейный функционал на $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (непрерывный в $\|\cdot\|_m$ -норме), совпадающий с u на $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u_0, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle \mu_\alpha, \varphi^{(\alpha)} \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int \varphi^{(\alpha)} d\mu_\alpha, \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

Функционал u_0 не зависит от выбора μ_α :

Предложение 2. Если u представляется в виде (3), а последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к 1, то при $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ функционал (4) выражается равенством $\langle u_0, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, \eta_k \varphi \rangle$.

Доказательство. Производная любого порядка от $(\eta_k - 1)\varphi$ равномерно ограничена по k и x . Выберем R так, чтобы вариации всех μ_α на $\{|x| \geq R\}$ были достаточно малы. Тогда $\eta_k = 1$ на $B_R(0)$ при достаточно больших k , и $\langle u_0, (\eta_k - 1)\varphi \rangle$ начиная с некоторого k становится сколь угодно малым. \square

Предложение 3. Распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\eta_k\}$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящейся к 1, существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, \eta_k \rangle$.

Доказательство. Необходимость вытекает из предыдущего предложения. Покажем достаточность. Пусть имеется распределение $u \notin \mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ и произвольные $R, C > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Возьмём $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равную единице на шаре $B_R(0)$. Тогда ψu является финитным распределением порядка не выше m' для некоторого $m' > m$. Поскольку u по предположению не является непрерывным по норме $\|\cdot\|_{m'}$, можно найти $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ со сколь угодно малой нормой $\|\varphi\|_{m'}$, такую что $|\langle u, (1 - \psi)\varphi \rangle| = |\langle u, \varphi \rangle - \langle \psi u, \varphi \rangle| > C$; в частности, при этом можно обеспечить выполнение неравенства $\|(1 - \psi)\varphi\|_m \leq \|(1 - \psi)\varphi\|_{m'} \leq 1$. Для $|\lambda| \leq 1$ значение u на $\lambda(1 - \psi)\varphi$ может принимать все значения, не превосходящие C по абсолютной величине.

Выберем произвольным образом сходящуюся к 1 последовательность $\{\eta_k\}$. Ввиду предыдущего рассмотрения, можно выбрать последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, такую что $\|\varphi_k\|_k \leq 1$, $\varphi_k = 0$ на шаре $B_k(0)$, и $\langle u, \varphi_k \rangle = (-1)^k - \langle u, \eta_k \rangle$. Тогда последовательность $\{\eta_k + \varphi_k\}$ сходится к 1, но значения u на её элементах не имеют предела (даже бесконечного). \square

3. Второе сопряжённое к \mathcal{M} . Пространство $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ можно снабдить сильной топологией $\beta(\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$ (определение которой, а также используемые ниже факты из теории топологических векторных пространств можно найти, например, в [3, 4]). Полунормами в ней являются $\|f\|_{\{K_l\}} = \sup_{\varphi \in B_{\{K_l\}}} |\langle \varphi, f \rangle|$, где $B_{\{K_l\}} = \{\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_l \leq K_l\}$, $\{K_l\}_0^\infty$ – произвольная последовательность положительных чисел. ($B_{\{K_l\}}$ – фундаментальная система ограниченных множеств в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$). Как обычно, используя сильную топологию, можно определить второе сопряжённое $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n) = ((\mathcal{M}')_{\beta(\mathcal{M}', \mathcal{M})})'$, в котором также можно определить сильную топологию $\beta(\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}'(\mathbb{R}^n))$. Положим также $\tilde{B}_{\{K_l\}} = \{\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_l \leq K_l\}$.

Покажем теперь, что пространство, сопряжённое к $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$, может быть отождествлено $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. В [2, § VI.8] это устанавливается следующим образом: пространство $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ снабжается другой (не являющейся счётно-нормированной) топологией, и с помощью теоремы Макки – Аренса устанавливается его полурефлексивность в этой топологии. Мы дадим ниже более прямое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пространство $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ с помощью скалярного произведения (4) отождествляется с $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом сильная топология сопряжённого в $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ отвечает обычной топологии $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если $\varphi \in \tilde{B}_{\{K_l\}}$, то $\eta_k \varphi \in B_{\{K_l\}}$, где $\{K_l\}$ зависит только от $\{K_l\}$ и сходящейся к 1 последовательности η_k . Поэтому, ввиду предложения 2, $|\langle u_0, \varphi \rangle| \leq \|u\|_{B_{\{K_l\}'}}$ для таких φ . Значит, т. к. $\bigcup \tilde{B}_{\{K_l\}} = C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, равенство (4) задаёт непрерывный линейный функционал $u \mapsto \langle u_0, \varphi \rangle$ на \mathcal{M}'_β для всякой $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (далее пишем просто $\langle u, \varphi \rangle$).

Обратно, пусть имеется непрерывный линейный функционал Φ на \mathcal{M}'_β . Положим $\varphi_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} \Phi(\delta_x^{(\alpha)})$. Т. к. множества $\{\delta_x^{(\alpha)} : x \in \mathbb{R}^n\}$ ограничены в \mathcal{M}'_β , функции φ_α ограничены. Поскольку $(\delta_{x+he_i}^{(\alpha)} - \delta_x^{(\alpha)})/h \rightarrow -\delta_x^{(\alpha+e_i)}$ при $h \rightarrow 0$ в топологии $\beta(\mathcal{M}', \mathcal{M})$, то $\partial \varphi_\alpha / \partial x_i = \varphi_{\alpha+e_i}$, $\varphi = \varphi_0$ бесконечно дифференцируема, и $\varphi^{(\alpha)} = \varphi_\alpha$. Поэтому $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, и $\Phi(u) = \langle u, \varphi \rangle$ на множестве линейных комбинаций δ_x . Осталось убедиться, что это множество плотно в \mathcal{M}'_β . Но его замыкание, как мы уже видели, содержит распределения $\delta_x^{(\alpha)}$. Поскольку дифференцирование непрерывно в \mathcal{M}'_β , достаточно проверить, что линейные комбинации дельта-функций плотны в $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ в топологии, индуцированной $\beta(\mathcal{M}', \mathcal{M})$ (отметим, что это не так в сильной топологии $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, и аналогичный настоящему предложению результат там не имеет места – не существует простого описания сопряжённого к $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$); это легко следует из того, что имеется равномерная оценка на производные пробных функций, лежащих в произвольном заданном ограниченном подмножестве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Наконец, проверим, что сильная топология сопряжённого к $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$ в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ совпадает с исходной. Последняя, как известно, имеет в качестве фундаментальной системы (замкнутых) окрестностей нуля систему биполяр фундаментальной системы окрестностей исходной топологии. Положим

$$B^m = \{\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : \max_{|\alpha| \leq m} \sup_x |\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq 1\},$$

$$\tilde{B}^m = \{\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) : \max_{|\alpha| \leq m} \sup_x |\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq 1\}.$$

Мы утверждаем, что $(B^m)^{\circ\circ} = \tilde{B}^k$. Поскольку $\delta_x^{(\alpha)} \in (B^m)^\circ$ при $|\alpha| \leq k$, $(B^m)^{\circ\circ} \subset \tilde{B}^m$. Докажем обратное включение. Выберем $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ со значениями в $[0, 1]$, и пусть $|\eta^{(\alpha)}(x)| \leq C^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leq m$. Положим $\eta_k(x) = \eta(x/k)$, тогда, по формуле Лейбница, $|(\eta_k \varphi)^{(\alpha)}(x)| \leq (1 + C/k)^{|\alpha|} \max_{|\alpha'| \leq |\alpha|} |\varphi^{(\alpha')}(x)|$, $|\alpha| \leq m$. При $\varphi \in \tilde{B}^m$ элементы последовательности $\varphi_k = (1 + C/k)^{-m} \eta_k \varphi$ лежат в B^m , поэтому при $u \in (B^m)^\circ$ выполнено неравенство $|\langle u, \varphi_k \rangle| \leq 1$. Но, по предложению 2, $\langle u, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$, значит $\varphi \in (B^m)^{\circ\circ}$. \square

Отметим, что $C_b^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ непригодно в качестве пространства пробных функций, т. к. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ не плотно в нём. Можно, впрочем, как это делается в [2], снабдить $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ топологией, согласованной с двойственностью $(\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}'(\mathbb{R}^n))$

(т. е., по теореме Макки – Аренса, топологией более слабой, чем топология Макки $\tau(\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}'(\mathbb{R}^n))$, но более сильной, чем слабая топология относительно этой двойственности). Тогда сопряжённое к пространству $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$, снабжённому этой топологией, будет совпадать с $\mathcal{M}'(\mathbb{R}^n)$. В [2] используется одна из таких топологий в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, которую можно описать непосредственно, не прибегая к двойственности $(\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}'(\mathbb{R}^n))$. См. также [6], где приводится секвенциальный вариант того же определения – сопряжённое определяется как множество секвенциально непрерывных линейных функционалов (пространство $\mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$ обозначено там через \mathcal{O}_0).

Если мы всё же будем пользоваться исходной счётно-нормированной топологией в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}''(\mathbb{R}^n)$, то в $\mathcal{M}'''(\mathbb{R}^n)$ найдутся такие элементы, как, например, функционал $\varphi \mapsto \lim_{\mathfrak{F}} \varphi(k)$, \mathfrak{F} – ультрафильтр на \mathbb{N} . Если \mathfrak{F} не является одноточечным, значение указанного функционала на элементах $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ равно 0, т. е. ему соответствует нулевое распределение, сам же функционал ненулевой, поскольку $\{\varphi(k)\}$ при $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ может быть произвольной ограниченной последовательностью $\{b_k\}$ (полагаем $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \psi(x - k)$, $\text{supp } \psi \subset [-1, 1]$, $\psi(0) = 1$).

1. Владимирова В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
2. Schwartz L. Théorie des distributions. – Paris: Hermann, 1966. – 420 p.
3. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 258 с.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
5. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. – М.: Мир, 1968. – 276 с.

D. A. Zaraisky

On definition of convolution of distributions with arbitrary supports.

It is proved that the definition of convolution of distributions with arbitrary supports from the book [1] can be reformulated in terms of the space of distributions, due to L. Schwartz [2], corresponding to the space of test functions $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial^{|\alpha|} f / dx^\alpha \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Additionally, an elementary proof of L. Schwartz’s description of the second dual of $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ is given.

Keywords: spaces of distributions, convolution of distributions.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 22.10.18

УДК 517.9

©2018. А. С. Миненко

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Исследуется плоская стационарная конвективная задача Стефана, когда конвекция вызвана наличием заданного вихря интенсивности μ . Предложен метод изучения этой задачи, состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ . При этом нулевой член разложения определяется методом Ритца. Получена формула зависимости уравнения со свободной границей от μ .

Ключевые слова: свободная граница, функционал, закон Бернулли, вихрь, метод Ритца.

Введение. Процессы кристаллизации, встречающиеся в природе, сопровождаются конвективными перемешиваниями в жидкой фазе. Ниже будет рассмотрена постановка задачи, в которой конвекция будет вызвана наличием заданного вихря. Основная цель статьи состоит в приближенном анализе свободной границы в зависимости от интенсивности вихря. Анализ имеющихся результатов и библиографию по данному классу задач конвективной теплопроводности можно найти в [1, 2].

1. Постановка задачи. Будем рассматривать стационарный случай. Пусть $D = \{-1 < x < 1, H < y < 0\}$ обозначает полосу. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой фазы D_γ^- . Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y . Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней – жидкая. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y . Пусть $\psi(x, y)$ – функция тока, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu, \quad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \mu = \text{const}, \quad (1)$$

здесь μ считаем заданным достаточно малым численным параметром. Граничным условием для функции ψ является следующее:

$$\psi = 0, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+. \quad (2)$$

Если $\mu = 0$, то соответствующая функция тождественно исчезает, и, таким образом, в жидкой фазе никакой конвекции нет. Кроме того, в жидкой фазе, температуру которой обозначим через $u^+(x, y)$, должно выполняться уравнение конвективного теплопереноса

$$\lambda_+ \left(\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \lambda_+ = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Будем предполагать выполненными следующие граничные условия на температуру u^+ :

$$u^+(x, 0) = v, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad v = \text{const} > 1, \quad (4)$$

на вертикальной части границы жидкой фазы выполняется условие третьего рода

$$u_x^+ + \omega_0^+ u^+ = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+, \quad (5)$$

на свободной границе γ удовлетворяется условие

$$u^+(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (6)$$

Перейдем теперь к описанию твердой фазы. Обозначим через u^- температуру твердой фазы. Она удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma^-. \quad (7)$$

На вертикальной части границы твердой фазы зададим условие третьего рода

$$u_x^- \pm \omega_0^- u^- = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^-. \quad (8)$$

При $y = H$ будем считать, что

$$u^-(x, H) = 0, \quad (9)$$

тогда как на свободной границе

$$u^-(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (10)$$

Если бы кривая γ была заданной, то выписанные соотношения корректно определяли бы задачу. В силу же того, что γ подлежит определению, на ней задается еще одно условие, а именно – закон сохранения энергии

$$|\nabla u^-|^2 - k^2 |\nabla u^+|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma, \quad k = \text{const}, \quad 0 < k \leq 1. \quad (11)$$

Поставленная задача (1)–(11) нелинейна и «основное» неизвестное это граница γ . Укажем также, что разрешимость подобного класса задач изложена в [1].

В настоящей работе предложен метод изучения задачи (1)–(11), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ .

2. Линеаризация задачи по интенсивности вихря. Предположим, что неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда по μ :

$$\psi(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi_k(x, y), \quad (12)$$

$$u^+(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^+(x, y), \quad (13)$$

$$u^-(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^-(x, y). \quad (14)$$

Будем считать, что свободная граница допускает явное представление

$$y = y(x; \mu), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

причем

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (16)$$

Подставляя эти разложения в соотношения (1)–(11) и приравнивая друг другу члены при одинаковых степенях μ , получаем бесконечное число задач. Выпишем вначале нулевое приближение, соответствующее μ в нулевой степени. Прежде всего, из уравнения (1) получаем, что функция $\psi_0(x, y)$ гармонична. Так как она удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле, то $\psi_0(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_\gamma^+}$. Выпишем теперь условия, определяющие u_0^\pm :

$$\frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^\pm, \quad (17)$$

$$u_0^+(x, 0) = v, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

$$u_{0x}^\pm(x, y) + \omega_0^\pm u_0^\pm(x, y) = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^\pm, \quad (19)$$

$$u_0^\pm(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma_0, \quad (20)$$

$$u_0^-(x, H) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

$$|\nabla u_0^-|^2 - k^2 |\nabla u_0^+|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (22)$$

Задача (17)–(22) была рассмотрена в статьях [3, 4]. Из результатов этих работ следует, что эта задача имеет и притом единственное классическое решение в классе функций $u_{0y}^+ > 0$, $u_{0y}^- > 0$ соответственно в $D_{\gamma_0}^+$ и $D_{\gamma_0}^-$. При этом граница γ_0 является аналитической кривой, монотонно возрастающей в правой половине, а функции $u_0^+(x, y)$, $u_0^-(x, y)$ непрерывны в $\overline{D_{\gamma_0}^+}$ и $\overline{D_{\gamma_0}^-}$ соответственно и непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением угловых точек.

Рассмотрим частный случай нашей задачи:

$$k = 1, \quad \omega_0^+ = \omega_0^- = \omega_0. \quad (23)$$

При этом первое условие всегда выполнимо, если ввести замену

$$\tilde{u}^\pm = \begin{cases} ku^+(x, y), & (x, y) \in D_\gamma^+, \\ u^-(x, y) + k - 1, & (x, y) \in D_\gamma^-, \end{cases}$$

которая приводит задачу (17)–(22) к случаю $k = 1$. Тогда на γ_0 будут выполняться два условия: $u_0^+ = u_0^- = 1$, $|\nabla u_0^+| = |\nabla u_0^-|$. Следовательно, теперь (17)–(22) есть

обычная задача о распределении температуры в области D без фазовых превращений вещества. Поэтому можно построить функцию $u_0(x, y)$ по формуле

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_0^+(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+}, \\ u_0^-(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^-}, \end{cases} \quad (24)$$

которая является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in D; \quad u_0(x, y) = v, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_{0x}(0, y) = 0, \quad H \leq y \leq 0; \\ u_0(x, H) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_{0x}(1, y) + \omega_0 u_0(1, y) = 0, \quad H \leq y \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Функция $u_0(x, y)$ может быть эффективно найдена, например, при помощи метода Фурье. Относительно функции $u_0(x, y)$ можно заключить, что $u_{0y}(x, y) > 0$ в D (см. теорему 4.3 в [1]). Следовательно, уравнение $u_0(x, y) - 1 = 0$, $(x, y) \in D$, всегда разрешимо в виде некоторой функции $y = y_0(x)$, которая задает кривую γ_0 , т.е. $\gamma_0 : y = y_0, -1 \leq x \leq 1$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (23). Тогда функция $u_0(x, y)$, определенная соотношениями (24), (25) является нулевым приближением (по интенсивности вихря μ) задачи (1)–(11).

При этом $u_{0y}(x, y) > 0$ в D и $u_0(x, y)$ непрерывна вместе с производными при переходе через γ_0 , где $\gamma_0 : y = y_0(x), -1 \leq x \leq 1$ – решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$.

3. Первое приближение. Выпишем сейчас ту краевую задачу, которая отвечает множителю μ в первой степени. Из условий (1)–(11) и из разложений (12)–(16) для функций $\psi_1(x, y)$ и $u_1^\pm(x, y)$ вытекает следующая задача:

$$\psi_{1xx} + \psi_{1yy} = 1, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^+, \quad (26)$$

$$\psi_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^+, \quad (27)$$

$$\lambda_+ \left(u_{1xx}^+ + u_{1yy}^+ \right) - \psi_{1y} u_{0x}^+ + \psi_{1x} u_{0y}^+ = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^+, \quad (28)$$

$$u_1^+(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (29)$$

$$u_{1x}^\pm + \omega_0^\pm u_1^\pm = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^\pm, \quad (30)$$

$$u_{0y}^\pm y_1(x) + u_1^\pm|_{\gamma_0} = 0, \quad (31)$$

$$u_{1xx}^- + u_{1yy}^- = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^-, \quad (32)$$

$$u_1^-(x, H) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (33)$$

Кроме того, на γ_0 должно выполняться условие

$$\begin{aligned} y_1(x) \left[(u_{0x}^- u_{0xy}^- + u_{0y}^- u_{0yy}^-) - k^2 (u_{0x}^+ u_{0xy}^+ + u_{0y}^+ u_{0yy}^+) \right] + \\ + \left[(u_{0x}^- u_{1x}^- + u_{0y}^- u_{1y}^-) \right] - k^2 \left[(u_{0x}^+ u_{1x}^+ + u_{0y}^+ u_{1y}^+) \right] = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Получившееся первое приближение имеет следующие характерные черты. Во-первых, эта задача линейна, во-вторых, ее нужно решать в известной области, соответствующей нулевому приближению. После того, когда функции $u_0^\pm(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ определены соответственно в областях $D_{\gamma_0}^\pm$ и $D_{\gamma_0}^+$, из соотношений (28)–(34) находим функции $u_1^\pm(x, y)$, заданные в тех же областях $D_{\gamma_0}^\pm$ и $y_1(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

4. Построение нулевого приближения вариационным методом. Задача (17)–(22) эквивалентна проблеме минимума следующего интегрального функционала:

$$\begin{aligned} I(u^+, u^-, \gamma_0) = & \iint_{D_{\gamma_0}^-} [u_x^{-2} + u_y^{-2}] dx dy + k^2 \iint_{D_{\gamma_0}^+} [u_x^{+2} + u_y^{+2}] dx dy + \\ & + k^2 \omega_0^+ \int_{\Gamma_y^+} [u^{+2} - 1] dy + \omega_0^- \int_{\Gamma_y^-} [u^{-2} - 1] dy \end{aligned} \quad (35)$$

на соответствующем множестве допустимых функций [3], здесь $\Gamma_y^+ = \partial D_{\gamma_0}^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_y^- = \partial D_{\gamma_0}^- \cap \{x = \pm 1\}$. Следуя методике Фридрикса [5], представим функционал (35) в классе функций $u_y^\pm > 0$ в $D_{\gamma_0}^\pm$ следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} I_1(y_1, y_2) = & \int_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1u}} dx du + k^2 \int_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2x}^2}{y_{2u}} dx du + \omega_0^+ k^2 \int_1^v (u^2 - 1)[y_{2u}(1, u) + \\ & + y_{2u}(-1, u)] du + \omega_0^- \int_0^1 (u^2 - 1)[y_{1u}(1, u) + y_{1u}(-1, u)] du, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1, 1 < u < v)$, $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ – решения уравнений $u_1(x, y) - u_1 = 0$, $u_2(x, y) - u_2 = 0$. Функционал (35) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \left\{ y_1(x, u) : y_1(x, u) \in C^1(\overline{\Delta_1}), \min_{(x,u) \in \overline{\Delta_1}} y_{1u} > 0, y_1(x, 0) = H, y_1(x, 1) = y_2(x, 1) \right\}, \\ \Omega_2 = & \left\{ y_2(x, u) : y_2(x, u) \in C^1(\overline{\Delta_2}), \min_{(x,u) \in \overline{\Delta_2}} y_{2u} > 0, y_2(x, v) = 0, y_1(x, 1) = y_2(x, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Далее, пусть функции $y_1^*(x, u)$, $y_2^*(x, u)$ соответствуют классическому решению (u^+, u^-, γ) задачи (17)–(22). Справедлива лемма.

Лемма 2. Пара функций y_1^* , y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (35) на множестве (37).

Доказательство. Используя формулу Фридрикса [5], получим:

$$I_1(y_1, y_2) = I_1(y_1^*, y_2^*) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) \Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1 - \varepsilon) \frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

здесь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} &= 2 \iint_{\Delta_1} [\delta y_{1u}^2 + (y_{1\varepsilon u} \delta y_{1x} - y_{1\varepsilon x} \delta y_{1u})^2] \frac{dx du}{y_{1\varepsilon u}^3} + \\ &+ 2 \iint_{\Delta_2} [\delta y_{2u}^2 + (y_{2\varepsilon u} \delta y_{2x} - y_{2\varepsilon x} \delta y_{2u})^2] \frac{dx du}{y_{2\varepsilon u}^3}, \end{aligned}$$

(y_1, y_2) – произвольный элемент из Ω , $y_{1\varepsilon} = y_1^* + \varepsilon(y_1 - y_1^*)$, $y_{2\varepsilon} = y_2^* + \varepsilon(y_2 - y_2^*)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Учитывая теперь, что первая вариация функционала $I_1(y_1, y_2)$, вычисленная на элементе (y_1^*, y_2^*) , обращается в ноль, заключаем, что пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу (36) на множестве (37), так как $d^2 I_1/d\varepsilon^2$ положительно определенный функционал на вариациях $\delta y_1 = y_1 - y_1^*$, $\delta y_2 = y_2 - y_2^*$. Лемма доказана.

Будем минимизировать функционал (36) на множестве (37) при помощи сумм

$$\begin{aligned} y_{1n}(x, u; a_{kj}) &= y_{1n}(x, u) = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} x^{2j} u^k + H, \quad (x, u) \in \bar{\Delta}_1; \\ y_{2n}(x, u; b_{kj}) &= y_{2n}(x, u) = \frac{v-u}{v-1} \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj} x^{2j} u^k, \quad (x, u) \in \bar{\Delta}_2, \\ n &= \sup_{0 \leq j \leq L} \{2j + T_j; 2j + \Theta_j\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Включение $(y_{1n}, y_{2n}) \in \Omega$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов $(a_{kj}; b_{kj})$ область допустимости Ω_r , где

$$r = \sum_{j=0}^L (T_j + \Theta_j + 1), \quad \Omega_r = \tilde{\Omega}_1 \oplus \tilde{\Omega}_2 \cap E^0,$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \left\{ a_{kj} : \min_{(x,u) \in \bar{\Delta}_1} y_{1nu} > 0 \right\}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \left\{ b_{kj} : \min_{(x,u) \in \bar{\Delta}_2} y_{2nu} > 0 \right\},$$

при этом коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) должны лежать в гиперплоскостях

$$E_0^0 : H + \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} = \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0}, \quad E_j^0 : \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj},$$

т.е. $E^0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \dots \oplus E_L^0$.

Неизвестные коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) и множитель Лагранжа λ_t определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2(a_{kj}, b_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, T_q; \quad q = 0, 1, \dots, L, \\ \frac{\partial I_2(a_{kj}, b_{kj})}{\partial b_{st}} - \lambda_t &= 0, \quad s = 0, 1, \dots, \Theta_t; \quad t = 0, 1, \dots, L, \\ \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} - \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0} + H &= 0, \quad \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} - \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, L, \\ I_2(a_{kj}, b_{kj}) &= I_1 \left(\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} x^{2j} u^k + H; \frac{v-u}{v-1} \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj} x^{2j} u^k \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Можно установить, что функция $I_2(a_{kj}, b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке (a_{kj}^*, b_{kj}^*) множества Ω , лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [7]. Следовательно, в точке (a_{kj}^*, b_{kj}^*) частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Таким образом, система уравнений (39) имеет решение.

Итак, решив систему уравнений (39) при каждом n , можно затем построить последовательность приближений (38) в виде $y_{1n}(x, u; a_{kj}^*) = y_{1n}^*$, $y_{2n}(x, u; a_{kj}^*) = y_{2n}^*$.

Лемма 3. *Приближения y_{1n}^*, y_{2n}^* , построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (36) на множестве (37).*

Доказательство. Пусть пара y_1^*, y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (36) на множестве (37). При этом справедливы представления

$$y_1^*(x, u) = u \eta_1(x, u) + H, \quad y_2^*(x, u) = (v-u) \eta_2(x, u) = \frac{v-u}{v-1} \tilde{\eta}_1(x, u),$$

где $\eta_1 \in C^1(\overline{\Delta}_1)$, $\tilde{\eta}_2 \in C^1(\overline{\Delta}_2)$, $\eta_1(x, 0) \neq 0$, $\eta_2(x, v) \neq 0$. В силу теоремы Вейерштрасса функции $\eta_1(x, u)$ и $\tilde{\eta}_2(x, u)$ могут быть аппроксимированы многочленами в норме пространств $C^1(\overline{\Delta}_1)$ и $C^1(\overline{\Delta}_2)$ соответственно. Возьмем теперь произвольное число ε , и пусть $P_n(x, u)$, $Q_n(x, u)$ – многочлены такие, что

$$\|\eta_1(x, u) - P_n(x, u)\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < \varepsilon, \quad \|\tilde{\eta}_2(x, u) - Q_n(x, u)\|_{C^1(\overline{\Delta}_2)} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\|y_1^*(x, u) - uP_n(x, u) - H\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} = \|u[\eta_1(x, u) - P_n(x, u)]\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < C \cdot \varepsilon,$$

$$\left\| y_2^*(x, u) - \frac{v-u}{v-1} Q_n(x, u) \right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} = \left\| \frac{v-u}{v-1} [\tilde{\eta}_2(x, u) - Q_n(x, u)] \right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < C \cdot \varepsilon,$$

где C – некоторая положительная постоянная. Покажем теперь, что функции $f_1 = uP_n(x, u) + H$, $f_2 = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x, u)$ можно считать допустимыми, т.е. $f_1 \in \Omega_1$, $f_2 \in \Omega_2$. Действительно, если $f_1(x, 1) \neq f_2(x, 1)$, тогда, положив

$$H + \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} - \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0} = \varepsilon_0, \quad \sum_{k=0}^{T_j} a_{kj} - \sum_{k=1}^{\Theta_j} b_{kj} = \varepsilon_j, \quad \tilde{a}_{T_j j} = a_{T_j j} - \varepsilon_j,$$

$$\tilde{a}_{T_0 0} = a_{T_0 0} - \varepsilon_0, \quad a_{kj} = \tilde{a}_{kj}$$

(если $k \neq T$, $j = 1, 2, \dots, L$), построим многочлен $\tilde{P}_n(x, u)$ такой, что $\tilde{f}_1(x, 1) = f_2(x, 1)$, где $\tilde{f}_1(x, u) = u\tilde{P}(x, u) + H = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^{T_j} \tilde{a}_{kj} x^{2j} u^k + H$, при этом норма $\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)}$ достаточно мала, так как изначально все величины ε_j можно выбрать малыми.

Далее, имеем $\min y_{1u}^* > 0$ при $(x, u) \in \bar{\Delta}_1$ и $\min y_{2u}^* > 0$ при $(x, u) \in \bar{\Delta}_2$. Следовательно, по крайней мере, начиная с некоторого большого номера N $\min f_{1u} > 0$ при $(x, u) \in \bar{\Delta}_1$ и $\min f_{2u} > 0$ при $(x, u) \in \bar{\Delta}_2$. Итак, получаем $f_1 \in \Omega_1$, $f_2 \in \Omega_2$.

Далее, действуя аналогично [7, 8] (см. лемму 6), построим цепочку неравенств

$$I_1(y_{1n}^*, y_{2n}^*) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) < \tilde{\varepsilon},$$

где d – наименьшее значение функционала (36) на множестве (37), $y_{1n} = u\tilde{P}_n(x, u) + H$, $y_{2n} = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x, u)$, а $d = I_1(y_1^*, y_2^*)$ в силу леммы 1. Отсюда, ввиду произвольности числа $\tilde{\varepsilon}$, следует утверждение леммы.

Используя тождество $y \equiv y(x, u(x, y))$, получим формулы

$$u_x = -\frac{y_x}{y_u}, \quad u_y = \frac{1}{y_n}, \quad u_{xx} = -\left(\frac{y_x}{y_u}\right)'_x + \left(\frac{y_x}{y_n}\right)'_u \cdot \frac{y_x}{y_u}, \quad u_{yy} \left(\frac{1}{y_u}\right)'_u \cdot \frac{1}{y_n}.$$

В терминах функций $y_1(x, u)$, $y_2(x, u)$ задача (1)–(11) переписется следующим образом:

$$-\left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)'_x + \left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)'_u \cdot \frac{y_{1x}}{y_{1u}} + \left(\frac{1}{y_{1u}}\right)'_u \cdot \frac{1}{y_{1u}} = 0,$$

$$(x, u) \in \Delta_1, \quad y_1(x, v) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$-\frac{y_{1x}}{y_{1u}} \pm \omega_0^+ u = 0, \quad x = \pm 1, \quad 1 \leq u \leq v;$$

$$-\left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)'_x + \left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)'_u \cdot \frac{y_{2x}}{y_{2u}} + \left(\frac{1}{y_{2u}}\right)'_u \cdot \frac{1}{y_{2u}} = 0,$$

$$(x, u) \in \Delta_2, \quad y(x, 0) = H, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$-\frac{y_{2x}}{y_{2u}} \pm \omega_0^- u = 0, \quad x = \pm 1, \quad 0 \leq u \leq 1;$$

$$y_1(x, 1) = y_2(x, 1), \quad \frac{y_{1x}^2}{y_{1u}^2} + \frac{1}{y_{1u}^2} = k \left(\frac{y_{2x}^2}{y_{2u}^2} + \frac{1}{y_{2u}^2} \right), \quad u = 1.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от параметров ω^+ , ω^- и k : $y_1 = y_1(x, u; \omega_0^+, \omega_0^-, k)$, $y_2 = y_2(x, u; \omega_0^+, \omega_0^-, k)$.

Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} и b_{kj} от чисел ω_0^+ , ω_0^- и k .

Лемма 4. Пусть система Ритца (39) имеет решение при некоторых значениях параметров $\omega_0^+ = \tilde{\omega}_0^+$, $\omega_0^- = \tilde{\omega}_0^-$, $k = \tilde{k}$. Тогда решения этой системы $a_{kj}(\omega_0^+, \omega_0^-, k)$, $b_{kj}(\omega_0^+, \omega_0^-, k)$ непрерывно зависят от параметров ω_0^+ , ω_0^- , k в некоторой окрестности точки $(\tilde{\omega}_0^+, \tilde{\omega}_0^-, \tilde{k})$.

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [9] (см. теорему 1).

Последовательность функций $y_{1n}(x, u)$, $y_{2n}(x, u)$, построенная при помощи метода Ритца, позволяет приближенно для задачи (17)–(22) найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_{1n}(x, c)$, $y_{2n}(x, c)$ функций $u_{1n}(x, y)$, $u_{2n}(x, y)$. При этом имеем

$$y_{1n}(x, c) = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} x^{2j} c^k + H, \quad 0 \leq c \leq 1,$$

$$y_{2n}(x, c) = \frac{v-c}{v-1} \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj} x^{2j} c^k, \quad 1 \leq c \leq v;$$

$$\frac{\partial u_{1n}}{\partial x} = -\frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial y_{1u}}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_{1n}}{\partial y} = 1 \bigg/ \frac{\partial y_{1n}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial u_{2n}}{\partial x} = -\frac{\partial y_{2n}}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial y_{2u}}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_{2n}}{\partial y} = 1 \bigg/ \frac{\partial y_{2n}}{\partial u},$$

здесь $(u_{1n}, u_{2n}, \gamma_n)$ – приближенное решение задачи (17)–(22).

Построим теперь в области D функции $u_n(x, y)$ следующим образом:

$$u_n(x, y) = \begin{cases} u_{1n}(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+}, \\ u_{2n}(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^-}. \end{cases} \quad (40)$$

Перейдем теперь к исследованию сходимости приближений (38).

Теорема 1. Пусть выполнены предположения (23). Тогда последовательность приближений (40) сходится к решению $u_0(x, y)$ задачи (17)–(22) по норме в $W_2^1(D)$, $W_2^1(D_{\gamma_0}^+)$ и $W_2^1(D_{\gamma_0}^-)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (38), коэффициенты которых удовлетворяют системе (39), образует минимизирующую последовательность y_{1n}, y_{2n} для функционала (36) на множестве (37). Следовательно, имеем $\varepsilon_n = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как согласно лемме 1, пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(y_1, y_2)$ на множестве Ω .

Далее, последовательности (y_{1n}, y_{2n}) в плоскости (x, u) соответствуют последовательности (u_{1n}, u_{2n}) в плоскости (x, y) . Тогда имеем

$$\tilde{I}(u_0 + \eta) = \tilde{I}(u_0) + \tilde{I}(\eta) + 2\tilde{I}(u_0, \eta), \quad \eta = u_n - u_0,$$

где

$$\tilde{I}(u_0) = \iint_D |\nabla u_0|^2 dx dy + \omega_0 \int_H^0 [(u_0^2(1, y) - 1) + (u_0^2(-1, y) - 1)] dy,$$

$$\tilde{I}(\eta) = \iint_D |\nabla \eta|^2 dx dy + \omega_0 \int_H^0 [(\eta^2(1, y) - 1) + (\eta^2(-1, y) - 1)] dy,$$

$$\tilde{I}(u_0, \eta) = 2 \iint_D (u_{0x}\eta_x + u_{0y}\eta_y) dx dy + 2\omega_0 \int_H^0 [u_0(1, y)\eta + u_0(-1, y)\eta] dy.$$

Учитывая, что $I(u_0 + \eta) - \tilde{I}(u_0) = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $I(u_0, \eta) = 0$, получим утверждение теоремы.

Замечание. Учитывая, что функции y_{1n} и y_{2n} в силу леммы 4 непрерывно зависят от ω_0^+ , ω_0^- и k в некоторой окрестности точки $\omega_0^+ = \omega_0$, $\omega_0^- = \omega_0$ и $k = 1$, тогда и утверждение теоремы сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(\omega_0, \omega_0, 1)$ в пространстве параметров $(\omega_0^+, \omega_0^-, k)$. Следовательно, получим сходимость u_n по норме в $W_2^1(D)$, $W_2^1(D_{\gamma_0}^+)$ и $W_2^1(D_{\gamma_0}^-)$ для всех $(\omega_0^+, \omega_0^-, k) \in U(\omega_0, \omega_0, 1)$.

5. Исследование первого приближения. Далее рассмотрим первое приближение $(\psi, u_1^+, u_1^-, \gamma_1)$ задачи (1)–(11). В силу свойств непрерывности функции $u_0(x, y)$ и ее производных на γ условие (34) можно записать в таком виде:

$$u_{0x}u_{1x}^- + u_{0y}u_{1y}^- = u_{0x}u_{1x}^+ + u_{0y}u_{1y}^+, \quad (x, y) \in \gamma_0, \quad (41)$$

кроме того, на γ_0 как и раньше должно выполняться условие

$$u_1^+ = u_1^-, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (42)$$

Покажем, что на γ_0 справедливы равенства

$$u_{1x}^+ = u_{1x}^-, \quad u_{1y}^+ = u_{1y}^-, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (43)$$

Действительно, дифференцируя соотношение (42) по x , получим

$$u_{1x}^- + u_{1y}^- y_0'(x) = u_{1x}^+ + u_{1y}^+ y_0'(x).$$

Учитывая теперь, что $u_{0x} + u_{0y} y_0'(x) = 0$ на γ_0 , получим

$$u_{0y}u_{1x}^- - u_{0x}u_{1y}^- = u_{0y}u_{1x}^+ - u_{0x}u_{1y}^+, \quad (44)$$

здесь воспользуемся также непрерывностью функции $u_0(x, y)$ и ее производных на γ_0 . Тогда из соотношений (41) и (44) следует:

$$\begin{cases} u_{0x}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) + u_{0y}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0 \\ u_{0y}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) - u_{0x}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0. \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства как уравнения относительно $(u_{1x}^- - u_{1x}^+)$ и $(u_{1y}^- - u_{1y}^+)$, получим $u_{1x}^- - u_{1x}^+ = 0$, $u_{1y}^- - u_{1y}^+ = 0$, $(x, y) \in \gamma_0$, так как определитель этой системы $\Delta = -(u_{0x}^2 + u_{0y}^2)$ отличен от нуля в D . Следовательно, равенства (43) справедливы.

Таким образом, в силу соотношений (42) и (43) для первого приближения можно ввести функцию $u_1(x, y)$ по следующей формуле

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_1^+(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+}, \\ u_1^-(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^-}. \end{cases} \quad (45)$$

Очевидно, что эта функция является решением такой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x, y), & (x, y) \in D; & \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ u_x(0, y) &= 0, & H \leq y \leq 0; & \quad u_x + \omega_0 u = 0, \quad x = 1, \quad H \leq y \leq 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где $f(x, y) = \psi_{1y}u_{0x} - \psi_{1x}u_{0y}$ при $(x, y) \in D_{\gamma_0}^+$ и $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in D_{\gamma_0}^-$. Итак, доказана лемма.

Лемма 5. Пусть выполнены условия (23). Тогда функция $u_1(x, y)$ является решением задачи (26)–(34). При этом функции $u_1(x, y)$, $u_1^+(x, y)$ и $u_1^-(x, y)$ связаны между собой равенством (45).

Зная функции $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$, теперь из соотношения (31) находим

$$y_1(x) = -\frac{u_1(x, y)}{u_{0y}(x, y)}, \quad (x, y) \in \gamma_0.$$

Следовательно, при малых μ получим такое представление:

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + O(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1(x, y)}{u_{0y}(x, y)} + O(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (47)$$

Соотношение (47) позволяет в первом приближении исследовать зависимость свободной границы γ от μ и выявить насколько существенно конвекция влияет на геометрию фронта кристаллизации.

Теорема 2. Пусть величина μ достаточно мала и пусть имеет место соотношение (23). Тогда справедливо представление (47), где функции $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$ являются решениями задач соответственно (26) и (46), а $y_0(x)$ – решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$ в классе функций $u_{0y} > 0$ в D .

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае, когда условие (23) не выполняется, вместо формулы (47) при малых μ применяется следующее представление:

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + O(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1^\pm(x, y)}{u_{0y}^\pm(x, y)} + O(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0.$$

1. Данилюк И.В. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133–185.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наукова думка, 2005. – 354 с.
3. Базалый Б.В., Шелепов В.Ю. Об одной стационарной задаче Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 5–8.
4. Базалый Б.В., Шелепов В.Ю. Об одном обобщении стационарной задачи Стефана // Мат. физика. – 1975. – **27**. – С. 65–80.
5. Friedrichs K.O. Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – P. 60–82.
6. Миненко А.С. Методы исследования задач со свободной границей. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018. – 169 с.
7. Миненко А.С. Осесимметрическое течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №4. – С. 477–488.
8. Данилюк И.И., Миненко А.С. О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
9. Данилюк И.В., Миненко А.С. Об одной оптимизационной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 5. – С. 389–392.

A. S. Minenko

On a variational method of investigation of the Stefan convective problem.

Two-dimensional stationary convective problem is analyzed when the convection is caused by the occurrence of prescribed intensity rotation μ . Method of studying this problem which is a series expansion according to the powers of small parameter μ is proposed. In this case null expansion term is defined by Ritz method. Formula of dependence of free boundary equation on μ is obtained.

Keywords: free boundary, functional, Bernoulli's law, rotation, Ritz method.

Донецкий национальный технический ун-т
sam_dntu@mail.ru

Получено 06.09.18

УДК 517.954

©2018. А. Л. Павлов

ОПИСАНИЕ НУЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дано описание множества нулевых решений общей краевой задачи в полупространстве, в классах обобщенных функций медленного роста, т.е. удовлетворяющих однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и нулевым граничным условием.

Ключевые слова: краевая задача, обобщенная функция медленного роста, мультипликатор.

1. Введение. Рассматривается общая краевая задача для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве

$$P(\partial_x, D_y)u(x, y) \equiv \sum_{k=0}^m P_k(D_y)\partial_x^k u(x, y) = 0, \quad x \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$$B_j(\partial_x, D_y)u(x, y)|_{x=0} \equiv \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(D_y)\partial_x^k u(x, y)|_{x=0} = g_j(y), \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.2)$$

где $D_y = (D_{y_1}, \dots, D_{y_n})$, $D_{y_k} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}$, $P_k(\sigma)$, $B_{jk}(\sigma)$ – многочлены, $m \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, r$.

Имеется множество работ, посвященных задаче (1.1), (1.2) для определенных типов уравнений. В достаточной общности эта задача была рассмотрена в [1–4]. В этих работах выделен класс регулярных уравнений, для которых рассмотрены некоторые краевые задачи в классе обобщенных функций, зависящих от параметра x , который состоит из квадратично интегрируемых функций и их обобщенных производных любого порядка, имеющих в этом пространстве определенное поведение при $x \rightarrow \infty$, а также в некоторых более широких классах. Классы единственности в пространствах степенного роста и убывания для рассматриваемой задачи приведены в [5]. Необходимые и достаточные условия корректности задачи (1.1), (1.2) в пространствах функций быстро убывающих по касательным переменным и имеющих экспоненциальное поведение на бесконечности по выделенной переменной содержится в работе [6]. Там же на основе этих результатов получены достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространствах обобщенных функций медленного роста по касательным переменным, для однородного и неоднородного уравнения, которые существенно усилены в [7].

Как и в случае эллиптических уравнений, представляет интерес описание множества нулевых решений задачи (1.1), (1.2), т.е. ее решений при $g_j = 0$, $j = 1, \dots, r$, в различных классах функций. Целью настоящей работы является описание нулевых решений задачи (1.1), (1.2) в классах обобщенных функций медленного роста.

Основным приемом исследования задачи (1.1), (1.2) является применение преобразования Фурье по переменной y , которое сводит данную задачу к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Поэтому описание нулевых решений задачи сводится к исследованию множества решений задачи:

$$P\left(\frac{d}{dx}, \sigma\right)v(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (1.3)$$

$$B_j\left(\frac{d}{dx}, \sigma\right)v(x)\Big|_{x=0} = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.4)$$

Задача (1.1), (1.2) рассматривается для регулярных уравнений, которые являются аналогом корректных по Петровскому уравнений в теории задачи Коши [8].

Предположим, что $P_m(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение

$$P(\lambda, \sigma) \equiv \sum_{k=0}^m P_k(\sigma)\lambda^k = 0 \quad (2.1)$$

имеет при каждом $\sigma \in \mathbb{R}^n$ m корней. Занумеруем λ -корни этого уравнения в порядке неубывания вещественной части

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leq \operatorname{Re} \lambda_2(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_i(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_m(\sigma).$$

Обозначим через G_k^a множество точек $\sigma \in \mathbb{R}^n$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_k(\sigma) \leq a$. Уравнение (1.1) называется регулярным, если существуют такие $a \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{N}$, что $G_r^a = \mathbb{R}^n$, а $\operatorname{mes} G_{r+1}^a = 0$. Число r естественно называть порядком регулярности уравнения (1.1), а уравнение – a -регулярным порядка r . Регулярные уравнения порядка m являются корректными по Петровскому.

Кроме условия a -регулярности порядка r будем предполагать, что выполняется условие Лопатинского в такой форме:

(L) для любого $\sigma \in \mathbb{R}^n$ и любых $h_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r$ существует в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{R}_+)$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям

$$B_j\left(\frac{d}{dx}, \sigma\right)v(x)\Big|_{x=0} = h_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

2. Функциональные пространства. Пространство медленно растущих обобщенных функций S' является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством S , состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(y)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(y)\|_{l,k} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |y|)^l \sum_{|\alpha| \leq k} |D_y^\alpha \varphi(y)| \right], \quad l, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим семейство подпространств S' , зависящих от параметров s и l :

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s |\mathcal{F}_y((1 + |y|^2)^{l/2} f)|^2 d\sigma \right]^{1/2} < +\infty \right\}, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{F}_y g$ – преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$. Это двухпараметрическое семейство гильбертовых пространств обладает замечательными свойствами [8], в частности:

- 1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s} ;
- 2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье \mathcal{F} ;
- 3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s .

Так как $H_l^s \subset H_{l'}^s$, $l' < l$, то можно определить индуктивный предел семейства пространств H_l^s при фиксированном s . Обозначим его через $H_{-\infty}^s$. Аналогично определяется пространство $H_l^{-\infty}$.

Через $C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, $a, p \in \mathbb{R}$, обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(x)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_l^s с конечной нормой:

$$\|v(x)\|_{C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)} \equiv \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}_+, 0 \leq \nu \leq k} \left[(1+x)^{-p} e^{-ax} \left\| \frac{d^\nu v(x)}{dx^\nu} \right\|_l^s \right]. \quad (2.2)$$

Пространство $C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ является банаховым. Преобразование Фурье по y отображает изоморфно пространство $C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ на $C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$.

Имеют место непрерывные вложения

$$C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s) \subset C_{ap'}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l'}^{s'}), \quad s \geq s', \quad l \geq l', \quad p \leq p'.$$

Учитывая эти вложения можно с помощью операции объединения построить пространства $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$. В топологии индуктивного предела эти пространства являются полными локально выпуклыми. Пользуясь свойствами пространств H_l^s , можно определить пространство $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ как индуктивный предел этих пространств. Пространство $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ является полным локально выпуклым пространством, инвариантным относительно преобразования Фурье. Функция $u(x)$ принадлежит пространству $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, если существуют такие s, l и p , что $u(x) \in C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Аналогично определяется пространство $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{-\infty}^s)$.

Решения задачи (1.1), (1.2) будут рассматриваться в пространствах $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ при $k \geq \bar{m} = \max\{m, m_1, \dots, m_r\}$. Граничные данные в (1.2) принадлежат соответственно пространствам S', H_l^s .

Через $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ обозначим банахово пространство скалярных функций, которое определяется аналогично пространству $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$

3. Нулевые решения краевой задачи. В работе [7] доказано, что задача (1.1), (1.2) разрешима в классе функций $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, если граничные данные

принадлежат S' , уравнение (1.1) является a -регулярным порядка r , выполнено условие Лопатинского, множество G_{r+1}^a конечно и многочлен не имеет кратных полиномиальных делителей. Множество нулевых решений задачи (1.1), (1.2) в классе функций $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ может быть описано на основе следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Если уравнение (1.1) является a -регулярным порядка r , выполнено условие (\mathbf{L}) и $G_{r+1}^a = \{a_1, \dots, a_p\}$, то множество решений задачи (1.3), (1.4) в классе функций $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ образует бесконечномерное линейное пространство, состоящее из обобщенных функций вида*

$$v(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{|\alpha| \leq \nu_i} \omega_{\alpha i}(x) \delta_{a_i}^\alpha, \quad (3.1)$$

где δ_{a_i} – дельта-функция, сосредоточенная в точке a_i , $\omega_{\alpha i}(x) \in C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ – экспоненциальные многочлены, являющиеся решениями краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Пусть $v(x)$ – решение задачи (1.3), (1.4), принадлежащее пространству $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$. Тогда оно сосредоточено при каждом $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ на множестве G_{r+1}^a при выполнении условия (\mathbf{L}) [5]. В силу изолированности точек множества G_{r+1}^a и инвариантности множества решений задачи (1.3), (1.4) при умножении на функции из пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно считать, что рассматриваемое решение этой задачи сосредоточено при каждом $x \geq 0$ в одной из точек a_i . Для удобства будем считать, что это точка $a = 0$. Рассмотрение в других точках обеспечивается линейной заменой переменных, сохраняющей вид решения.

Пусть $\omega(x) \in C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ – решение задачи (1.3), (1.4) и $\text{supp } \omega(x) = \{0\}$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. На основании описания обобщенных функций, сосредоточенных в точке (см., например [9]), имеем равенство

$$\omega(x) = \sum_{|\alpha| \leq \nu} \omega_\alpha(x) \delta^\alpha, \quad (3.2)$$

где ν – некоторое число, $\omega_\alpha(x) \in C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Подставив функцию $\omega(x)$ в уравнение (1.3), получим равенство

$$\sum_{|\alpha| \leq \nu} \left(\sum_{i=0}^m P_i(\sigma) \frac{d^i \omega_\alpha(x)}{dx_i} \right) \delta^\alpha = 0. \quad (3.3)$$

Для преобразования равенства (3.3) воспользуемся равенством

$$\sum_{|\alpha| \leq \nu} f_\alpha(\sigma) \delta^\alpha = \sum_{|\beta| \leq \nu} \left(\sum_{\alpha \geq \beta, |\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f_\alpha(0) \right) \delta^\beta, \quad (3.4)$$

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Это равенство устанавливается применением левой его части к произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и использованием формулы Лейбница:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha| \leq \nu} f_\alpha(\sigma) \delta^\alpha, \varphi \right) &= \sum_{|\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|} \sum_{\alpha \geq \beta} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f_\alpha(0) \delta^\beta \varphi(0) = \\ &= \left(\left(\sum_{|\beta| \leq \nu} \left(\sum_{\alpha \geq \beta, |\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f_\alpha(0) \right) \delta^\beta \right), \varphi \right). \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (3.4), равенство (3.3) можно записать в следующем виде

$$\sum_{|\beta| \leq \nu} \left(\sum_{\alpha \geq \beta, |\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha^\beta \left(\sum_{i=0}^m \partial^{\alpha-\beta} P_i(0) \frac{d^i \omega_\alpha(x)}{dx^i} \right) \right) \delta^\beta = 0. \quad (3.5)$$

Так как функции $\{\delta^\beta, \beta \in Z_+^n\}$ линейно независимы, то равенство (3.5) равносильно системе равенств

$$\sum_{\alpha \geq \beta, |\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha^\beta \left(\sum_{i=0}^m \partial^{\alpha-\beta} P_i(0) \frac{d^i \omega_\alpha(x)}{dx^i} \right) = 0, \quad |\beta| \leq \nu. \quad (3.6)$$

Аналогично получаем из граничных условий (1.4) следующую систему равенств

$$\sum_{\alpha \geq \beta, |\alpha| \leq \nu} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha^\beta \left(\sum_{i=0}^m \partial^{\alpha-\beta} B_{jk}(0) \frac{d^k \omega_\alpha(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad |\beta| \leq \nu. \quad (3.7)$$

Рассмотрим равенства систем (3.6) и (3.7), соответствующие мультииндексам β , удовлетворяющим условию $|\beta| = \nu$:

$$\sum_{i=0}^m P_i(0) \frac{d^i \omega_\beta(x)}{dx^i} = 0, \quad |\beta| = \nu, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=0}^m B_{jk}(0) \frac{d^k \omega_\beta(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = 0, \quad |\beta| = \nu, \quad j = 1, \dots, r. \quad (3.9)$$

Как показано в [7], решение задачи (3.8), (3.9), принадлежащее пространству $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$, является решением задачи

$$P_q^- \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) \omega(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^q B'_{jk}(0) \frac{d^{k-1} \omega(0)}{dx^{k-1}} = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.11)$$

где $q > r$, $P_q^-(\lambda, 0) = \prod_{i=1}^q (\lambda - \lambda_i(0)) = \sum_{i=1}^q a_i^-(0) \lambda^i$, $\operatorname{Re} \lambda_q(0) \leq a$, $\operatorname{Re} \lambda_{q+1}(0) > a$,

$$B'_j(\lambda, 0) \equiv \sum_{k=1}^q B'_{jk}(0) \lambda^{k-1} = B_j(\lambda, 0) \pmod{P_q^-(\lambda, 0)}.$$

Для описания множества решений задачи (3.10), (3.11) рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^q B'_{jk}(0) \omega_k = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (3.12)$$

Так как выполнено условие **(L)**, то для любых $h_j \in R$, $j = 1, \dots, r$, существует в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}})$ решение задачи (1.5), (1.6) при $\sigma = 0$. Тогда из равенств

$$P \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) = P_q^- \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) P_q^+ \left(\frac{d}{dx}, 0 \right),$$

$$B_j \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) = P_q^- \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) Q_q \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) + B'_j \left(\frac{d}{dx}, 0 \right)$$

следует, что для любых $h_j \in R$, $j = 1, \dots, r$, в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ существует решение задачи

$$P_q^- \left(\frac{d}{dx}, 0 \right) \omega(x) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^q B'_{jk}(0) \frac{d^{k-1} \omega(0)}{dx^{k-1}} = h_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

так как решение уравнения (3.8) из пространства $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является решением уравнения (3.10). Следовательно, ранг матрицы $B'_{jk}(0)$ равен r ([7], лемма 4.1) и система (3.12) имеет $\varkappa = q - r > 0$ линейно независимых решений $(\omega_{i1}, \dots, \omega_{iq})$, $i = 1, \dots, \varkappa$. Каждое такое решение рассмотрим как данные Коши для уравнения (3.10). Обозначим через $\omega_i(x)$ соответствующее решение этой задачи Коши. Из равенств (3.12) следует, что оно является решением задачи (3.10), (3.11), принадлежащим пространству $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Функции $\omega_i(x)$, $i = 1, \dots, \varkappa$, линейно независимы и являются экспоненциальными многочленами, имеющими вид

$$\omega_i(x) = \sum_{j=1}^q C_{ij} x^{k_j} e^{\lambda_j(0)x}, \quad i = 1, \dots, \varkappa, \quad (3.13)$$

где $\lambda_j(0)$ – корни уравнения $P_q^-(\lambda, 0) = 0$, занумерованные без учета кратности, k_j зависит от кратности корня $\lambda_j(0)$. Таким образом, для каждого мультииндекса α ,

$|\alpha| = \nu$, можно выбрать \varkappa линейно независимых решений $\omega_{\alpha_1}(x), \dots, \omega_{\alpha_\varkappa}(x)$ задачи (3.10), (3.11).

Так как обобщенные функции δ^α , $\alpha \in Z_+^n$, линейно независимы, то множество функций вида $\sum_{|\alpha|=\nu} \omega_\alpha(x)\delta^\alpha$, где $\omega_\alpha(x)$ удовлетворяет (3.10), (3.11), образует линейное пространство, размерность которого равна $\varkappa c_n(\nu)$, где $c_n(\nu)$ – количество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \nu$.

Равенства системы (3.6), соответствующие мультииндексам α , $|\alpha| = \nu - 1$, имеют вид

$$\sum_{i=0}^m P_i(0) \frac{d^i \omega_\alpha(x)}{dx^i} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \partial_j P_i(0) \frac{d^i \omega_{\alpha_j}(x)}{dx^i} \right) = 0,$$

где $\alpha_j = \alpha + \gamma_j$, $|\gamma_j| = 1$. Так как $|\alpha_j| = \nu$, то функции $\omega_{\alpha_j}(x)$ уже определены и являются линейными комбинациями функций вида (3.13). Следовательно, вторые слагаемые в приведенных равенствах являются экспоненциальными многочленами. Поэтому функции $\omega_\alpha(x)$, $|\alpha| = \nu - 1$, являются решениями уравнения

$$\sum_{i=0}^m P_i(0) \frac{d^i \omega_\alpha(x)}{dx^i} = \sum_{j=1}^q Q_{\alpha_j}(x) e^{\lambda_j(0)x}, \quad (3.14)$$

где $Q_{\alpha_j}(x)$ – многочлены степени не выше кратности корня $\lambda_j(0)$, и удовлетворяют граничным условиям

$$\sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(0) \frac{d^k \omega_\alpha(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = h_{\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.15)$$

где $h_{\alpha_j} = - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{m_j} \partial_i B_{jk}(0) \frac{d^k \omega_{\alpha_i}(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} \right)$, $|\alpha_i| = \nu$.

Решение задачи (3.14), (3.15) можно представить в виде

$$\omega_\alpha(x) = \omega_{\alpha_H}(x) + \omega_{\alpha_o} + \omega_{\alpha_{oo}}(x), \quad |\alpha| = \nu - 1. \quad (3.16)$$

Здесь $\omega_{\alpha_H}(x)$ – частное решение уравнения (3.14), являющееся экспоненциальным многочленом и зависящее от выбора функций $\omega_\alpha(x)$, $|\alpha| = \nu$, $\omega_{\alpha_o}(x)$ – решение уравнения (3.8), удовлетворяющее граничным условиям (3.15), где правая часть имеет вид

$$h'_{\alpha_j} = h_{\alpha_j} - \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(0) \frac{d^k \omega_{\alpha_H}(x)}{dx^k} \Big|_{x=0},$$

$\omega_{\alpha_{oo}}$ общее решение однородной задачи (3.10), (3.11). Так как в точке $\sigma = 0$ выполняется условие (L), то функция $\omega_{\alpha_o}(x)$ существует при любых правых частях в (3.15) и является экспоненциальным многочленом.

Из представления (3.16) и описания функций в нем следует, что множество решений задачи (3.14), (3.15) состоит из экспоненциальных многочленов.

Так как множество функций $\omega_{\alpha\alpha\alpha}(x)$ образует линейное пространство размерности \varkappa , то множество функций вида $\sum_{\nu-1 \leq |\alpha| \leq \nu} \omega_{\alpha}(x) \delta^{\alpha}$, где функции $\omega_{\alpha}(x)$, $|\alpha| = \nu$, удовлетворяют (3.8), (3.9), а функции $\omega_{\alpha}(x)$, $|\alpha| = \nu - 1$, – (3.14), (3.15), образует линейное пространство, размерность которого равна $\varkappa(c_n(\nu) + c_n(\nu - 1))$.

Аналогично рассматриваются случаи $|\alpha| = \nu - 2$, $|\alpha| = \nu - 3$, ..., $|\alpha| = 0$. Следовательно, множество решений задачи (1.3), (1.4) состоит из функций вида (3.2), где функции $\omega_{\alpha}(x)$, $|\alpha| \leq \nu$, являются экспоненциальными многочленами, удовлетворяющими равенствам (3.6), (3.7), в случае, когда $G_{z+1}^a = \{0\}$.

Если $G_{r+1}^a = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, то с помощью разбиения единицы всякое решение задачи (1.3), (1.4) можно представить в виде (3.1), используя полученное представление (3.2).

Так как числа ν_i , $i = 1, \dots, p$, можно выбирать произвольно, то множество решений задачи (1.3), (1.4) в классе функций $C_{a\infty}^k(\overline{R}_+, S')$ является бесконечномерным линейным пространством.

Следствие 3.1. *Если выполнены условия теоремы 3.1, то в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{R}_+, H_{-\infty}^l)$ при $l \geq -n/2$ нет нетривиальных решений задачи (1.3), (1.4).*

Доказательство. Если функция $\omega(x) \in C_{a\infty}^k(\overline{R}_+, H_{-\infty}^l)$ и является решением задачи (1.3), (1.4), то она имеет вид (3.2). Так как $\delta_a \in H_{-\infty}^{-n/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то при $l \leq -n/2$ $\omega(x) \equiv 0$.

Для описания размерности пространства решений задачи (1.3), (1.4) рассмотрим функцию

$$s_n(\nu) = c_n(\nu) + \dots + c_n(0).$$

Если каждому мультииндексу $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq \nu$, поставить в соответствие мультииндекс $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu - |\alpha|)$, то получим множество всех мультииндексов $(\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$, $|\beta| = \nu$. Следовательно, справедливо равенство $s_n(\nu) = c_{n+1}(\nu)$.

Так как справедливо равенство (см. [10], с. 218)

$$c_n(\nu) = \frac{(\nu + n - 1)!}{\nu!(n - 1)!},$$

то имеет место формула

$$s_n(\nu) = \frac{(\nu + n)!}{\nu!n!}. \quad (3.17)$$

Следствие 3.2. *Если выполнены условия теоремы 3.1, то множество решений задачи (1.3), (1.4) в классе функций $C_{a\infty}^k(\overline{R}_+, H_{-\infty}^l)$, $l < -n/2$, является конечномерным линейным пространством, размерность $d(l)$ которого вычисляется по формуле*

$$d(l) = \left(\sum_{i=1}^p \varkappa_i \right) \theta_n(l), \quad (3.18)$$

где $\varkappa_i = g_i - r$, q_i – количество корней уравнения $p(\lambda, a_i) = 0$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \lambda_i(a_i) \leq a_i$, а функция $\theta_n(l)$ зависит от четности размерности

пространства \mathbb{R}^n и имеет вид

$$\theta_n(l) = \begin{cases} s_n(|l| - 1 + q), & n = 2q, \quad [|l|] = |l|, \\ s_n([|l|] + q), & n = 2q, \quad [|l|] \neq |l|, \\ s_n(|l - 1/2| - 1 + q), & n = 2q + 1, \quad [|l - 1/2|] = |l - 1/2|, \\ s_n(|l - 1/2| - 1 + q), & n = 2q + 1, \quad [|l - 1/2|] \neq |l - 1/2|. \end{cases}$$

Доказательство следствия 3.2 вытекает из линейной независимости слагаемых в 3.1, доказательства теоремы 3.1 и включения $\partial^\alpha \delta_a \in H^{-n/2-|\alpha|-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, и справедливости утверждения $\partial^\alpha \delta_a \notin H^{-n/2-|\alpha|}$.

Теорема 3.2. Если уравнение (1.1) является a -регулярным порядка r , выполнено условие **(L)** и $G_{r+1}^a = \{a_1, \dots, a_p\}$, то нулевые решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ имеют вид

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^p \sum_{|\alpha| \leq \nu_j} \omega_{\alpha j}(x) e^{i(y, a_j)} (iy)^\alpha, \quad x \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (3.19)$$

где $\omega_{\alpha j}(x)$ – экспоненциальные многочлены, удовлетворяющие системам (3.5), (3.6), записанные для точки a_j .

Справедливость формулы (3.19) следует из описания нулевых решений задачи (1.3), (1.4) в теореме 3.1 и формул для преобразования Фурье дельта-функции, сосредоточенной в произвольной точке и ее производных [9].

Теорема 3.3. Если уравнение (1.1) является a -регулярным порядка r , выполнено условие **(L)** и $G_{r+1}^a = \{a_1, \dots, a_p\}$, то множество нулевых решений задачи (1.1), (1.2) из пространства $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{-\infty})$ является конечномерным линейным пространством для всех $l \in \mathbb{R}$. При $l \geq -n/2$ оно состоит из тривиального решения, а при $l < -n/2$ его размерность вычисляется по формуле (3.18).

Справедливость теоремы 3.3 следует из следствий 3.1 и 3.2.

1. Дикополов Г.В., Шилов Г.Е. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР, серия матем. – 1960. – **24**. – С. 369–380.
2. Дикополов Г.В., Шилов Г.Е. О корректных краевых задачах в полупространстве для уравнений в частных производных с правой частью // Сиб. мат. жур. – 1960. – **1**, № 1. – С. 45–61.
3. Паламодов В.П. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР, серия матем. – 1960. – **24**. – С. 381–386.
4. Дикополов Г.В. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Матем. сб. – 1962. – **59** (101). – С. 215–228.
5. Павлов А.Л. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Матем. сб. – 1977. – **103** (145), № 3 (7). – С. 367–391.
6. Павлов А.Л. Корректность общих краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классах функций степенного роста и убывания // Украинский математический вестник. – 2010. – **7**, № 1. – С. 73–118.
7. Павлов А.Л. Разрешимость краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе медленно растущих обобщенных функций // Сиб. мат. ж. – 2013. – **54**, № 4. – С. 871–889.

8. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. – 1972. – **27**, № 3. – С. 65–143.
9. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – **1**. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 496 с.

A. L. Pavlov

Description of zeroth solutions of a general boundary value problem in a half-space for differential equations with constant coefficients.

We give a description of the set of zero solutions of a general boundary value problem in a half-space in classes of tempered distributions, that is, satisfying a homogeneous differential equations with constant coefficients and zero boundary conditions.

Keywords: *boundary-value problem, tempered distribution, multiplier.*

Донецкий национальный ун-т
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
alex4909@gmail.com

Получено 14.05.18

УДК 517.9

©2018. Д. А. Сапронов

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

В статье установлены в определённом смысле точные достаточные условия на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи Коши для параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции.

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, диффузия, конвекция.

1. Постановка задачи. В области $G_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $T > 0$, рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t + A_p u + B_\lambda u \equiv u_t - \sum_{i=1}^n D_i a_i(t, x, u, \nabla_x u) + \chi \cdot \nabla_x b(t, u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

где каратеодориевы функции $a_i(t, x, s, \xi)$ и непрерывная функция $b(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$a_i(t, x, s, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in G, \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geq d_0 |\xi - \eta|^{p+1} \quad (4)$$

$$\forall (t, x, s, \xi) \in G_T \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, s, \eta) \in G_T \times \mathbb{R}^{n+1}, \quad d_0 > 0, p > 1,$$

$$|a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta)| \leq d_1 |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{p-1} \quad (5)$$

$$\forall (t, x, \xi) \in G_T \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, \eta) \in G_T \times \mathbb{R}^{n+1}, \quad d_1 < \infty,$$

$$b(t, 0) = 0, \quad |b(t, s_1) - b(t, s_2)| \leq d_2 (|s_1| + |s_2|)^{\lambda-1} |s_1 - s_2|, \quad \lambda \geq p, d_2 < \infty, \quad (6)$$

$$d_3 |s|^{\lambda+1} \leq s b(t, s) - \int_0^s b(t, \theta) d\theta \leq d_4 |s|^{\lambda+1} \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad 0 < d_3 < d_4 < \infty. \quad (7)$$

Уравнения структуры (1) и близкие к ним возникают в математической физике при описании различных процессов (фильтрация жидкостей и газов, теплопроводность, движение плазмы и т.д.), в которых в направлении вектора χ присутствует конвективный перенос. Одним из важнейших вопросов в их исследовании является

установление условий существования решений. Первые результаты в этом направлении были получены в [1] при исследовании уравнений ньютоновской фильтрации (см. [2]). Позднее они были распространены в [3], [4] на задачи Коши–Дирихле и Коши для одномерных уравнений ньютоновской диффузии-конвекции с непрерывными и ограниченными начально-краевыми условиями. Разрешимость смешанных задач для многомерных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации с младшими членами (абсорбцией и конвекцией) исследовалась многими авторами (к примеру, [5–8] и ссылки к ним).

Развитием проблемы является вопрос разрешимости задачи Коши с растущими на бесконечности начальными данными. Так, при $n = 1$, $\chi = 0$ изотропные условия существования решения (1), (2) были установлены в [9] и обобщены впоследствии в [10, 11] соответственно на многомерные уравнения и уравнения высокого порядка. Наличие «несимметричного» конвективного члена в уравнении в зависимости от показателей нелинейности приводит к возникновению анизотропных условий разрешимости задачи Коши. Так, в [12] и [13] таковые установлены для одномерного уравнения ньютоновской фильтрации-конвекции. В [14] найдены оценки снизу скорости роста ненулевого решения (1), (2) с $u_0 = 0$. В работе [15] установлены в некотором смысле точные ограничения на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи (1), (2), причем при $1 < \lambda \leq \frac{2p}{p+1}$ они изотропны, а при $\frac{2p}{p+1} < \lambda < p$ анизотропны.

В данной работе найдены в некотором смысле точные анизотропные условия на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, достаточные для разрешимость задачи (1)–(2) при $p \geq \lambda$. Метод исследования основан на априорных оценках типа принципа Сен–Венана в теории упругости.

2. Формулировка основных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Энергетическим обобщенным решением задачи Коши (1), (2) мы назовем функцию $u(t, x)$ такую, что в произвольной ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}((0, T) \times \Omega)\}$$

удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle u'_t, w \rangle dt + \int_{(0, T) \times \Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) w_{x_i} dx dt + \int_0^T \langle \chi \cdot \nabla_x b(t, u), w \rangle dt = 0$$

при любой $w(t, x) \in L_{p+1}(0, T; \dot{W}_{p+1}^1(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega)$, а также начальному условию (2) в смысле пространства $C([0, T]; L_2(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения 1 следует справедливость следующего интегрального тождества (см. [5, 6, 11]):

$$2^{-1} \int_{\Omega} |u(T_0, x)|^2 \phi(T_0) \psi(x) dx + \int_{(0, T_0) \times \Omega} \left[-2^{-1} |u|^2 \phi'(t) \psi(x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) (u \cdot \psi)_{x_i} \phi(t) - B(t, u) \chi \cdot \nabla_x \psi(x) \phi(t) \Big] dx dt = \\
 & = 2^{-1} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 \phi(0) \psi(x) dx, \quad B(t, u) = u b(t, u) - \int_0^u b(t, s) ds \quad (8)
 \end{aligned}$$

для произвольных ограниченных $\Omega \in \mathbb{R}^n$, любых $0 < T_0 \leq T < \infty$, $\phi(t) \in C^1[0, T_0]$, $\psi(x) \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу леммы 4 из дополнения при $p > 1$, $1 < \lambda < p + \frac{2(p+1)}{n}$ выполнено:

$$V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)), \quad v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) \right\},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Монотонно возрастающую функцию $f(s)$ назовем регулярно монотонной, если для произвольного $0 < \delta < 1$ существуют $0 < \delta_1(\delta) \leq \delta_2(\delta) < 1$ такие, что

$$\delta_1 f(s) \leq f((1 - \delta)s) \leq \delta_2 f(s) \quad \forall 0 < s_0 < s \leq \infty.$$

ПРИМЕР 1. Функция $f(s) = as^b$, $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, является регулярно монотонной при $\forall s > 0$, $0 < \delta_1 = \delta_2 = (1 - \delta)^b < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(v, \tau, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : -v < x_1 < s, |x_i| < \tau\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad -v < s, \quad \tau > 0,$$

$$G_T(v, \tau, s) = (0, T) \times \Omega(v, \tau, s),$$

$$I_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{p+1} dx dt, \quad J_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{\lambda+1} dx dt,$$

$$\Phi_T(v, \tau, s) = \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_t(v, \tau, s)} |u|^2 dx, \quad h_0(v, \tau, s) = \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0|^2 dx,$$

$h_0(v, \tau, s) \leq h(v, \tau, s) \equiv h_2(s)^{1-\kappa_1} h_1(\tau)^{\kappa_1} + h_3(v)^{1-\kappa_2} h_1(\tau)^{\kappa_2}$, $h(v, \tau, s)$ – минимальная непрерывная мажоранта функции $h_0(v, \tau, s)$; $h_2^{-1}(s)$, $h_3^{-1}(v)$ – функции, обратные соответственно $h_2(s)$, $h_3(v)$; $\tilde{h}_0(v, \tau) = h_0(v, \tau, 1) + \tau^{n-1} \leq \tilde{h}(v, \tau) \equiv \tilde{h}_3(v)^{1-\kappa_2} \tilde{h}_1(\tau)^{\kappa_2}$, $\tilde{h}(v, \tau)$ – минимальная непрерывная мажоранта функции $h_0(v, \tau, 1) + \tau^{n-1}$, $\tilde{h}_3^{-1}(v)$ – функция, обратная функции $\tilde{h}_3(v)$, $0 < \kappa_i < 1$, $i \in \{1, 2\}$ – некоторые постоянные.

В дальнейшем, не ограничивая общности рассмотрений, будем предполагать, что $\chi = (\chi_1, 0, \dots, 0)$, $\chi_1 = \text{const} > 0$. Кроме того, через c , c_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от параметров задачи.

Теорема 1. Пусть в (1) выполнено $p < \lambda \leq p + \frac{2(p-1)}{n}$, а функции $h_1(\tau)$ и $h_3(v)$ удовлетворяют соответственно условиям

$$h_1(\tau) \leq k_1 \tau^{\alpha_1} \quad \forall \tau > \tau' > 0, \quad k_1 < \infty, \quad \alpha_1 = n + \frac{2(p+1)}{p-1}. \quad (9)$$

$$h_3(v) \leq k_3 v^{\alpha_3} \quad \forall v > v' > 0, \quad k_3 < \infty, \quad \alpha_3 = \frac{n(p-1)}{(p+1)(\lambda-1)} + \frac{2}{\lambda-1}. \quad (10)$$

Тогда существует $T^{(1)} = T^{(1)}(k_1, k_3) > 0$ такое, что задача (1), (2) разрешима в G_T при всех $T < T^{(1)}$. Если же для $u_0(x)$ выполнены условия

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) \tau^{-\alpha_1} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} h_3(v) v^{-\alpha_3} = 0, \quad (11)$$

то $T^{(1)} = +\infty$. Кроме того, при любых $T < T^{(1)}$ для решения $u(t, x)$ задачи (1), (2) верна следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} I_T((\tilde{h}_3^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau, 0) + T^{1-\theta} (T^{-1+\sigma} J_T((\tilde{h}_3^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \leq \\ \leq A_1 T^{1-\theta+\gamma(T)(1+\alpha)} \tilde{h}_1(\tau)^{1+\alpha} \quad \forall \tau > \tau^{(1)}(T), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\theta = \frac{n(p-1)}{2(p+1) + n(p-1)}, \quad \alpha = \frac{p+1}{n} \theta, \quad \sigma = \frac{n(\lambda-1)}{2(p+1) + n(p-1)}, \quad \beta = \frac{p+1}{n} \sigma, \quad (13)$$

$$\tau^{(1)}(T) = \max\{(\tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_3^{-1})(v'), \tau', \tau_1^{(1)}(T), \tau_3^{(1)}(T)\},$$

$$\tau_1^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta+\gamma(T)\alpha}{p+1}} \tilde{h}_1(\tau)^{\alpha^{-1}} < \delta^{(1)} \tau\},$$

$$\tau_3^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta+\gamma(T)\alpha}{p+1}} \tilde{h}_1(\tau)^{\alpha^{-1}} + T^{1-\sigma+\gamma(T)\beta} \tilde{h}_1(\tau)^{\alpha_3^{-1}} < \delta^{(3)} (\tilde{h}_3^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau)\},$$

$\gamma(T) = 2^{-1}(1 + \text{sign}(T - 1))$, $\delta^{(1)} > 0$, $\delta^{(3)} > 0$ – произвольные постоянные, $A_1 = A_1(\delta^{(1)}, \delta^{(3)}) = \text{const} > 0$, $\tilde{h}_1(\tau)$ и $(\tilde{h}_3^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau)$ – регулярно монотонные функции.

Замечание 3. В условиях теоремы выполнено $\alpha_3 < \alpha_1$.

Теорема 2. Пусть в (1) выполнено $p = \lambda$. Тогда существуют постоянные $k^{(2)} > 0$ и $k^{(3)} > 0$ такие, что если $h(v, \tau, s)$ удовлетворяет ограничениям

$$h_2(s) \leq k^{(2)} \exp(k^{(3)} s) \quad \forall s > s' > 0, \quad (14)$$

а также (9) и (10), то задача (1), (2) разрешима в G_T при всех $T < T^{(2)}$, где $T^{(2)} = T^{(2)}(k_1, k_3) > 0$. Если же дополнительно для $h(v, \tau, s)$ выполнены условия (11), то $T^{(2)} = +\infty$. При этом решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) при всех $T < T^{(2)}$ удовлетворяет следующей априорной оценке:

$$\begin{aligned} \Phi_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) + ((h_2^{-1} \circ h_1)(\tau))^{-1} I_T(0, \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) \leq \\ \leq A_2 h_1(\tau) \quad \forall \tau \geq \tau^{(2)}(T) = \max\{\tau_1^{(2)}(T), \tau_3^{(2)}(T), (h_1^{-1} \circ h_2)(s'), (h_1^{-1} \circ h_3)(v'), \tau'\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tau_1^{(2)}(T) = \inf \{ \tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta^{(1)} \tau \}, \quad (16)$$

$$\tau_3^{(2)}(T) = \inf \{ \tau : T^{1-\theta} h_1(\tau)^{\alpha_3^{-1}} + T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta^{(3)} (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau) \}, \quad (17)$$

$\delta^{(1)} > 0$, $\delta^{(3)} > 0$ – произвольные постоянные, $A_2 = A_2(\delta^{(1)}, \delta^{(3)}) = \text{const} > 0$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$ – регулярно монотонные функции, а монотонно возрастающая функция $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$ удовлетворяет следующему условию монотонности: для любого $0 < \delta < 1$ существует $0 < \delta_3(\delta) < \infty$ такое, что

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau) - \delta_3 \geq (h_2^{-1} \circ h_1)((1 - \delta)\tau). \quad (18)$$

ПРИМЕР 2. Функция $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau) = k_1 \ln(k_2 \tau)$, $0 < k_1 < \infty$, $0 < k_2 < \infty$ удовлетворяет условию (18) при $\delta_3 = k_1 \ln((1 - \delta)^{-1})$, $\forall \tau > k_2^{-1}$, $k_2(1 - \delta) > 1$.

3. Вспомогательные построения и утверждения. В дальнейшем мы будем использовать следующее интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо:

$$\|v\|_{L_a(\mathbb{R}_\pm^n)} \leq d_5 \|\nabla_x v\|_{L_b(\mathbb{R}_\pm^n)}^\theta \|v\|_{L_d(\mathbb{R}_\pm^n)}^{1-\theta}, \quad (19)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из пространства

$$W_b^1(\mathbb{R}_\pm^n) \cap L_d(\mathbb{R}_\pm^n), \quad a > 1, \quad b > 1, \quad d > 0, \quad d_5 > 0,$$

а $\theta \in [0, 1]$ определяется из равенства $\frac{1}{a} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{n})\theta + \frac{1}{d}(1 - \theta)$.

Введем неотрицательную срезающую функцию $\zeta(s)$, обладающую следующими свойствами: $\zeta(s) = 1$ при $s \leq 0$, $\zeta(s) = 0$ при $s \geq 1$, $\zeta(s) = 1 - s$ при $0 < s < 1$.

Обозначим

$$\zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}(x) = \prod_{i=2}^n \zeta \left(\left| \frac{x_i - \tau + \Delta \tau}{\Delta \tau} \right| \right) \zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) \quad \forall 0 < \Delta \tau < \tau,$$

где

$$\zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) = \begin{cases} \zeta \left(\frac{x_1 - s + \Delta s}{\Delta s} \right), & x_1 \geq 0, \quad \forall 0 < \Delta s \leq s, \\ \zeta \left(-\frac{x_1 - v + \Delta v}{\Delta v} \right), & x_1 \leq 0, \quad \forall 0 < \Delta v \leq v. \end{cases}$$

Введем также непрерывную на \mathbb{R}^n функцию $\xi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\xi_j(x) = 1$ при $|x_i| \leq j$, $\xi_j(x) = 0$ при $|x_i| \geq j + 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и определим последовательность функций $u_0^{(j)}(x) = u_0(x) \xi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, приближающих $u_0(x)$ в пространстве $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим последовательность задач Коши–Дирихле вида

$$u_t^{(j)} + A_p u^{(j)} + B_\lambda u^{(j)} = 0, \quad (x, t) \in G_T(j + 1), \quad T > 0, \quad (20)$$

$$u^{(j)}|_{t=0} = u_0^{(j)}(x) \in L_2(\Omega(j + 1)), \quad (21)$$

$$u^{(j)}|_{\partial\Omega(j+1)} = 0 \quad \forall 0 < t < T, \quad \Omega(\tau) = \Omega(\tau, \tau, \tau), \quad G_T(\tau) = (0, T) \times \Omega(\tau, \tau, \tau). \quad (22)$$

Из [8] вытекает, что задача (20)–(22) имеет решение

$$u^{(j)}(t, x) \in V_T(\Omega(j+1)) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(j+1))), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(j+1)))\},$$

и, как следствие, $u^{(j)} \in C([0, T]; L_2(\Omega(j+1)))$. В дальнейшем через $u^{(j)}$ будем обозначать продолжение решения задачи (20)–(22) нулем на $(0, T) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega(j+1))$.

Введем следующие функции, связанные с решением $u^{(j)}(t, x)$:

$$I_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad J_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{G_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt, \\ \Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad \Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 dx, \\ h_0^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0^{(j)}|^2 dx.$$

Лемма 1. Пусть $u^{(j)}(t, x)$ – энергетическое решение задачи (20)–(22). Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \int_{G_T(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s)} [T^{-1}|u^{(j)}|^2 dx dt + \\ + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \Delta s^{-1} (J_T^{(j)}(0, \tau - \Delta \tau, s - \frac{1}{4}\Delta s) - J_T^{(j)}(0, \tau - \Delta \tau, s - \frac{3}{4}\Delta s)) \leq \\ \leq c [\Delta v^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v, \tau, 0) - I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau, 0)) + \Delta \tau^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v, \tau, s) - I_T^{(j)}(v, \tau - \Delta \tau, s)) + \\ + \Delta s^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(0, \tau, s) - I_T^{(j)}(0, \tau, s - \Delta s)) + \Delta v^{-1} (J_T^{(j)}(v, \tau, 0) - J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau, 0)) + \\ + h_0^{(j)}(v, \tau, s)], \quad \forall \tau > 0, \quad \forall v < s. \quad (23)$$

Доказательство. Подставляя в (8) в качестве срезающей функции

$$\psi(x)\phi(t) = \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^l(x) \exp(-tT^{-1}), \quad l \geq p+1,$$

после очевидных преобразований получаем:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^l dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{G_T(v,\tau,s)} [(2T)^{-1}|u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^l] dx dt + \\
 & + l \int_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-1} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right) dx dt \leq \\
 & \leq l e \sum_{i=1}^n \int_{G_T(v,\tau,s)} |\nabla_x u^{(j)}|^p |u| \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt + \\
 & + l \int_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right) dx dt + \frac{e}{2} h_0^{(j)}(v, \tau, s). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Из (24) в силу неравенства Юнга с ε следует:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^l dx + \int_{G_T(v,\tau,s)} [T^{-1}|u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1}] \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\delta s}^l dx dt + \\
 & + \int_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt \leq \\
 & \leq c \left(\sum_{i=1}^n \int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-p} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right|^{p+1} dx dt + \right. \\
 & \left. + \int_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{l-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt + h_0^{(j)}(v, \tau, s) \right), \quad (25)
 \end{aligned}$$

откуда очевидно вытекает (23).

Лемма 2. Пусть $u^{(j)}(t, x)$ – энергетическое решение задачи (20)–(22) при $\lambda > p$. Тогда верно следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s) + T^{-1} \int_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s)} |u^{(j)}|^2 dx dt + \\
 & + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s) \leq c (\Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \\
 & + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + T^{\gamma(T)} \tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, 2s)), \quad (26)
 \end{aligned}$$

$\forall 0 < \Delta v \leq v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall s > 0$, где

$$\tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, s) = h_0^{(j)}(v, \tau, s) + s\tau^{n-1} s^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + s^{-\frac{(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}}\right).$$

Доказательство. Из неравенства Юнга с ε , очевидно, вытекает:

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(0,\tau,2s)} |u^{(j)}|^{p+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s}^{l-p} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s} \right|^{p+1} dx dt \leq \\ & \leq \varepsilon \int_{G_T(0,\tau,2s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s}^{\frac{(l-p)(\lambda+1)}{p+1}} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s} \right| dx dt + \\ & + c(\varepsilon) \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s} \right|^{\frac{(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,2s,s} \right|^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} T s \tau^{n-1} \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Подставляя последнее неравенство при $\Delta\tau \geq 1$ и $l = \max \left\{ p+1, p \frac{\lambda+1}{\lambda-p} - \frac{p+1}{\lambda-p} \right\}$ в правую часть (25), после простых преобразований приходим к (26). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для решений $u^{(j)}$ задач (20)–(22) при $p > 1$, $1 < \lambda \leq p + \frac{2(p-1)}{n}$ имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega(v,\tau,s)))} \leq C(v,\tau,s,T) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall 0 < \tau < \infty, \quad (27)$$

$0 < s < \infty$, $0 < v < \infty$, где $C(v,\tau,s,T)$ – некоторая постоянная, зависящая только от известных параметров задачи (1)–(2) и не зависящая от j . Тогда существует подпоследовательность $u^{(j_k)}$ последовательности $u^{(j)}$, сходящаяся при любых v, τ, s к решению $u(t,x)$ задачи (1), (2) в пространстве $V_T(\Omega(v,\tau,s))$ с нормой

$$\|v\|_{V_T(\Omega(v,\tau,s))} = \|v\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega(v,\tau,s)))} + \|v_t\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v,\tau,s)))}.$$

Доказательство. Так как $u^{(j)}$ – решение задачи (20)–(22), а $A_p + B_\lambda$ из дополнения при $\lambda < p + 2n^{-1}(p-1)$ – нелинейный ограниченный оператор (см. лемму 4 из дополнения)

$$A_p + B_\lambda : L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega(v,\tau,s))) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v,\tau,s))),$$

то в силу (27) выполнено

$$\|u_t^{(j)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v,\tau,s)))} \leq C_1(v,\tau,s,T) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall \tau < \infty.$$

Благодаря ограниченности $\|u^{(j)}\|_{V_T(\Omega(v,\tau,s))}$ из последовательности $\{u^{(j)}\}_1^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность (назовем ее снова $\{u^{(j)}\}_1^\infty$),

которая в силу компактности вложения $V_T(\Omega(v, \tau, s)) \subset L_{p+1}(G_T(v, \tau, s))$ будет фундаментальной в $L_{p+1}(G_T(v, \tau, s))$, т.е.

$$\int_{(0,T) \times \Omega(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \rightarrow 0 \text{ при } i, j \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Покажем, что $u^{(j)}$ имеет предел в $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s)))$. Подставляя в интегральное тождество (8) в качестве пробной функции

$$w(t, x) = (u^{(i)} - u^{(j)}) \zeta_{v,1,\tau,1,s,1}^{p+1}(x),$$

после преобразований с использованием оценок (3)–(5) получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(v-1,\tau-1,s-1)} |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})|^{p+1} dx dt \leq c \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \times \\ & \times \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|u^{(i)} - u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}} + c \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dx dt + \right. \\ & \left. + \int_{G_T(v,\tau,s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dx dt \right), \quad \forall v < j, \tau < j, s < j. \quad (29) \end{aligned}$$

Оценим сверху второе и третье слагаемые в правой части (29). В силу (6)–(7) имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(v,\tau,s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dx dt \leq \\ & \leq c \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|u^{(i)}| + |u^{(j)}|)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}} dx dt \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}}, \quad (30) \\ & \int_{G_T(v,\tau,s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dx dt \leq \\ & \leq c \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|u^{(i)}| + |u^{(j)}|)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}} dx dt \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \times \\ & \times \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (31) \end{aligned}$$

Из (29) в силу (30)–(31), (28) и леммы 4 из дополнения следует:

$$\|u^{(j)} - u^{(i)}\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega(v,\tau,s)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Отсюда в силу ограниченности и непрерывности оператора

$$A_p + B_\lambda : L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s))) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s)))$$

вытекает:

$$\|u_t^{(j)} - u_t^{(i)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty, \quad \forall v < \infty, \quad \forall \tau < \infty, \quad \forall s < \infty. \quad (33)$$

Из соотношений (32), (33) следует фундаментальность $\{u^{(j)}\}$ в пространстве $V_T(\Omega(v, \tau, s))$. Зафиксируем произвольно последовательности $v_i \rightarrow \infty$, $\tau_i \rightarrow \infty$, $s_i \rightarrow \infty$. По ним при помощи диагонального процесса выберем подпоследовательность $u^{(j_i)}$, фундаментальную в $V_T(\Omega(v_i, \tau_i, s_i))$ при любых $i \in \mathbb{N}$. Эта подпоследовательность сходится к $u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – обобщенному решению уравнения (1), причем в силу непрерывности вложения $V_T(\Omega(v, \tau, s)) \subset C(0, T; L_2(\Omega(v, \tau, s)))$ функция $u(t, x)$ удовлетворяет также начальному условию (2). Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Из неравенства (19) при $a = b = p + 1$, $d = 2$ вытекает:

$$\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |v|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |v|^2 dx \right)^{(1-\theta)\frac{p+1}{2}}, \quad (34)$$

где θ – из (13). Из того же неравенства при $a = \lambda + 1$, $b = p + 1$, $d = 2$ следует:

$$\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |v|^{\lambda+1} dx \leq d_5^{\lambda+1} \left(\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}_\pm^n} |v|^2 dx \right)^{(1-\theta_2)\frac{\lambda+1}{2}}, \quad (35)$$

$\theta_2 = \frac{n(p+1)(\lambda-1)}{(\lambda+1)(n(p-1)+2(p+1))}$. Проинтегрируем теперь неравенства (34) и (35) по t , применим неравенство Гельдера и положим в полученном $v = u^{(j)} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1}(x)$. В результате после простых преобразований приходим к следующим соотношениям:

$$I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0) \leq cT^{1-\theta} (\Psi_T^{(j)}(v, \tau, 0) + (\Delta \tau^{-(p+1)} + \Delta v^{-(p+1)}) I_T^{(j)}(v, \tau, 0))^\theta \times \\ \times \Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{(1-\theta)\frac{p+1}{2}} \quad \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \quad \forall 0 < \Delta v < v, \quad (36)$$

$$J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0) \leq cT^{1-\sigma} (\Psi_T^{(j)}(v, \tau, 0) + (\Delta v^{-(p+1)} + \Delta \tau^{-(p+1)}) I_T^{(j)}(v, \tau, 0))^\sigma \times \\ \times \Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{\sigma_1(1-\sigma)} \quad \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \quad \forall 0 < \Delta v < v, \quad \sigma_1 = \frac{n(p-\lambda)+(p+1)(\lambda+1)}{n(p-\lambda)+2(p+1)}, \quad (37)$$

где σ – из (13). Оценивая слагаемые в правой части соотношений (36), (37) с помощью неравенства (26), после замены параметров приходим к соотношениям:

$$I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0) \leq cT^{1-\theta} (\Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) +$$

О разрешимости задачи Коши для многомерных вырождающихся параболических уравнений ...

$$+ \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + T^{\gamma(T)} \tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, 1)^{1+\alpha}, \quad (38)$$

$$J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0) \leq c T^{1-\sigma} (\Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + T^{\gamma(T)} \tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, 1)^{1+\beta} \forall 0 < \Delta v < v, \quad (39)$$

$\forall 0 < \Delta \tau < \tau$, $\beta = (\sigma_1 - 1)(1 - \sigma)$ – из (13). Умножим (39) на $T^{(1-\theta)(1+\beta)(1+\alpha)^{-1}-1+\sigma}$, возведем затем в степень $(1 + \alpha)(1 + \beta)^{-1}$ и сложим полученное соотношение с неравенством (38). В результате имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau) &\equiv I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0) + \\ &+ T^{1-\theta} (T^{-1+\sigma} J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \leq \\ &\leq c T^{1-\theta} (\Delta \tau^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + \Delta v^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + \\ &+ \Delta v^{-(1+\alpha)} J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + (T^{\gamma(T)} \tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, 1))^{1+\alpha} \end{aligned} \quad (40)$$

$\forall 0 < \Delta v < v$, $\forall 0 < \Delta \tau < \tau$. Зафиксируем параметры $\Delta \tau$, Δv следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \tau = \Delta \tau(T, v, \tau) &= (8c T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} + \\ &+ C_1 T^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} > 1, \quad C_1 > 0, \end{aligned}$$

$$\Delta v = \Delta v(T, v, \tau) = (8c T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} + (8c T^{1-\sigma} J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\beta)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Подставив эти значения параметров в правую часть (40), приходим к следующему функциональному соотношению:

$$\tilde{E}_T^{(j)}(\tilde{v}(v, \tau), \tilde{\tau}(v, \tau)) \leq \frac{1}{2} \tilde{E}_T^{(j)}(v, \tau) + c T^{1-\theta+\gamma(T)(1+\alpha)} \tilde{h}_0^{(j)}(v, \tau, 1)^{1+\alpha} \quad (41)$$

$\forall v > 0$, $\tau > 0$, где

$$\tilde{v} = v - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} \tilde{I}_T^{(j)}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} - c T^{1-\sigma-\frac{\beta(1-\theta)}{1+\alpha}} \tilde{I}_T^{(j)}(v, \tau)^{\frac{\beta}{1+\beta}},$$

$$\tilde{\tau} = \tau - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} \tilde{I}_T^{(j)}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} - C_1 T^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{p+1}}, \quad C_1 > 0.$$

Возводя неравенство (41) в степень $\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}$ и умножая на $T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}}$, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_T^{(j)}(v^*(T, v, \tau), \tau^*(T, v, \tau)) &\equiv T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} \tilde{E}_T^{(j)}(v^*(T, v, \tau), \tau^*(T, v, \tau))^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} \leq \\ &\leq \varepsilon \tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau) + c_5 T^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}^{(j)}(v, \tau, 1)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > 0, \quad \tau > 0, \quad \varepsilon = 2^{-\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \quad (42) \\ v^*(v, \tau) &= v - c \tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau) - c T^{\frac{p-\lambda}{p-1}} \tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau)^{\frac{\beta(p+1)}{\alpha}}, \\ \tau^*(v, \tau) &= \tau - c \tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau) - C_1 T^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{p+1}}. \end{aligned}$$

Из ограниченности функции $\tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau)$ следует, что для любого $j < \infty$ существуют $v_0^{(j)} < \infty$, $\tau_0^{(j)} < \infty$ такие, что

$$\tilde{N}_T^{(j)}(v, \tau) \leq cLT^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}(v, \tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > v_0^{(j)}, \forall \tau > \tau_0^{(j)}, L > 1. \quad (43)$$

Из неравенств (42), (43) при выполнении условий (9)–(11), в силу леммы 5 из дополнения, следует:

$$\tilde{N}_T^{(j)}((\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau) \leq cT^{\frac{1-\theta+\alpha\gamma(T)}{p+1}} \tilde{h}_1(\tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall \tau > \tilde{\tau}^{(1)}(T),$$

откуда вытекает (12), а также соотношения:

$$I_T^{(j)}((\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau, 0) \leq cT^{1-\theta+\alpha\gamma(T)} \tilde{h}_1(\tau)^{1+\alpha} \quad \forall \tau > \tilde{\tau}^{(1)}(T), \quad (44)$$

$$J_T^{(j)}((\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau, 0) \leq cT^{1-\sigma+\beta\gamma(T)} \tilde{h}_1(\tau)^{1+\beta} \quad \forall \tau > \tilde{\tau}^{(1)}(T). \quad (45)$$

Из (44), (45) в силу леммы 2 следует:

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega((\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1)(\tau), \tau, s)))} \leq c(\tau, s, T) < \infty \quad \forall \tau < \infty, \quad (46)$$

Согласно (46) и лемме 3 приходим к требуемому. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Полагая в (23) $s = s_0$, $s_i = (s_{i-1} - i\frac{\Delta s}{2})_+$, $i = 1, 2, \dots, \lceil \frac{2s}{\Delta s} \rceil + 1$ и суммируя затем полученные соотношения, после преобразований с последующей заменой параметров получаем:

$$\begin{aligned} & (s - \Delta s) [\Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s)] + \\ & + \Delta s^{-1} I_T^{(j)}(0, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) \leq c\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \\ & + cs [(\Delta v^{-(p+1)} + \Delta v^{-1}) I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + h_0(v, \tau, s)] \end{aligned} \quad (47)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$. Положим в (34) $v = u^{(j)} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta\tau, s, \Delta s}^{p+1}(x)$, затем проинтегрируем по t , применим неравенство Юнга с ε и оценим с помощью полученного неравенства правую часть (47). В результате после замены параметров получим:

$$\begin{aligned} & 2\Delta s^{-1} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + s [\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Psi_T^{(j)}(v, \tau, s)] \leq \\ & \leq c\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau + \Delta\tau, s + \Delta s) + \\ & + \varepsilon(s + \Delta s) \Psi_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta\tau, s + \Delta s) + \\ & + c(\varepsilon)(s + \Delta s) T [(\Delta v^{-\frac{p+1}{1-\theta}} + \Delta v^{-\frac{1}{1-\theta}}) \Phi_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta\tau, 0)^{\frac{p+1}{2}} + \\ & + \Delta\tau^{-\frac{p+1}{1-\theta}} \Phi_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta\tau, s + \Delta s)^{\frac{p+1}{2}} + h_0^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta\tau, s + \Delta s)] \end{aligned} \quad (48)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < 2^{-1}s$. Зафиксируем произвольно $s = s_0, \tau = \tau_0, v = v_0, \Delta s = \Delta s_0, \Delta \tau = \Delta \tau_0, \Delta v = \Delta v_0$ и определим последовательности $s_i = s_{i-1} - \Delta s_{i-1}, \Delta s_i = 2^{-i}\Delta s_0, \tau_i = \tau_{i-1} - \Delta \tau_{i-1}, \Delta \tau_i = 2^{-i}\Delta \tau_0, v_i = v_{i-1} - \Delta v_{i-1}, \Delta v_i = 2^{-i}\Delta v_0, i = 1, 2, \dots$. Итерируя полученные соотношения k раз, приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & s\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + 2\Delta s^{-1}I_T^{(j)}(0, \tau, s) + s\Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq \\ & \leq 2\varepsilon^{k+1}s\Psi_T^{(j)}(v + 2\Delta v, \tau + 2\Delta \tau, s + 2\Delta s) + \\ & + c(\varepsilon)T(s + 2\Delta s)\left[2\sum_{i=0}^k(2^{p+1}\varepsilon)^i(\Delta v^{-\frac{p+1}{1-\theta}} + \Delta v^{-\frac{1}{1-\theta}})\Phi_T^{(j)}(v + 2\Delta v, \tau + 2\Delta \tau, 0)^{\frac{p+1}{2}} + \right. \\ & \left. + 2\sum_{i=0}^k(2^{p+1}\varepsilon)^i\Delta \tau^{-\frac{p+1}{1-\theta}}\Phi_T^{(j)}(v + 2\Delta v, \tau + 2\Delta \tau, s + 2\Delta s)^{\frac{p+1}{2}}\right] + \\ & + c\left(\sum_{i=0}^k(2^{p+1}\varepsilon)^i\Delta s^{-(p+1)}I_T(0, \tau + 2\Delta \tau, s + 2\Delta s) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^k\varepsilon^i(s + 2\Delta s)h_0^{(j)}(v + 2\Delta v, \tau + 2\Delta \tau, s + 2\Delta s)\right). \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 2^{-\frac{p+1}{1-\theta}-1}$ и устремляя затем $k \rightarrow \infty$, после замены параметров в новом соотношении получаем:

$$\begin{aligned} & \Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \\ & + \Delta s^{-1}(s - \Delta s)^{-1}I_T^{(j)}(0, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) \leq c(s - \Delta s)^{-1}(\Delta s)^{-1}\Delta s^{-(p+1)}I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \\ & + cT\left[(\Delta v^{-\frac{p+1}{1-\theta}} + \Delta v^{-\frac{1}{1-\theta}})\Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{\frac{p-1}{2}} + \Delta \tau^{-\frac{p+1}{1-\theta}}\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{p-1}{2}}\right]\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ & + ch_0^{(j)}(v, \tau, s) \quad \forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < 2^{-1}s. \quad (49) \end{aligned}$$

Зафиксируем в (49) параметры $\Delta s, \Delta \tau, \Delta v$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta s &= (4c\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{p}}, \quad \Delta \tau = (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{p-1}{2}})^{\frac{1-\theta}{p+1}}, \\ \Delta v &= (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{\frac{p-1}{2}})^{\frac{1-\theta}{p+1}} + (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{\frac{p-1}{2}})^{1-\theta}. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} & \Phi_T^{(j)}(v^*, \tau^*, s^*) + (s^*\Delta s)^{-1}I_T^{(j)}(0, \tau^*, s^*) \leq \\ & \leq \varepsilon(\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + (s^*\Delta s)^{-1}I_T^{(j)}(0, \tau, s)) + ch_0^{(j)}(v, \tau, s), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (50) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s^* &= s - \Delta s, \quad \tau^* = \tau - (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s))^{\frac{p-1}{2}} \frac{1-\theta}{p+1}, \\ v^* &= v - (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0))^{\frac{p-1}{2}} \frac{1-\theta}{p+1} - (4c\varepsilon^{-1}T\Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0))^{\frac{p-1}{2}} \frac{1-\theta}{p+1} 1^{-\theta}. \end{aligned}$$

Возведя (50) в степень $\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}$ и умножив полученное неравенство на $(4c\varepsilon^{-1}T)^{\frac{1-\theta}{p+1}}$, после очевидных преобразований придем к соотношению:

$$\begin{aligned} P_T^{(j)}(v^*, \tau^*, s^*) + (s^*)^{-\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} R_T^{(j)}(0, \tau^*, s^*) &\equiv (4c\varepsilon^{-1}T)^{\frac{1-\theta}{p+1}} (\Phi_T^{(j)}(v^*, \tau^*, s^*))^{\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} + \\ &+ (s^* \Delta s)^{-1} I_T^{(j)}(0, \tau^*, s^*)^{\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} \leq \varepsilon_1 (P_T^{(j)}(v, \tau, s) + (s^*)^{-\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} R_T^{(j)}(0, \tau, s)) + \\ &+ cT^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{\alpha_1^{-1}}, \quad \varepsilon_1 = 2\varepsilon^{\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} < 1, \quad (51) \\ s^* &= s - \Delta s, \quad \tau^* = \tau - T^{\frac{1-\theta}{p+1}} P_T^{(j)}(v, \tau, s), \\ v^* &= v - cT^{\frac{1-\theta}{p+1}} P_T^{(j)}(v, \tau, 0) - cT^{1-\theta} P_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{p+1}. \end{aligned}$$

Из ограниченности функций $P_T^{(j)}(v, \tau, s)$ и $R_T^{(j)}(0, \tau, s)$ для любого $j < \infty$ следует, что существуют $L > 1$, $v_0^{(j)} < \infty$, $\tau_0^{(j)} < \infty$, $s_0^{(j)} < \infty$, такие, что выполнено соотношение:

$$P_T^{(j)}(v, \tau, s) + (s^*)^{-\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} R_T^{(j)}(0, \tau, s) \leq cLT^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_0(v, \tau, s)^{\alpha_1^{-1}} \quad (52)$$

$\forall v > v_0^{(j)}, \forall \tau > \tau_0^{(j)}, \forall s > s_0^{(j)}$. Из (51), (52), в силу леммы 6 из дополнения, вытекает:

$$\begin{aligned} P_T^{(j)}((h_2^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)) + (s^*)^{-\frac{p-1}{2} \frac{1-\theta}{p+1}} R_T^{(j)}(0, \tau, (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)) &\leq \\ &\leq cL(\delta_1, \delta_2) T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} \quad \forall \tau \geq \tau^{(2)}(T). \quad (53) \end{aligned}$$

Справедливость условий (9), (11), оценки (14) следует из соотношений (53), (49), лемм 1 и 3 в силу свойств функций $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$. Теорема доказана.

5. Дополнение.

Лемма 4. Пусть Ω – произвольная ограниченная область в \mathbb{R}^n . Тогда если $p > 1$, $\lambda < p + \frac{2(p+1)}{n}$, то имеет место вложение

$$C([0, T]; L_2(\Omega)) \cap L_{p+1}(0, T; \dot{W}_{p+1}^1(\Omega)) \subset L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega). \quad (54)$$

Доказательство. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \leq \tilde{d}_5 \|D_x^m u\|_{L_{p+1}(\Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\tilde{\theta}}, \quad (55)$$

где $u(t, x)$ – произвольная по x функция из пространства $\dot{W}_{p+1}^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $\tilde{d}_5 > 0$, $0 < \tilde{\theta} = \frac{n(\lambda-1)(p+1)}{(\lambda+1)(n(p-1)+2(p+1))} < 1$. Возведя неравенство (55) в степень $\lambda + 1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гёльдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega)} \leq \tilde{d}_5 T^{\frac{1-\sigma}{\lambda+1}} \|D_x^m u\|_{L_{p+1}((0,T)\times\Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{C([0,T];L_2(\Omega))}^{1-\tilde{\theta}},$$

$0 < \sigma = \tilde{\theta} \frac{\lambda+1}{p+1} < 1$, откуда следует (54). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть неотрицательная непрерывная неубывающая по каждому из своих аргументов функция $f(s_1, s_2)$ и строго возрастающие непрерывные функции $g_1(s_1)$, $g_2(s_2)$ при $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ удовлетворяют соотношению:

$$\begin{aligned} f(s_1 - f(s_1, s_2) - a_1 g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1}, s_2 - f(s_1, s_2) - a_2 f(s_1, s_2)^\gamma) \leq \\ \leq \varepsilon f(s_1, s_2) + g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1}, \end{aligned} \quad (56)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $0 < a_1 < \infty$, $0 < a_2 < \infty$, $0 < \kappa_1 < 1$, $\gamma > 0$.

Предположим также, что выполнены следующие условия:

1) существуют $\tilde{s}_1 < +\infty$ и $L > (1 - \varepsilon)^{-1}$ такие, что

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq L g_1(s_1) \quad \forall s_1 > \tilde{s}_1 > 0; \quad (57)$$

2) для $g_1(s_1)$ и $g_2(s_2)$ выполнено

$$g_1(s_1) \leq b_1 s_1 \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, 0 < \hat{s}_1 < \tilde{s}_1, 0 < b_1 < \infty, (L + a_1) b_1 < 1, \quad (58)$$

$$L g_2(s_2) + a_2 (L g_2(s_2))^\gamma \leq L b_2 s_2 \quad \forall s_2 > g_2^{-1} \circ g_1(\hat{s}_1), 0 < b_2 < \infty, L b_2 < 1; \quad (59)$$

3) функции $g_1(s_1)$, $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$ удовлетворяют условиям монотонности: для любого $0 < \delta < 1$ существуют $0 < \delta_i = \delta_i(\delta) < 1$, $i \in \{1, 2\}$, такие, что выполнено

$$\delta_1 g_1(s_1) \leq g_1(s_1(1 - \delta)) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \delta \geq (L + a_1) b_1, \quad (60)$$

$$(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_2 (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, 0 < \delta_2 \leq 1 - L b_2. \quad (61)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq L g_1(s_1) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1 > 0, \quad (62)$$

если выполнено $(L\varepsilon + 1)\delta_1^{-1} \leq L$.

Доказательство. Положим в (56) $s_2 = s_2(s_1) = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, зафиксируем произвольно $s_1^{(0)} > \hat{s}_1$ и построим последовательности $\{s_1^{(i)}\}$ и $\{s_2^{(i)}\}$ следующим образом: $s_1^{(i+1)} = (1 - \delta)s_1^{(i)}$, $s_2^{(i)} = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. В силу (57) имеем: $f(s_1^{(0)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)})) \leq L g_1(s_1^{(0)})$. Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq L g_1(s_1^{(i)}). \quad (63)$$

Из предположения (63) и соотношений (56)–(62) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 f(s_1^{(i+1)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)})) &\leq f((1-\delta)s_1^{(i)}, \delta_2(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq \\
 &\leq f((1-(L+a_1)b_1)s_1^{(i)}, (1-Lb_2)s_2^{(i)}) \leq \\
 &\leq f(s_1^{(i)} - (L+a_1)g_1(s_1^{(i)}), s_2^{(i)} - Lg_2(s_2^{(i)}) - a_2(Lg_2(s_2^{(i)}))^\gamma) \leq \\
 &\leq f(s_1^{(i)} - f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) - a_1g_1(s_1^{(i)}), s_2^{(i)} - f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) - a_2f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)})^\gamma) \leq \\
 &\leq (L\varepsilon + 1)g_1(s_1^{(i)}) \leq (L\varepsilon + 1)\delta_1^{-1}g_1(s_1^{(i+1)}) \leq Lg_1(s_1^{(i+1)}),
 \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности выбора $s_1^{(0)}$ вытекает (62). Лемма доказана.

ПРИМЕР 3. Пусть $g_1(s_1) = b_1s_1^\alpha$, $g_2(s_2) = d_2s_2^\beta$, $0 < \alpha \leq 1$, $s_1 > 1$, $s_2 > 1$, $b_1 > 0$, $d_1 > 0$, $0 < \beta \leq \min\{1, \gamma^{-1}\}$. Тогда $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) = (d_2^{-1}b_1s_1^\alpha)^{\beta^{-1}}$, $\delta_1 = (1-\delta)^\alpha$, $\delta_2 = (1-\delta)^{\alpha\beta^{-1}}$ и, таким образом, условия леммы 5 выполнены при $L \geq \delta b_1^{-1} - a_1$, $L \leq b_2^{-1}(1 - (1-\delta)^{\alpha\beta^{-1}})$, $d_2 + a_2L^{(\beta^{-1}-1)}d_2^\beta \leq b_2$, $L \geq ((1-\delta)^\alpha - \varepsilon)^{-1}$.

Лемма 6. Пусть неотрицательные непрерывные неубывающие по своим аргументам функции $f_1(s_1, s_2, s_3)$ и $f_2(s_1, s_2)$, а также неотрицательные непрерывные строго возрастающие при $s_1 > 0$, $s_2 > 2\Delta$ и $s_3 > 0$ функции $g_i(s_i)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют соотношению:

$$\begin{aligned}
 &f_1(s_1 - f_1(s_1, s_2, s_3), s_2 - \Delta, s_3 - f_1(s_1, s_2, s_3) - af_1(s_1, s_2, s_3)^\gamma) + \\
 &+ (s_2 - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1, s_2) \leq \varepsilon(f_1(s_1, s_2, s_3) + (s_2 - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1, s_2)) + \\
 &+ g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1} + g_1(s_1)^{\kappa_2} g_3(s_3)^{1-\kappa_2}, \tag{64}
 \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\gamma > 0$, $\gamma_1 > 0$, $a \geq 0$, $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ – непрерывная монотонно возрастающая по ε функция, $\Delta(0) = 0$, $0 < \kappa_1 < 1$, $0 < \kappa_2 < 1$.

Пусть также выполнены следующие требования:

1) существуют $\tilde{s}_1 < +\infty$ и $L > 2(1-\varepsilon)^{-1}$ такие, что

$$\begin{aligned}
 &f_1(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) + \\
 &+ ((g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq Lg_1(s_1) \quad \forall s_1 > \tilde{s}_1 > 0; \tag{65}
 \end{aligned}$$

2) для $g_i(s_i)$ выполнено

$$g_1(s_1) \leq b_1s_1 \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad 0 < \hat{s}_1 < \tilde{s}_1, \quad Lb_1 < 1, \tag{66}$$

$$g_2(s_2) \leq d_1 \exp(d_2s_2) \quad \forall s_2 > (g_2^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \quad d_1 = d_1(\varepsilon) > 0, \quad d_2 = d_2(\varepsilon) > 0, \tag{67}$$

$$Lg_3(s_3) + a(Lg_3(s_3))^\gamma \leq Lb_2s_3 \quad \forall s_3 > (g_3^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \quad Lb_2 < 1; \tag{68}$$

3) функции $g_1(s_1)$, $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)$ удовлетворяют следующим условиям монотонности: для любого $0 < \delta < 1$ существуют $0 < \delta_i = \delta_i(\delta) < 1$, $i \in \{1, 3\}$, и $\delta_2 > 0$ такие, что выполнено

$$\delta_1 g_1(s_1) \leq g_1(s_1(1 - \delta)) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \delta \geq Lb_1, \quad (69)$$

$$(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) - (g_2^{-1} \circ g_1)(\delta_2) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad (70)$$

$$(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_3 (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \delta_3 \leq 1 - Lb_2. \quad (71)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & f_1(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) + \\ & + ((g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq Lg_1(s_1) \end{aligned} \quad (72)$$

$\forall s_1 > \hat{s}_1 > 0$ если выполнено $(L\varepsilon + 2)\delta_1^{-1} \leq L$.

Доказательство. Положим в соотношении (64)

$$\Delta = (g_2^{-1} \circ g_1)(\delta_2), s_2 = s_2(s_1) = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), s_3 = s_3(s_1) = (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1),$$

зафиксируем произвольно $s_1^{(0)} > \tilde{s}_1$ и построим последовательности $\{s_1^{(i)}\}$, $\{s_2^{(i)}\}$, $\{s_3^{(i)}\}$ следующим образом:

$$s_1^{(i+1)} = (1 - \delta)s_1^{(i)}, s_2^{(i)} = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), s_3^{(i)} = (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), i = 0, 1, 2, \dots$$

В силу (65) имеем:

$$f_1(s_1^{(0)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)})) + (s_2^{(0)} - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1^{(0)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)})) \leq Lg_1(s_1^{(0)}).$$

Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} & f_1(s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) + \\ & + (s_2^{(i)} - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq Lg_1(s_1^{(i)}). \end{aligned} \quad (73)$$

Из предположения (73) и соотношений (64)–(71) следует справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} & f_1(s_1^{(i+1)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)})) + \\ & + ((g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)}) - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1^{(i+1)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)})) \leq \\ & \leq f_1((1 - \delta)s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}) - (g_2^{-1} \circ g_1)(\delta_2), \delta_3 (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) + \\ & + ((g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)}) - \Delta)^{-\gamma_1} f_2((1 - \delta)s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}) - (g_2^{-1} \circ g_1)(\delta_2)) \leq \\ & \leq f_1((1 - Lb_1)s_1^{(i)}, s_2^{(i)} - \Delta_2, (1 - Lb_2)s_3^{(i)}) + (s_2^{(i+1)} - \Delta)^{-\gamma_1} f_2((1 - Lb_1)s_1^{(i)}, s_2^{(i)} - \Delta_2) \leq \\ & \leq f_1(s_1^{(i)} - Lg(s_1^{(i)}), s_2^{(i)} - \Delta_2, s_3^{(i)} - Lg_3(s_3^{(i)}) - a(Lg_3(s_3^{(i)}))^\gamma) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(s_2^{(i+1)} - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1 - L g(s_1^{(i)}), s_2^{(i)} - \Delta_2) \leq \\
 \leq &f_1(s_1^{(i)} - f_1(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}), s_2^{(i)} - \Delta, s_3^{(i)} - f_1(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}) - a f_1(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)})^\gamma) + \\
 &+(s_2^{(i)} - \Delta)^{-\gamma_1} f_2(s_1^{(i)} - f_1(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}), s_2^{(i)} - \Delta) \leq \\
 \leq &(L\varepsilon + 2)g_1(s_1^{(i)}) \leq (L\varepsilon + 2)\delta_1^{-1}g_1(s_1^{(i+1)}) \leq L g_1(s_1^{(i+1)}),
 \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности выбора $s_1^{(0)}$ следует (72). Лемма доказана.

ПРИМЕР 4. Пусть $g_1(s_1) = b_1 s_1^\alpha$, $s_1 > 1$, $g_2(s_2) = d_1 \exp(d_2 s_2)$, $g_3(s_3) = b_3 s_3^\beta$, $s_3 > 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq \min\{1, \gamma^{-1}\}$. Тогда $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) = d_2^{-1} \ln(b_1 d_1^{-1} s_1^\alpha)$, $(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1) = (b_3^{-1} b_1 s_1^\alpha)^{\beta^{-1}}$, $\delta_1 = (1 - \delta)^\alpha$, $\delta_2 = (1 - \delta)^{-1}$, $\Delta = d_2^{-1} \ln(1 - \delta)^{-\alpha}$, $\delta_3 = (1 - \delta)^{\alpha\beta^{-1}}$ и условия леммы 6 выполнены при $L \geq \delta b_1^{-1}$, $L \leq b_2^{-1}(1 - (1 - \delta)^{\alpha\beta^{-1}})$, $b_3 + aL^{\beta^{-1}-1} b_3^\beta \leq b_2$, $L \geq 2((1 - \delta)^\alpha - \varepsilon)^{-1}$, $b_1 d_1^{-1} > 1$.

1. Олейник О.А., Калашиников А.С., Чжоу Юй-минь Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – **22**, № 8. – С. 667–704.
2. Калашиников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
3. Diaz J.I., Kersner R. On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Differential Equations. – 1987. – **69**. – P. 368–403.
4. Gilding B.H. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1989. – **16**. – P. 165–224.
5. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires // Dynod. Paris, 1969.
6. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373–394.
7. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – P. 311–341.
8. Benilan Ph., Wittbold P. On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems // Adv. in Differential Equations. – 1996. – **1**, № 6. – P. 1053–1073.
9. Kalashnikov A.S. Cauchy problem in classes of growing functions for degenerate quasilinear second-order parabolic equations // Differentsialnye Uravnenia. – 1973. – **9**. – P. 682–691.
10. Di Benedetto E., Herrero M.A. On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations // Trans. Amer. Soc. – 1989. – **314**. – P. 197–224. Appl. – 1991. – V. 155. – P. 378–393.
11. Шликов А.Е. Эволюция носителей решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения высокого порядка // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 12. – С. 151–172.
12. Gladkov A.L. Unbounded solutions of the non-linear heat-conduction equation with strong convection at infinity // Comp. Maths. Math Phys. – 1996. – **36**. – P. 1381–1391.
13. Gladkov A.L. О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 35–56.
14. Сапронов Д.А. Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции с однородными условиями Коши // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – **4**. – С. 157–165.
15. Сапронов Д.А. Существование решений с неограниченной энергией задач Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции // Труды ИПММ. – 2017. – **31**. – С. 161–176.

D. A. Sapronov

About solvability of the Cauchy problem for a multidimensional degenerated second-order parabolic equations of diffusion-convection type with unbounded energy.

In article there is established precise (in some sense) sufficient conditions on the growth of L_2 -norm of initial datum, which provide existence of solution of Cauchy problem for second-order parabolic equations of diffusion-convection type.

Keywords: *degenerate parabolic equations, diffusion, convection.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры», Макеевка
nerusofhorse@mail.ru

Получено 11.10.18

УДК 517.95

©2018. О. Н. Швидкий

ЯВНАЯ ОЦЕНКА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА

В работе рассматривается уравнение с дробным оператором Лапласа и выводится явная оценка решения такого уравнения в пространствах Гельдера. При этом используется теорема о распространении оператора Лапласа на пространство S' , формулировка которой приводится в начале статьи.

Ключевые слова: дробный оператор Лапласа, пространства Гельдера.

1. Введение. В последние годы активно исследуются уравнения, содержащие дробный оператор Лапласа (см., например, [7–14]). Так, в статье [7] авторы имеют дело с задачей Лиувилля для стационарной дробной системы уравнений Навье–Стокса. В такую систему входит дробный оператор Лапласа. В работе [9] изучается существование положительных решений для следующего класса дробных уравнений Шрёдингера:

$$\epsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u = f(u) \text{ в } R^N,$$

где $\epsilon > 0$ – параметр, $s \in (0, 1)$, $N > 2s$, $V: R^N \rightarrow R$ – непрерывный положительный потенциал, и $f: R \rightarrow R$.

В статье [10] рассматриваются задачи вида

$$(-\Delta)^{\alpha/2} z(x) = G_z(x, z(x), u(x)) \text{ в } \Omega$$

с неоднородным внешним условием Дирихле

$$z(x) = v(x) \text{ в } R^n \setminus \Omega,$$

где $\alpha \in (1, 2)$ – фиксировано, $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ – ограниченная область с липшицевой границей, G – функция Каратеодори, $u: \Omega \rightarrow R^m$, $m \geq 1$.

Много усилий в современных работах направлено на выяснение того, остаются ли свойства локального аналога $-\Delta$ дробного лапласиана, получаемого при $s = 1$, справедливыми для произвольного $s \in (0, 1)$. Например, в работе [8] получена теорема Лиувилля для нелокального эллиптического уравнения с дробным лапласианом.

Действие дробного оператора Лапласа в однородных пространствах Гельдера изучалось в [14] средствами гармонического анализа. Там же была получена оценка, аналогичная оценке (10), ниже, для однородных пространств.

В данной статье мы приведем явное доказательство оценки (10) без применения абстрактных результатов гармонического анализа.

Введем некоторые обозначения. Пусть Ω – область в R^n , $n \geq 2$ и функция $u(x)$ определена в Ω . Константа Гельдера и максимум функции u в Ω определяются следующим образом:

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| \leq 1}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

$$|u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|. \quad (2)$$

Рассмотрим пространства $C^l(R^n)$, где l – произвольная положительная нецелая константа. Норма в таких пространствах определяется следующим образом (см., например, [6]).

$$|u|_{C^l(R^n)} \equiv |u|_{R^n}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \langle u \rangle_{x_i, R^n}^{(l)}, \quad (3)$$

$$\langle u \rangle_{x_i, R^n}^{(l)} \equiv \sup_{x \in R^n, h > 0} \frac{|D_{x_i}^{[l]} u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - D_{x_i}^{[l]} u(x)|}{h^{l-[l]}}, \quad (4)$$

где $[l]$ – целая часть числа l , $D_{x_i}^{[l]} u$ – производная порядка $[l]$ по переменной x_i функции u .

Далее, если функция $u(x)$ определена в R^n и принадлежит пространству $C^l(R^n)$, $l > 2s$, то $(-\Delta)^s$ – дробный оператор Лапласа, который определяется следующим образом (см., например, [5]):

$$(-\Delta)^s u \equiv C(n, s) P.V. \int_{R^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad s \in (0, 1). \quad (5)$$

Или, если $u(x)$ принадлежит, например, основному пространству $S(R^n)$, то дробный оператор Лапласа можно определить следующим образом:

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)), \quad (6)$$

где \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} обозначают соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, т. е.

$$\mathcal{F}v(\xi) = \int_{R^n} v(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} v(x) e^{ix \cdot \xi} dx.$$

Для функции $u \in S(R^n)$ определения (5) и (6) эквивалентны.

Ниже нам понадобится следующий результат о распространении дробного оператора Лапласа.

Теорема 1. *Дробный оператор Лапласа $(-\Delta)^s$, $s \in (0, 1)$, распространяется по непрерывности с пространства $S(R^n)$ на обобщенные функции $u(x) \in S' \cap C^{2s+\alpha}(R^n)$, $\alpha \in (0, 1)$, со следующим ограничением на рост на бесконечности:*

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^t, \quad t < 2s, \quad (7)$$

при этом

$$((-\Delta)^s u, \varphi) \equiv \int_{R^n} u(y) \cdot (-\Delta)^s \varphi(y) dy, \quad (8)$$

то есть в смысле распределений S' сохраняется определение (6).

Изложим план доказательства этой теоремы, детальное доказательство приведено в работе [4]. Сначала доказывается утверждение, что если $\varphi \in S$, то $|(-\Delta)^s \varphi(x)| \leq C$, $|x| \leq 1$ и $|(-\Delta)^s \varphi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+2s-\alpha}}$, $\forall \alpha \in (0, 2s)$, $|x| > 1$. Затем доказывается, что $(-\Delta)^s u$ – функционал на S . После этого показываются линейность и непрерывность данного функционала, а затем непрерывность оператора $(-\Delta)^s$ из $S' \cap C^{2s+\alpha}(R^n)$ в S' , где функции из исходного пространства удовлетворяют условию (7) на бесконечности.

2. Постановка задачи и основной результат.

Теорема 2. Пусть имеются две функции $u(x)$ и $f(x)$, такие что: u – определена и ограничена в R^n , $f \in C^\alpha(R^n)$, $\alpha \in (0, 1)$, и они удовлетворяют уравнению

$$(-\Delta)^s u = f \in C^\alpha(R^n), \quad s > 0. \quad (9)$$

Справедлива оценка

$$\langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}, \quad (10)$$

где $|f|_{R^n}^{(\alpha)}$ – норма в пространстве $C^\alpha(R^n)$, а постоянная C зависит от n, s и α .

Доказательство. Сначала мы получим оценку решения уравнения (9) в случае финитной функции f . Результат сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1. Пусть f – финитная функция из пространства $C^\alpha(R^n)$. Тогда для нее справедлива оценка

$$\langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}, \quad (11)$$

в котором постоянная C зависит от n, s и α .

Доказательство леммы. Для начала получим решение уравнения (9) в виде потенциала и затем оценим его. Поскольку u ограничена, то на основании теоремы 1 применяем преобразование Фурье к уравнению (9):

$$|\xi|^{2s} \mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[f],$$

$$\mathcal{F}[u] = \frac{\mathcal{F}[f]}{|\xi|^{2s}} + C \cdot \delta(\xi) = |\xi|^{-2s} \cdot \mathcal{F}[f] + C \cdot \delta(\xi).$$

В § 1.1 [2] показано, что $|\xi|^{-2s}$ является Фурье-образом ядра Рисса $k_{2s}(x) = C(n, s) |x|^{2s-n}$, где $C(n, s) = \pi^{2s-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-2s}{2})}{\Gamma(s)}$. Также известно, что обратное преобразование Фурье дельта-функции является константой (см., например, [3], § 9.3). Используя это, а также тот факт, что преобразование Фурье свертки является произведением преобразований Фурье сомножителей, получаем:

$$u = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{-2s}] * f + \mathcal{F}^{-1}[C \cdot \delta(\xi)] =$$

$$= C(n, s) |x|^{2s-n} * f + C_0 = C(n, s) \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy + C_0,$$

т. е. $u(x) = C(n, s) \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy + C_0$ является решением уравнения (9). Поскольку C_0 никак не влияет на оценку константы Гельдера функции u , мы, не ограничивая общности, будем считать, что $C_0 = 0$.

Для того, чтобы доказать неравенство (11), предположим сначала, что $2s + \alpha \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy = \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy + \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ f(x) \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy, \\ u(\bar{x}) &= \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-\bar{x}-y|^{n-2s}} dy = \int_{|x-\bar{x}-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \frac{f(y)}{|x-\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + \int_{|x-\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{1}{|x-\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ f(\bar{x}) \int_{|x-\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-\bar{x}-y|^{n-2s}} dy, \\ u(x) - u(\bar{x}) &= \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \cdot \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy + \\ &+ \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + [f(x) - f(\bar{x})] \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \\ &- \int_{|x-\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + f(\bar{x}) \left\{ \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy + \right. \\ &\left. + \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \int_{|\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy \right\} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое.

$$\begin{aligned} I_5 &= f(\bar{x}) \left\{ \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy + \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \right. \\ &\left. - \int_{|\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy \right\}. \end{aligned}$$

Каждый из интегралов в скобках сходится (первый в силу Утверждения 2 (см. Приложение)), поэтому

$$I_5 = f(\bar{x}) \int_{R^n} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy = \int_{R^n} [|z|^{2s-n} - |z + \bar{x} - x|^{2s-n}] dz.$$

Применяем интегральную теорему о среднем:

$$I_5 = f(\bar{x})(n-2s) \int_{R^n} \int_0^1 \sum_{k=1}^n |z + \theta(\bar{x} - x)|^{2s-n-2} \cdot (z_k + \theta(\bar{x}_k - x_k))(\bar{x}_k - x_k) d\theta dz.$$

Этот интеграл сходится, так как сходится предыдущий интеграл. По теореме Фу-

бини (см., например, [3, с. 22]) функция $\sum_{k=1}^n |z + \theta(\bar{x} - x)|^{2s-n-2} \cdot (z_k + \theta(\bar{x}_k - x_k)) \cdot (\bar{x}_k - x_k)$ интегрируема и мы можем менять порядок интегрирования.

$$\begin{aligned} I_5 &= f(\bar{x})(n-2s) \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - x_k) \int_0^1 \int_{R^n} |z + \theta(\bar{x} - x)|^{2s-n-2} \cdot (z_k + \theta(\bar{x}_k - x_k)) d\theta dz = \\ &= f(\bar{x})(n-2s) \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - x_k) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} |y|^{2s-n-2} \cdot y_k dy = 0. \end{aligned}$$

Теперь оценим остальные слагаемые.

$$|I_1| \leq C_1 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s-\alpha+1}} dy = C_1 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)},$$

$$|I_2| \leq C_2 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s-\alpha}} dy = C_2 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)},$$

$$|I_3| \leq |f(x) - f(\bar{x})| \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \leq C_3 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)},$$

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_{|\bar{x}-y| \leq 3|x-\bar{x}|} |f(y) - f(\bar{x})| \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy \leq C_4 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|\bar{x}-y| \leq 3|x-\bar{x}|} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s-\alpha}} dy = \\ &= C_4 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.$$

Теперь пусть $2s + \alpha \in (1, 2)$.

Воспользуемся тем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} = -\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}}. \quad (12)$$

$$u(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy,$$

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= - \int_{R^n} f(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy = \int_{R^n} \frac{f_{y_i}(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy = \\ &= \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial y_i} [f(y) - f(x)] \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy. \end{aligned}$$

Применяем формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= - \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \\ &\quad - \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dy + \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dy = \\
 & - \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy.
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 u_{x_i}(\bar{x}) = & - \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy - \\
 & - \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{x_i}(x) - u_{x_i}(\bar{x}) = & - \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy - \\
 & - \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy - \\
 & - \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} [f(\bar{x}) - f(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |I_4| = & |[f(\bar{x}) - f(x)]| \cdot \left| \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right| = \\
 = & (n-2s) |[f(\bar{x}) - f(x)]| \cdot \left| \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n-2s+2}} dy \right| = 0.
 \end{aligned}$$

Оценим I_2 .

$$\begin{aligned}
 |I_2| = & \left| \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] \cdot (n-2s) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n-2s+2}} dy \right| \leq \\
 \leq & (n-2s) \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} \frac{\langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} |x-y|^\alpha}{|x-y|^{n-2s+1}} dy \leq (n-2s) \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|x-y|\leq 2|x-\bar{x}|} \frac{dy}{|x-y|^{n+1-(2s+\alpha)}} = \\
 = & C |x - \bar{x}|^{2s+\alpha-1} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}
 \end{aligned}$$

зависит лишь от n, s и α .

I_3 оценивается таким же образом.

$$\begin{aligned}
 |I_1| = & \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} |f(y) - f(\bar{x})| \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] \right| dy \leq \\
 \leq & C |x - \bar{x}| \int_{|x-y|\geq 2|x-\bar{x}|} \frac{\langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} |\bar{x}-y|^\alpha}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} dy = C |x - \bar{x}|^{2s+\alpha-1} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Производная разности оценивается при помощи Утверждения 2 (Приложение).

Итак,

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x) - u_{x_i}(\bar{x})| &\leq C|x - \bar{x}|^{2s+\alpha-1} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}, \\ \langle Du \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha-1)} &\leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}, \quad \text{или} \\ \langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} &\leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще случай, когда $2s + \alpha \in (k, k + 1)$. Снова применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} u^k(x) &= (-1)^k \int_{R^n} f(y) D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy = (-1)^{k-1} \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \frac{\partial}{\partial y_i} f(y) D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^{k-1} \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{\partial}{\partial y_i} [f(y) - f(x)] D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy = \\ &= (-1)^k \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} f(y) D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^k \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \\ &- (-1)^k \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} f(y) D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dS_y - \\ &- (-1)^k \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dS_y = \\ &= (-1)^k \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} f(y) D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^k \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^k f(x) \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dS_y, \\ u^k(\bar{x}) &= (-1)^k \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} f(y) D_y^k \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^k \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] D_y^k \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + \\ &+ (-1)^k f(\bar{x}) \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} D_y^{k-1} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} n_i dS_y, \\ u^k(x) - u^k(\bar{x}) &= (-1)^k \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] D_y^k \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy + \\ &+ (-1)^k \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(x)] D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy - \\ &- (-1)^k \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} [f(y) - f(\bar{x})] D_y^k \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^k [f(x) - f(\bar{x})] \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dS_y + \\
 & + (-1)^k f(\bar{x}) \left\{ \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} D_y^k \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] dy + \right. \\
 & \left. + \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} n_i dS_y - \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} D_y^{k-1} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} n_i dS_y \right\} = \\
 & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
 \end{aligned}$$

$I_5 = 0$, так как выражение в скобках равно нулю (применяем теорему Гаусса–Остроградского к интегралу по внешности шара $|x - y| \leq 2|x - \bar{x}|$).

Оценим I_1 при помощи Утверждения 2 (см. Приложение).

$$|I_1| \leq C_1 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|x-y| \geq 2|x-\bar{x}|} \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+1-\alpha}} dy = C_1 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha-k} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.$$

I_2 оценим при помощи Утверждения 1 (см. Приложение).

$$|I_2| \leq C_2 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|x-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k-\alpha}} dy = C_2 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha-k} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.$$

Легко показать, что $\bar{B}_{2|x-\bar{x}|}(x) \subset \bar{B}_{3|x-\bar{x}|}(\bar{x})$, поэтому

$$\begin{aligned}
 |I_3| & \leq \int_{|\bar{x}-y| \leq 3|x-\bar{x}|} |f(y) - f(\bar{x})| \left| D_y^k \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right| dy \leq \\
 & \leq C_3 \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \int_{|\bar{x}-y| \leq 2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+k-\alpha}} dy = C_3 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha-k} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Осталось оценить I_4 .

$$\begin{aligned}
 |I_4| & \leq |f(x) - f(\bar{x})| \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} \left| D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} \right| dS_y \leq \\
 & \leq C_4 |f(x) - f(\bar{x})| \int_{|x-y|=2|x-\bar{x}|} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k-1}} dS_y \leq C_4 |x-\bar{x}|^{2s+\alpha-k} \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 \left\langle D^k u \right\rangle_{R^n}^{(2s+\alpha-k)} & \leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)}, \quad \text{или} \\
 \langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} & \leq C \langle f \rangle_{R^n}^{(\alpha)},
 \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы. \square

Теперь снимем ограничение в виде финитности функции f . Пусть f – произвольная функция из $C^\alpha(R^n)$, $\alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим последовательность финитных функций $f_\varepsilon = f \cdot \eta_\varepsilon$, где $\{\eta_\varepsilon\}$ – последовательность основных функций из $\mathcal{D}(R^n)$, сходящаяся к 1 в R^n . Это значит, что: а) для любого компакта K найдется такое ε_0 , что $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \eta_\varepsilon(x) = 1 \forall x \in K$; б) функции $\{\eta_\varepsilon\}$ равномерно ограничены в R^n вместе со всеми производными, $|D^\alpha \eta_\varepsilon(x)| < C_\alpha$, $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$, α – любое.

На основании Леммы 1 для u_ε – решения уравнения $(-\Delta)^s u_\varepsilon = f_\varepsilon \in C^\alpha(R^n)$ верно неравенство

$$\langle u_\varepsilon \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C \langle f_\varepsilon \rangle_{R^n}^{(\alpha)}. \quad (13)$$

Рассмотрим последовательность функций $V_{h,\varepsilon}(x) = \Delta_{h,j}^k u_\varepsilon(x)$, $k > [2s + \alpha]$, где $\Delta_{h,j}^k$ – оператор взятия конечной разности порядка k по переменной x_j с шагом h , т.е.

$$\Delta_{h,j}^k f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + lh, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

j выбираем любое от 1 до n . Дальше будем использовать обозначение Δ_h^k вместо $\Delta_{h,j}^k$.
 $V_{h,\varepsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$(-\Delta)^s V_{h,\varepsilon} = \Delta_h^k f_\varepsilon(x) \in C^\alpha(R^n). \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} V_{h,\varepsilon} &= \Delta_h^k u_\varepsilon(x) = \Delta_h^k \int_{R^n} \frac{f_\varepsilon(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy = \int_{R^n} f_\varepsilon(y) \Delta_h^k \frac{dy}{|x-y|^{n-2s}} = \\ &= \sum_{i=0}^k C_i \int_{R^n} \frac{f_\varepsilon(y)}{|x+ih-y|^{n-2s}} dy. \end{aligned}$$

Теперь на основании Леммы 1 и (13) получаем:

$$\begin{aligned} \langle V_{h,\varepsilon} \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} &\leq C \langle f_\varepsilon \rangle_{R^n}^{(\alpha)} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}, \\ |V_{h,\varepsilon}|_{R^n}^{(0)} &\leq C |f_\varepsilon|_{R^n}^{(0)} \leq C |f|_{R^n}^{(0)}, \end{aligned}$$

C не зависит ни от ε , ни от h . То есть, $V_{h,\varepsilon}$ – равномерно ограниченные функции в норме пространства $C^{2s+\alpha}(R^n)$.

Теперь покажем, что $V_{h,\varepsilon}$ сходится к $V_{h,0} = \int_{R^n} f(y) \Delta_h^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy$ в $C^{2s+\alpha'}(\bar{B}_R)$, $\forall B_R \subset R^n, \alpha' < \alpha$.

Множество функций из $C^{2s+\alpha}(R^n)$, нормы которых ограничены одной константой C_* , обозначим его F , является равномерно ограниченным и равностепенно

непрерывным. Поэтому, в силу теоремы Арцела, оно компактно в $C(\bar{B}_R)$, $\forall B_R \subset \subset R^n$. Отсюда следует, что для любой бесконечной последовательности $u_\varepsilon \in F$ существует подпоследовательность u_{ε_k} , которая сходится равномерно к некоторой функции $u_0 \in F$, то есть $u_0 \in C^{2s+\alpha}(R^n)$ и $|u_0|^{2s+\alpha} \leq C_*$. Более того: $\forall \alpha' < \alpha \quad |u_{\varepsilon_k} - u_0|_{\bar{B}_R}^{(2s+\alpha')} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Теперь применим эти рассуждения к множеству функций $\{V_{h,\varepsilon} : |V_{h,\varepsilon}|^{(2s+\alpha)} \leq C\}$. Существует функция $V_0 \in C^{2s+\alpha'}(R^n)$, $|V_0|^{(2s+\alpha)} \leq C$, такая, что $V_{h,\varepsilon} \rightrightarrows V_0$ в \bar{B}_R и $V_{h,\varepsilon} \rightarrow V_0$ в $C^{2s+\alpha'}(\bar{B}_R)$, $\alpha' < \alpha$, $\forall B_R \subset R^n$.

Покажем теперь, что $V_{h,\varepsilon}$ равномерно сходятся к функции $V_{h,0} = \int_{R^n} f(y) \Delta_h^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy$ на любом компакте $\bar{B}_R \subset R^n$. V_h имеет смысл и для нефинитных функций. Последнее верно из-за равенства $\Delta_{h,j}^k f = f_j^{(k)}(x + \theta h e_j) \cdot h^k$, $\theta \in [0, k]$, Утверждения 1 (Приложение) и выбора k ($k > [2s + \alpha]$).

Пусть M – некоторое фиксированное число, которое мы выберем позже.

$$\begin{aligned} |V_{h,\varepsilon}(x) - V_{h,0}(x)| &= \left| \int_{R^n} (f_\varepsilon(y) - f(y)) \cdot \Delta_h^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right| \leq \\ &\leq \left| \Delta_h^k \int_{|x-y| \leq M} (f_\varepsilon(y) - f(y)) \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right| + \\ &+ \left| \int_{|x-y| \geq M} (f_\varepsilon(y) - f(y)) \cdot \Delta_h^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right| \leq \\ &\leq |f_\varepsilon(y) - f(y)|_{\bar{B}_M(x)}^{(0)} \cdot \left| \Delta_h^k \int_{|x-y| \leq M} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right| + \\ &+ C \int_{|x-y| \geq M} |\eta_\varepsilon(y) - 1| \cdot \left| \Delta_h^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} \right| dy = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Оценим сначала второй интеграл. $\eta_\varepsilon \in \mathcal{D}(R^n)$, поэтому

$$J_2 \leq C \int_{|x-y| \geq M} \left| D^{(k)} \frac{1}{|x + \theta h e_j - y|^{n-2s}} \right| \cdot h^k dy.$$

M берем достаточно большим, чтобы $|x + \theta h e_j - y|$ и $|x - y|$ были эквивалентными. Получаем

$$J_2 \leq \int_{|x-y| \geq M} \left| D_{x_j}^{(k)} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} \right| dy = \int_{|x-y| \geq M} \left| D_{y_j}^{(k)} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} \right| dy.$$

Последнее равенство мы получаем на основании легко доказываемой формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} = -\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}}. \quad (15)$$

Далее, пользуясь Утверждением 1 (см. Приложение), имеем

$$J_2 \leq C \int_{|x-y| \geq M} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k}} dy = \frac{C}{M^{k-2s}}. \quad (16)$$

Теперь переходим к оценке первого интеграла.

$$J_1 \leq |f|_{\bar{B}_M(x)}^{(0)} \cdot |\eta_\varepsilon - 1|_{\bar{B}_M(x)}^{(0)} \cdot \left| \Delta_h^k \int_{|x-y| \leq M} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} dy \right|.$$

Первый и последний множители оцениваются константой. Поэтому

$$J_1 \leq C |\eta_\varepsilon - 1|_{\bar{B}_M(x)}^{(0)}. \quad (17)$$

Теперь берем произвольное число $\eta > 0$. M выбираем настолько большим, чтобы $\frac{C}{M^{k-2s}}$ было меньше η . Для такого M , в силу выбора, $\eta_\varepsilon \rightarrow 1$ $\exists \varepsilon_0$ такое, что $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $J_1 = 0$.

Итак, $\forall \eta > 0 \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 |V_{h,\varepsilon}(x) - V_{h,0}(x)| \leq \eta \quad \forall x \in \bar{B}_M \subset R^n$, т.е. $V_{h,\varepsilon}$ равномерно сходятся к функции $V_{h,0}$ на любом компакте $\bar{B}_R \subset R^n$.

Значит, $V_0 = V_{h,0}$ и $V_{h,\varepsilon} \rightarrow V_{h,0}$ в $C^{2s+\alpha'}(\bar{B}_R)$, $\alpha' < \alpha$, $\forall B_R \subset R^n$.

Тогда в силу непрерывности дробного оператора Лапласа (Теорема 1) $(-\Delta)^s V_{h,\varepsilon} \rightarrow (-\Delta)^s V_{h,0}$ в смысле распределений. Теорему 1 можно применить, так как $V_{h,\varepsilon}$ и $V_{h,0}$ ограничены в R^n .

Отсюда получаем, учитывая (14):

$$(-\Delta)^s V_{h,0} = \Delta_h^k f(x). \quad (18)$$

Но для исходной функции u из $(-\Delta)^s u = f$ следует $(-\Delta)^s \Delta_h^k u = \Delta_h^k f$. Отсюда и из (18) имеем:

$$(-\Delta)^s [V_{h,0} - \Delta_h^k u] = 0. \quad (19)$$

Применяем к (19) прямое преобразование Фурье. Учитывая определение дробного оператора Лапласа (6), получаем $|\xi|^{2s} \mathcal{F}(V_{h,0} - \Delta_h^k u) = 0$. Очевидно, что носитель $\mathcal{F}(V_{h,0} - \Delta_h^k u)$ состоит только из точки $\{0\}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{F}(V_{h,0} - \Delta_h^k u) = \sum_{|\alpha|=0}^m C_\alpha D^\alpha \delta(\xi) \quad ([3], \text{ с. 152})$$

Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получаем: $V_{h,0} - \Delta_h^k u = \sum_{|\alpha|=0}^m C_\alpha x^\alpha -$
полином. Но $|V_{h,0}|^{(0)}, |\Delta_h^k u|^{(0)} \leq C$, поэтому $\Delta_h^k u = V_{h,0} + C$ и $\langle \Delta_h^k u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} =$

$$= \langle V_{h,0} \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}.$$

Тогда

$$\left\langle D^{[2s+\alpha]} \Delta_h^k u \right\rangle_{R^n}^{(2s+\alpha-[2s+\alpha])} = \left\langle \Delta_h^k D^{[2s+\alpha]} u \right\rangle_{R^n}^{(2s+\alpha-[2s+\alpha])} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}.$$

Следовательно, с тем же самым h и в том же направлении

$$\frac{|\Delta_h^k D^{[2s+\alpha]} u(x+h) - \Delta_h^k D^{[2s+\alpha]} u(x)|}{h^{2s+\alpha-[2s+\alpha]}} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)},$$

$$\frac{|\Delta_h^{k+1} D^{[2s+\alpha]} u|}{h^{2s+\alpha-[2s+\alpha]}} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}.$$

В силу Леммы 1 [1] имеем

$$\frac{|\Delta_h^1 D^{[2s+\alpha]} u|}{h^{2s+\alpha-[2s+\alpha]}} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)},$$

$$\left\langle D^{[2s+\alpha]} u \right\rangle_{R^n}^{(2s+\alpha-[2s+\alpha])} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\langle u \rangle_{R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C |f|_{R^n}^{(\alpha)}. \quad (20)$$

□

3. Приложение.

Утверждение 1. *Справедливо неравенство:*

$$\left| D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s}} \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k}}. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть для $|\alpha| \leq k$ это верно; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_n + \dots + \alpha_n$.

$$\begin{aligned} |D_y^{k+1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}}| &= |D_y^k D_{y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s}}| = |D_y^k (n-2s) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n-2s+2}}| = \\ &= (n-2s) |D_y^{k-1} D_{y_i} [(x_i - y_i) \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}}]| \leq (n-2s) (|D_y^{k-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}}| + \\ &+ |D_y^{k-1} (x_i - y_i) D_{y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}}|) \leq C_1 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}} + C_2 |D_y^{k-2} (-D_{y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} + \\ &+ (x_i - y_i) D_{y_i}^2 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}})| \leq C_1 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}} + C_2 |D_y^{k-3} (-D_{y_i}^2 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} + \\ &+ (x_i - y_i) D_{y_i}^3 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}})| \leq \dots \leq C_1 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}} + C_2 |D_y^{k-\alpha_i} (-D_{y_i}^{\alpha_i-1} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} + \\ &+ (x_i - y_i) D_{y_i}^{\alpha_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}})| \leq C_1 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}} + C_2 \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}} + \\ &C_3 |x-y| \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+2}} \leq C \frac{1}{|x-y|^{n-2s+k+1}}, \end{aligned}$$

а значит неравенство (21) верно при любом k . \square

Утверждение 2. *Справедливо неравенство:*

$$\left| D_y^k \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right] \right| \leq C \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+1}}. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть для $p \leq k$ это верно.

$$\begin{aligned} & |D_y^{k+1} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right]| = |D_y^k D_{y_i} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2s}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s}} \right]| = \\ & = (n-2s) |D_y^k \left[\frac{x_i-y_i}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{\bar{x}_i-y_i}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right]| = (n-2s) |D_y^k \left[\frac{x_i-\bar{x}_i}{|x-y|^{n-2s+2}} + \right. \\ & + (\bar{x}_i-y_i) \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right) \left. \right]| \leq (n-2s) (|x-\bar{x}| |D_y^k \frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}}| + \\ & + |D_y^{k-1} \left[-\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} + \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} + (\bar{x}_i-y_i) \cdot D_{y_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right) \right]|) \leq \\ & \leq (n-2s) (|x-\bar{x}| \frac{C}{|x-y|^{n-2s+k+2}} + |D_y^{k-2} (-D_{y_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right) + \\ & + (\bar{x}_i-y_i) \cdot D_{y_i}^2 \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right) \right)|) \leq \frac{C|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+2}} + \\ & + |D_y^{k-3} (\bar{x}_i-y_i) \cdot D_{y_i}^3 \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right)| \leq \dots \leq \frac{C|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+2}} + \\ & + |D_y^{k-\alpha_i} (\bar{x}_i-y_i) \cdot D_{y_i}^{\alpha_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right)| \leq \frac{C|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+2}} + \\ & + |\bar{x}-y| \cdot |D_y^k \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2s+2}} \right)| \leq \frac{C|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+2}} + \\ & + C_2 |x-y| \cdot C_3 \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n+2-2s+k+1}} \leq \frac{C|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n-2s+k+2}}, \end{aligned}$$

а значит неравенство (22) верно при любом k . \square

1. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // Тр. МИАН СССР. – 1964. – **70**. – С. 213–317.
2. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 516 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
4. Швидкий О.Н. Распространение дробного оператора Лапласа на пространство S' и некоторые приложения (в печати).
5. Cabre X., Sire Y. Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 2014. – **367**. – P. 911–941.
6. Degtyarev S.P. On Fourier multipliers in function spaces with partial Holder conditions and their applications to the linearized Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions // Evolution equation and control theory. – 2015. – **4**, № 4. – P. 391–429.
7. Wang Y., Xiao J. A Liouville Problem for the Stationary Fractional Navier–Stokes–Poisson System // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2018. – **20**, i. 2. – P. 485–498
8. Barrios B., Pezzo L., Garcia-Melian J. A Liouville theorem for indefinite fractional diffusion

- equations and its application to existence of solutions // Discrete and continuous dynamical systems. – 2017. – **37**, № 11. – P. 5731–5746.
9. *Alves C., Ambrosio V.* A multiplicity result for a nonlinear fractional Schrödinger equation in R^n without the Ambrosetti–Rabinowitz condition // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – **466**, i. 1. – P. 498–522.
 10. *Bors D.* Application of mountain pass theorem to superlinear equations with fractional laplacian controlled by distributed parameters and boundary data // Discrete and continuous dynamical systems series B. – 2018. – **23**, № 1. – P. 29–43.
 11. *Bucur C., Squassina M.* Asymptotic mean value properties for fractional anisotropic operators // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – **466**, i. 1. – P. 107–126.
 12. *Greco A., Iannizzotto A.* Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation // Communications on pure and applied analysis. – 2017. – **16**, № 6. – P. 2201–2226.
 13. *Cui X., Song W.* Symmetry and monotonicity of solutions for equations involving the fractional laplacian of higher order // Rocky mountain journal of mathematics. – 2018. – **48**, № 2. – P. 485–499
 14. *Triebel H.* Theory of Function Spaces – Reprint of the 1983 Edition. Basel: Birkhauser. – 2000. – 285 p.

O. N. Shvydki

The explicit estimate for the solution of the equation with fractional Laplas operator in Hölder spaces.

An equation with fractional Laplas operator is considered and the explicit estimate of such equation solutions in Hölder spaces is deduced in this article. For this purpose the theorem about Laplas operator extension on S' space is used.

Keywords: *fractional Laplace operator, Holder spaces.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
oshvid@ukr.net

Получено 12.11.18