Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 182 – 202

Условия глобальной устойчивости решений нестационарных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме

Александр И. Двирный, Виталий И. Слынько

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Аннотация. В работе получены достаточные условия устойчивости решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, подверженным импульсным воздействиям в фиксированные моменты времени. Используя условие В. Е. Слюсарчука и методы теории операторов в полуупорядоченном банаховом пространстве, задача сведена к исследованию устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием.

2010 MSC. 34K45, 34G20, 34D23, 37C75.

Ключевые слова и фразы. Уравнения с импульсным воздействием, глобальная устойчивость, банахово пространство.

Введение

Исследование сложных систем, вектор состояния которых может мгновенно изменяться, приводит к необходимости математической формализации таких систем в виде дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1, 4, 5, 8, 9]. Актуальной задачей для этого класса дифференциальных уравнений является задача об устойчивости решений в случае, когда фазовым пространством уравнения является, в общем случае, некоторое банахово пространство. При исследовании вопроса об устойчивости стационарных решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве применим подход, который называют методом "замороженных" коэффициентов. Суть этого подхода состоит в том, что дифференциальное уравнение записывается в

Статья поступила в редакцию 19.11.2010

ISSN 1810 – 3200.

псевдолинейной форме и переменный оператор рассматривается как постоянный, зависящий от некоторых параметров. При наличии некоторых равномерных ограничений на спектр переменной матрицы и на скорость изменения переменного оператора, такой подход позволяет получить условия глобальной асимптотической устойчивости стационарного решения соответствующего уравнения. Основные результаты в этом направлении для автономных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве получены в работе В. Е. Слюсарчука [2], где введены условия малого изменения операторной функции. Целью настоящей работы является развитие этих идей для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом наряду с идеями работы [2] предлагаются новые идеи, связанные с модификацией метода сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Эти подходы позволяют свести исследование устойчивости стационарного решения дифференциального уравнения в псевдолинейной форме к исследованию семейства конечно-мерных (двумерных) систем сравнения и оценке изменения операторной функции в правой части уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть X — рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t,x)x, \quad t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= B_k(x(t))x(t), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x \in X$, $t \in [a;+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in C([a;+\infty)\times X; \mathcal{L}(X,X))$, $\mathcal{L}(X,X)$ — линейное банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, $B_k \in Lip(X, \mathcal{L}(X,X))$, $x(t+0)$ значение функции $x(t)$ справа, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности и

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1}-\tau_k) < \infty.$$

Предположим, что при всех $(t_0, x_0) \in [a,+\infty) \times X$ задача Коши для дифференциального уравнения (1.1) имеет единственное решение, которое обозначим $x(t;t_0,x_0)$, $x(t_0;t_0,x_0) = x_0$.

Определение 1.1. *Непустое выпуклое множество K называется телесным конусом, если*

$$\forall\, \lambda \geq 0\ (\lambda K \subset K), \quad K \cap (-K) = 0, \quad \operatorname{int} K \neq \emptyset.$$

Конус K определяет в банаховом пространстве X отношение порядка по следующему правилу

$$y \overset{K}{\geq} x \Leftrightarrow y - x \in K, \quad y \overset{K}{>} x \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} K.$$

Определение 1.2 ([3]). *Конус K называется нормальным, если существует постоянная $a_K > 0$ такая, что при всех $y, x \in K$ из неравенства $y \overset{K}{\geq} x$ следует оценка $\|x\|_X \leq a_K \|y\|_X$.*

Далее предполагаем нормальность конуса K и обозначим K^* сопряженный конус к K. Пару элементов $\{w_1, w_2\} \subset K$ будем называть допустимой парой, если существуют неотрицательные постоянные δ_1, δ_2 такие, что $w = \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 \in \operatorname{int} K$. Известно [3], что для элемента $w \in \operatorname{int} K$ можно определить норму Биркгофа

$$\|x\|_w = \{\beta : -\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w\}.$$

Не уменьшая общности, предположим, что элемент w можно выбрать так, что $\|x\|_X = \|x\|_w$ при всех $x \in X$. Нетрудно видеть, что в этом случае, $a_K = 1$.

Сделаем следующие предположения:

1) конус K является нормальным;

2) при всех $(t, p) \in [a; +\infty) \times X$ линейная функция $A(t, p)x$ переменной $x \in X$ является квазимонотонной неубывающей относительно конуса K (см. [10]), т.е. для всех $\varphi \overset{K}{\geq} 0$, $\psi \in K^*$, таких, что $(\varphi, \psi) = 0$, выполняется неравенство
$$(A(t, p)\varphi, \psi) \geq 0;$$

3) при всех $(k, p) \in \mathbb{N} \times X$ линейная функция $B_k(p)x$ переменной x, является позитивной относительно конуса K (см. [10]), то есть из неравенства $\varphi \overset{K}{\geq} 0$ следует неравенство
$$B_k(p)\varphi \overset{K}{\geq} 0;$$

4) существует положительная постоянная M, такая, что при всех $(t, x) \in [a; +\infty) \times X$ выполняется неравенство $\|A(t, x)\| \leq M$;

5) существуют постоянные векторы $w_1, w_2 \in K$ и функционалы $\gamma_{ij}(t, x)$, $\gamma_{ij} \in C([a; +\infty) \times X, \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2$, $\gamma_{ij}(t, x) \geq 0$ при

$i \neq j$ такие, что при всех $(t,x) \in [a;+\infty) \times X$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} A(t,x)w_1 &\overset{K}{\leq} \gamma_{11}(t,x)w_1 + \gamma_{12}(t,x)w_2, \\ A(t,x)w_2 &\overset{K}{\leq} \gamma_{21}(t,x)w_1 + \gamma_{22}(t,x)w_2; \end{aligned} \tag{1.2}$$

6) существуют функционалы $\delta_{ij}^{(k)}(x)$, $\delta_{ij}^{(k)} \in C(X;\mathbb{R})$, $i,j = 1,2$, $\delta_{ij}^{(k)} \geq 0$, такие, что при всех $(k,x) \in \mathbb{N} \times X$:

$$\begin{aligned} B_k(x)w_1 &\overset{K}{\leq} \delta_{11}^{(k)}(x)w_1 + \delta_{21}^{(k)}(x)w_2, \\ B_k(x)w_2 &\overset{K}{\leq} \delta_{12}^{(k)}(x)w_1 + \delta_{22}^{(k)}(x)w_2; \end{aligned} \tag{1.3}$$

7) существуют интегрируемая функция $\alpha : [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ и положительные постоянные β_k такие, что при всех $t \in [a,\infty)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in X} \Lambda(A(t,x)) \leq \alpha(t), \quad \sup_{x \in X} \|B_k(x)\| \leq \beta_k,$$

где $\Lambda(\cdot)$ — логарифмическая операторная мера [12];

8) существуют непрерывная на множестве

$$T = \{(t,\tau) \,|\, t \in [a,\infty),\ 0 \leq \tau \leq t\}$$

функция $\varepsilon_0 : [a,\infty) \times [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ и положительные постоянные ε_k такие, что при всех $(t,x) \in [a,\infty) \times X$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in [0,1]$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \|A(t, x + hA(\tau,x)x) - A(t,x)\| \leq h\varepsilon_0(t,\tau), \\ \|B_k(x + hA(\tau,x)x) - B_k(x)\| \leq h\varepsilon_k. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Условия 8) аналогичны условиям, введенным В. Е. Слюсарчуком, для случая дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [2].

Отметим, что при всех $(t_0,x_0) \in [a,\infty) \times X$ решения $x(t;t_0,x_0)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) являются нелокально продолжимыми, поскольку, вследствие предположения 4) и теоремы М. А. Красносельского ([11, теорема 1.6]) все решения задачи Коши для соответствующего дифференциального уравнения без импульсного воздействия являются нелокально продолжимыми.

Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,X)$ будем называть квазимонотонным оператором, если функция $f(x) = Ax$ является квазимонотонно неубывающей [10].

2. Основной результат

В этом разделе рассматривается глобальная устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1.1). Приведем соответствующие определения.

Определение 2.1. *Состояние равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения* (1.1) *называется глобально асимптотически устойчивым, если*

1) *для любого $t_0 \in [a, \infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует неравенство $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;*

2) *для любого $x_0 \in X$ выполняется предельное соотношение*
$$\lim_{t \to \infty} \|x(t; t_0, x_0)\|_X = 0.$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим семейство (позитивных) линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием
$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \gamma_{11}(t,x)u_1 + \gamma_{21}(t,x)u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma_{12}(t,x)u_1 + \gamma_{22}(t,x)u_2, \end{aligned}\right\} \quad t \neq \tau_k, \\ &\left.\begin{aligned} u_1(t+0) &= \delta_{11}^{(k)}(x)u_1 + \delta_{12}^{(k)}(x)u_2, \\ u_2(t+0) &= \delta_{21}^{(k)}(x)u_1 + \delta_{22}^{(k)}(x)u_2, \end{aligned}\right\} \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.5}$$
где $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Обозначим $\Psi(t, t_0; x) = [\psi_{ij}(t, t_0; x)]_{i,j=1}^2$ матрицант этой системы уравнений и предположим существование конечных величин $\overline{\psi}_{ij}(\tau_{k+1}, \tau_k)$ таких, что
$$\overline{\psi}_{ij}(\tau_{k+1}, \tau_k) = \sup_{x \in X} \psi_{ij}(\tau_{k+1}, \tau_k; x).$$

Введем обозначения
$$\begin{aligned} q_k = (\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1}, \tau_k) &+ \delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1}, \tau_k))\|w_1\|_X \\ &+ (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1}, \tau_k) + \delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1}, \tau_k))\|w_2\|_X \\ &+ (\tau_{k+1} - \tau_k)\varepsilon_{k+1} e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^{t} \varepsilon_0(t,\tau)\,dt d\tau + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \alpha(\tau) d\tau} \\ &+ \beta_{k+1} e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \alpha(\tau) d\tau} \left(e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^{t} \varepsilon_0(t,\tau)\,dt d\tau} - 1 \right), \end{aligned}$$
и последовательность $l_n = \prod_{k=1}^{n} q_k$.

Теорема 2.1. *Предположим, что дифференциальное уравнение с импульсным воздействием* (1.1) *удовлетворяет предположениям* 1)–8) *п.* 1, *существует допустимая пара элементов* (w_1, w_2), *конуса* K *для которой выполняются оценки* (1.2) *и* (1.3), *и последовательность чисел* $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к нулю.*

Тогда состояние равновесия $x = 0$ *дифференциального уравнения* (1.1) *глобально асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

3. Доказательство основной теоремы

Рассмотрим в банаховом пространстве X линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t,p)x, \tag{3.6}$$

где $x \in X$, $t \in [a; +\infty)$, $p \in X$, а операторно-значная функция $A(t,p)$ удовлетворяет предположениям 2) и 4) п. 1.

Рассмотрим интервал $[t_0, T] \subset [a; +\infty)$. Пусть $\{t_k\}$ конечное множество точек этого интервала: $t_0 < t_1 < \cdots < t_s = T$. Обозначим $h = \max_{k=0,s-1}\{t_{k+1} - t_k\}$ и сконструируем функцию

$$x_h(t) = \begin{cases} e^{A(t_0,p)(t-t_0)}x_0, & t \in [t_0, t_1], \\ e^{A(t_1,p)(t-t_1)}x_1, & x_1 = x_h(t_1),\ t \in (t_1, t_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ e^{A(t_{s-1},p)(t-t_{s-1})}x_{s-1}, & x_{s-1} = x_h(t_{s-1}),\ t \in (t_{s-1}, t_s]. \end{cases}$$

Отметим, что $x_h \in C([t_0; T], X)$.

Лемма 3.1.

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[t_0,T]} \|x(t) - x_h(t)\|_X = 0.$$

Рассмотрим некоторое ограниченное подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X, X)$ состоящее из квазимонотонных операторов и удовлетворяющее следующему условию: существуют два вектора $w_1, w_2 \in K$ и для каждого оператора $A \in \mathcal{M}$ существуют постоянные $\gamma_{ij}^{(A)}$, $i, j = 1, 2$, $\gamma_{ij}^{(A)} \geq 0$, $i \neq j$, такие, что выполняются неравенства

$$Aw_1 \overset{K}{\leq} \gamma_{11}^{(A)}w_1 + \gamma_{12}^{(A)}w_2,$$
$$Aw_2 \overset{K}{\leq} \gamma_{21}^{(A)}w_1 + \gamma_{22}^{(A)}w_2,$$

причем $\sup_{A\in\mathcal{M}} |\gamma_{ij}^{(A)}| < \infty$, $i, j = 1, 2$.

Лемма 3.2. *Пусть $h > 0$ — достаточно малое положительное число. Тогда для любого элемента A множества $\mathcal{M}$ справедливы неравенства*

$$0 \overset{K}{\leq} e^{Ah} w_1 \overset{K}{\leq} \pi_{11}^{(A)} w_1 + \pi_{12}^{(A)} w_2 + R_1^{(A)}(h),$$

$$0 \overset{K}{\leq} e^{Ah} w_2 \overset{K}{\leq} \pi_{21}^{(A)} w_1 + \pi_{22}^{(A)} w_2 + R_2^{(A)}(h),$$

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \|R_i^{(A)}(h)\|_X \leq Ch^2, \quad i = 1, 2,$$

где $\Pi^{(A)} = [\pi_{ij}^{(A)}]_{i,j=1}^2 = e^{\Gamma^{(A)}h}$, $\Gamma^{(A)} = [\gamma_{ij}^{(A)}]_{i,j=1}^2$ — матрицы второго порядка, C — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Неравенства $e^{Ah} w_i \overset{K}{\geq} 0$ следуют из того, что множество $\mathcal{M}$ состоит из квазимонотонных операторов.

Введем обозначения

$$m_0 = \sup_{A\in\mathcal{M}} \|A\|, \quad \gamma_0 = \max_{i,j=1,2} \sup_{A\in\mathcal{M}} |\gamma_{ij}^{(A)}|.$$

Из условия леммы следует

$$e^{Ah} w_1 = w_1 + hAw_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1$$
$$\overset{K}{\leq} (1 + h\gamma_{11}^{(A)}) w_1 + h\gamma_{12}^{(A)} w_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1.$$

Из определения матричной экспоненты следуют представления

$$\delta_{ij} + h\gamma_{ij}^{(A)} = \pi_{ij}^{(A)} + r_{ij}^{(A)}, \quad i, j = 1, 2,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $r_{ij}^{(A)}$, $i, j = 1, 2$ элементы матрицы $-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k (\Gamma^{(A)})^k}{k!}$. Поэтому

$$e^{Ah} w_1 \overset{K}{\leq} \pi_{11}^{(A)} w_1 + \pi_{12}^{(A)} w_2 + R_1^{(A)}(h),$$

где

$$R_1^{(A)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1 + r_{11}^{(A)} w_1 + r_{12}^{(A)} w_2.$$

Пусть $h < \min\{\frac{1}{4\gamma_0}, \frac{1}{2m_0}\}$, тогда

$$|r_{ij}^{(A)}| \le \Big\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k(\Gamma^{(A)})^k}{k!} \Big\|_E \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2\gamma_0 h)^k}{k!}$$
$$\le 2\gamma_0^2 h^2 (1 + 2\gamma_0 h + (2\gamma_0 h)^2 + \cdots) = \frac{2\gamma_0^2 h^2}{1 - 2\gamma_0 h} \le 4\gamma_0^2 h^2.$$

Здесь $\|\cdot\|_E$ — обозначает матричную норму Шмидта 2×2-матрицы: $\|\Gamma\|_E = (\sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij}^2)^{1/2}$.

Оценим $R_1^{(A)}$:

$$\|R_1^{(A)}(h)\|_X \le 4\gamma_0^2 h^2 (\|w_1\|_X + \|w_2\|_X) + \frac{m_0^2 \|w_1\|_X h^2}{1 - m_0 h}$$
$$\le h^2 [4\gamma_0^2 (\|w_1\|_X + \|w_2\|_X) + 2m_0^2 \|w_1\|_X] \le C h^2,$$

где $C = 2(2\gamma_0^2 + m_0^2)(\|w_1\| + \|w_2\|)$.

Аналогично доказывается оценка для $e^{Ah} w_2$. □

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \gamma_{11}(t,p)u_1 + \gamma_{21}(t,p)u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma_{12}(t,p)u_1 + \gamma_{22}(t,p)u_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

и обозначим $\Omega(t;t_0;p) = [\omega_{ij}(t;t_0,p)]_{i,j=1}^2$ — матрицант этой системы.

Лемма 3.3. *Пусть δ_1, δ_2 — некоторые неотрицательные числа, $x(t;t_0,x_0,p)$ — решение задачи Коши для дифференциального уравнения* (3.6). *Тогда при $t \ge t_0$ справедливы оценки*

$$0 \overset{K}{\le} x(t;t_0,\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2, p) \overset{K}{\le} (\delta_1 \omega_{11}(t,t_0;p) + \delta_2 \omega_{12}(t,t_0;p))w_1$$
$$+ (\delta_1 \omega_{21}(t;t_0;p) + \delta_2 \omega_{22}(t;t_0;p))w_2.$$

Доказательство. Если $\delta_1 = \delta_2 = 0$, то утверждение леммы очевидно, поэтому будем считать, что δ_1 и δ_2 одновременно не равны нулю. Рассмотрим некоторый сегмент $[t_0, T]$, $T > t_0$, и некоторое его разбиение $t_0 < t_1 < \cdots < t_s = T$, $t_{k+1} - t_k = \frac{T - t_0}{s}$, $k = 0, \ldots, s-1$. Также введем в рассмотрение аппроксимацию $x_h(t;t_0,\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)$ решения $x(t;t_0,\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (3.6).

Используя метод математической индукции, покажем справедливость неравенства

$$0 \overset{K}{\leq} x_m \overset{def}{=} x_h(t_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) w_1 + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) w_2 + r_m(h) \quad (3.8)$$

при $m = 0, 1, 2, \ldots, s$, где $\beta_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2$ — элементы матриц

$$B^{(0)} = I, \quad B^{(m)} = [\beta_{ij}^{(m)}]_{i,j=1}^2 = e^{\Gamma(t_0)h} \ldots e^{\Gamma(t_{m-1})h},$$

$$r_{m+1}(h) = (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,p))}(h) + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,p))}(h) + e^{A(t_m,p)h} r_m(h)$$

Действительно, используя утверждение леммы 3.2, при $m = 0$ получим

$$0 \overset{K}{\leq} x_0 \overset{def}{=} x_h(t_0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = e^{A(t_0,p)(t_0 - t_0)}(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1 \pi_{11}^{(0)} + \delta_2 \pi_{21}^{(0)}) w_1 + (\delta_1 \pi_{12}^{(0)} + \delta_2 \pi_{22}^{(0)}) w_2 + r_0(h),$$

где $\Pi_0 = [\pi_{ij}^{(0)}]_{i,j=1}^2 = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^2$, $r_0(h) = 0$.

Предположим далее, что неравенство (3.8) справедливо при некотором натуральном m. Тогда получим:

$$x_h(t_{m+1}; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = e^{A(t_m,p)h} x_m \overset{K}{\geq} 0,$$

$$\begin{aligned}
x_h(t_{m+1}; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) &= e^{A(t_m,p)h} x_m \\
&\overset{K}{\leq} (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) e^{A(t_m,p)h} w_1 + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) e^{A(t_m,p)h} w_2 \\
&\quad + e^{A(t_m,p)h} r_m(h) \leq (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)})(\pi_{11}^{(m)} w_1 + \pi_{12}^{(m)} w_2) \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)})(\pi_{21}^{(m)} w_1 + \pi_{22}^{(m)} w_2) + (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,p))}(h) \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,p))}(h) + e^{A(t_m,p)h} r_m(h) \\
&= (\delta_1 (\beta_{11}^{(m)} \pi_{11}^{(m)} + \beta_{12}^{(m)} \pi_{21}^{(m)}) + \delta_2 (\beta_{21}^{(m)} \pi_{11}^{(m)} + \beta_{22}^{(m)} \pi_{21}^{(m)})) w_1 \\
&\quad + (\delta_1 (\beta_{11}^{(m)} \pi_{12}^{(m)} + \beta_{12}^{(m)} \pi_{22}^{(m)}) + \delta_2 (\beta_{21}^{(m)} \pi_{12}^{(m)} + \beta_{22}^{(m)} \pi_{22}^{(m)})) w_2 \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,p))}(h) + \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,p))}(h) + e^{A(t_m,p)h} r_m(h) \\
&= (\delta_1 \beta_{11}^{(m+1)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m+1)}) w_1 + (\delta_1 \beta_{12}^{(m+1)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m+1)}) w_2 \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{11}^{(m)} + \delta_2 \beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,p))}(h) \\
&\quad + (\delta_1 \beta_{12}^{(m)} + \delta_2 \beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,p))}(h) + e^{A(t_m,p)h} r_m(h),
\end{aligned}$$

где $\Pi^{(m)} = [\pi_{ij}^{(m)}]_{i,j=1}^2 = e^{\Gamma(t_{m-1})h} \geq 0$, $B^{(m+1)} = B^{(m)}\Pi^{(m+1)}$.

Множество $\mathcal{M} = \{A(t,p)|(t,p) \in [a,\infty) \times X\} \subset \mathcal{L}(X,X)$ состоит из квазимонотонных операторов и ограничено. Обозначим $\gamma_0 = \max_{i,j=1,2} \max_{t\in[t_0,T]} |\gamma_{ij}(t)|$, тогда $|\beta_{ij}^{(m)}| \leq e^{2m\gamma_0 h}$, $i,j = 1,2$. Оценим норму остатка $r_m(h)$:

$$\|r_{m+1}(h)\|_X \leq e^{Mh}\|r_m(h)\|_X + 2(\delta_1+\delta_2)e^{2m\gamma_0 h}Ch^2,$$

тогда

$$\|r_m(h)\|_X \leq v_m,$$

где v_m решение разностного уравнения

$$v_{m+1} = e^{Mh}v_m + 2C(\delta_1+\delta_2)e^{2m\gamma_0 h}h^2, \quad v_0 = 0.$$

Пусть $v_m = e^{mMh}q_m$, тогда

$$e^{(m+1)Mh}(q_{m+1} - q_m) = 2C(\delta_1+\delta_2)e^{2m\gamma_0 h}h^2,$$

поэтому

$$q_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} 2Ch^2(\delta_1+\delta_2)e^{(2\gamma_0 - M)hk - Mh},$$

$$v_m = 2Ch^2(\delta_1+\delta_2)\sum_{k=0}^{m-1} e^{Mh(m-k-1)}e^{2k\gamma_0 h}$$
$$\leq 2Ch^2(\delta_1+\delta_2)e^{mMh}\frac{e^{2mh\gamma_0}-1}{e^{2h\gamma_0}-1}.$$

С учетом очевидного неравенства $e^{2\gamma_0 h} - 1 \geq 2\gamma_0 h$ получим оценку

$$\|r_m(h)\|_X \leq \frac{C(\delta_1+\delta_2)e^{mMh}(e^{2\gamma_0 mh}-1)}{\gamma_0}h.$$

Таким образом, неравенство (3.8) выполняется при всех $m = 0,1,2,\dots,s$. В частности, при $m = s$ имеем

$$0 \overset{K}{\leq} x_h(t;t_0;\delta_1 w_1+\delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(s)}+\delta_2\beta_{21}^{(s)})w_1+(\delta_1\beta_{12}^{(s)}+\delta_2\beta_{22}^{(s)})w_2+r_s(h). \tag{3.9}$$

При этом

$$\|r_s(h)\|_X \leq \frac{C(\delta_1+\delta_2)e^{M(T-t_0)}(e^{2\gamma_0(T-t_0)}-1)}{\gamma_0}h.$$

Переходя в неравенстве (3.9) к пределу при $h \to 0$ $(s \to \infty)$ и учитывая, что $\|r_s(h)\|_X \to 0$, $\|x_h(T;t_0;\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) - x(T;t_0;\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)\|_X \to 0$ при $h \to 0$, $B_s \to \Omega^T(T;t_0;p)$ при $h \to 0$ $(s \to \infty)$, получаем утверждение леммы. □

Наряду с дифференциальным уравнением (1.1) рассмотрим дифференциальное уравнение с “замороженными” коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t,p)x, \quad t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= B_k(p)x(t), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{3.10}$$

удовлетворяющее предположениям 1)–6) п. 1.

Лемма 3.4. *Пусть $x(t;t_0,x_0,p)$ решение задачи Коши для дифференциального уравнения* (3.10).

Тогда при $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} 0 \overset{K}{\leq} x(t;t_0,\delta_1 w_1+\delta_2 w_2,p) & \\ \overset{K}{\leq} (\delta_1\psi_{11}(t,t_0;p)+\delta_2\psi_{12}(t,t_0;p))w_1 & \\ +(\delta_1\psi_{21}(t;t_0;p)+\delta_2\psi_{22}(t,t_0;p))w_2, & \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $t \in (\tau_k,\tau_{k+1}]$, $\tau_0 = t_0$. Проведем доказательство леммы 3.4 методом математической индукции по k.

При $k = 0$, $t \in [t_0;\tau_1]$ и утверждение леммы следует из леммы 3.3.

Предположим далее, что утверждение леммы справедливо при $k = m-1$, т.е.

$$\begin{aligned} 0 \overset{K}{\leq} x(\tau_m;t_0,\delta_1 w_1+\delta_2 w_2,p) & \\ \overset{K}{\leq} (\delta_1\psi_{11}(\tau_m,t_0;p)+\delta_2\psi_{12}(\tau_m,t_0;p))w_1 & \\ +(\delta_1\psi_{21}(\tau_m;t_0;p)+\delta_2\psi_{22}(\tau_m,t_0;p))w_2, & \end{aligned}$$

Из условия леммы и оценок (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} x(\tau_m+0;t_0,\delta_1 w_1+\delta_2 w_2,p) &= B_m(p)x(\tau_m;t_0,\delta_1 w_1+\delta_2 w_2,p) \\ &\overset{K}{\leq} (\delta_1\psi_{11}(\tau_m,t_0;p)+\delta_2\psi_{12}(\tau_m,t_0;p))B_m(p)w_1 \\ &\quad +(\delta_1\psi_{21}(\tau_m,t_0;p)+\delta_2\psi_{22}(\tau_m,t_0;p))B_m(p)w_2 \\ &\overset{K}{\leq} (\delta_1\psi_{11}(\tau_m,t_0;p)+\delta_2\psi_{12}(\tau_m,t_0;p))(\delta_{11}^{(m)}w_1+\delta_{21}^{(m)}w_2) \\ &\quad +(\delta_1\psi_{21}(\tau_m,t_0;p)+\delta_2\psi_{22}(\tau_m,t_0;p))(\delta_{12}^{(m)}w_1+\delta_{22}^{(m)}w_2) \\ &= [\delta_1(\psi_{11}(\tau_m,t_0;p)\delta_{11}^{(m)}+\psi_{21}(\tau_m,t_0;p)\delta_{12}^{(m)}) \\ &\quad +\delta_2(\psi_{12}(\tau_m,t_0;p)\delta_{11}^{(m)}+\psi_{22}(\tau_m,t_0;p)\delta_{12}^{(m)})]w_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ [\delta_1(\psi_{11}(\tau_m, t_0; p)\delta_{21}^{(m)} + \psi_{21}(\tau_m, t_0; p)\delta_{22}^{(m)})\\
&+ \delta_2(\psi_{12}(\tau_m, t_0; p)\delta_{21}^{(m)} + \psi_{22}(\tau_m, t_0; p)\delta_{22}^{(m)})]w_2\\
&= (\delta_1\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p))w_1\\
&\qquad + (\delta_1\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))w_2.
\end{aligned}$$

Применяя утверждение леммы 3.3 и монотонность решений задачи Коши для дифференциального уравнения (3.10), получим при $t \in [\tau_m, \tau_{m+1}]$:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{K}{\leq} x(t; \tau_m, x(\tau_m + 0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2), p)\\
&\overset{K}{\leq} x(t; \tau_m, (\delta_1\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p))w_1\\
&\qquad + (\delta_1\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))w_2, p)\\
&\overset{K}{\leq} [\omega_{11}(t, \tau_m; p)(\delta_1\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p))\\
&\quad + \omega_{12}(t, \tau_m; p)(\delta_1\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))]w_1\\
&\quad + [\omega_{21}(t, \tau_m; p)(\delta_1\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p))\\
&\quad + \omega_{22}(t, \tau_m; p)(\delta_1\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p) + \delta_2\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))]w_2\\
&= [\delta_1(\omega_{11}(t, \tau_m; p)\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \omega_{12}(t, \tau_m; p)\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p))\\
&\quad + \delta_2(\omega_{11}(t, \tau_m; p)\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p) + \omega_{12}(t, \tau_m; p)\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))]w_1\\
&\quad + [\delta_1(\omega_{21}(t, \tau_m; p)\psi_{11}(\tau_m + 0, t_0; p) + \omega_{22}(t, \tau_m; p)\psi_{21}(\tau_m + 0, t_0; p))\\
&\quad + \delta_2(\omega_{21}(t, \tau_m; p)\psi_{12}(\tau_m + 0, t_0; p) + \omega_{22}(t, \tau_m; p)\psi_{22}(\tau_m + 0, t_0; p))]w_2.
\end{aligned}$$

С учетом равенств

$$\psi_{ij}(t; t_0; p) = \sum_{k=1}^{2} \omega_{ik}(t, \tau_m; p)\psi_{kj}(\tau_m + 0, t_0; p), \quad i, j = 1, 2,$$

приходим к завершению доказательства леммы. □

Лемма 3.5. *Предположим, что существуют конечные величины*

$$\overline{\psi}_{ij}(\tau_{k+1}, \tau_k) = \sup_{x \in X} \psi_{ij}(\tau_{k+1}, \tau_k; x), \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда для решений задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|x(\tau_{k+1} + 0; t_0, x_0)\|_X\\
&\quad \leq \|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\|_X \Big((\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1}, \tau_k) + \delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1}, \tau_k))\|w_1\|_X
\end{aligned}$$

$$+ (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1},\tau_k) + \delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_2\|_X$$
$$+ (\tau_{k+1}-\tau_k)\varepsilon_{k+1} e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}$$
$$+ \beta_{k+1} e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}\left(e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau} - 1\right)\Bigg).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение сегмента $[\tau_k,\tau_{k+1}]$:

$$\tau_k = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s = \tau_{k+1},$$

определим $h = \frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{s}$ — длину шага разбиения, и аппроксимацию $x_h(t;t_0,x_0)$ решения задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) на интервале времени $(\tau_k,\tau_{k+1}]$:

$$x_h(t;t_0,x_0) = \begin{cases} e^{A(\xi_0,y_0)(t-\xi_0)}y_0, & y_0 = x(\tau_k+0;t_0,x_0), \\ & t\in[\xi_0,\xi_1], \\ e^{A(\xi_1,y_1)(t-\xi_1)}y_1, & y_1 = x_h(\xi_1;t_0,x_0), \\ & t\in(\xi_1,\xi_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ e^{A(\xi_{s-1},y_{s-1})(t-\xi_{s-1})}y_{s-1}, & y_{s-1} = x_h(\xi_{s-1};t_0,x_0), \\ & t\in(\xi_{s-1},\xi_s]. \end{cases}$$

Используя метод математической индукции, покажем справедливость (при достаточно малых h) представления

$$y_l = e^{hA(\xi_{l-1},y_0)}\dots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0 + F_l, \tag{3.12}$$

где

$$\|F_l\|_X \le e^{h\sum\limits_{p=0}^{l-1}\alpha(\xi_p)}\left[\prod_{p=0}^{l-1}\prod_{q=0}^{p}(1+h^2\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)+o(h^2)) - 1\right]\|y_0\|_X, \tag{3.13}$$

при $l=1,2,\dots,s$, $F_0=0$, где $o(h^2)$ — бесконечно малая величина, не зависящая от l.

Действительно, при $l=0$ утверждение, очевидно, истинно. Предположим, что оно истинно при некотором $l=m$. Тогда

$$y_{m+1} = e^{hA(\xi_m,y_m)}y_m = e^{hA(\xi_m,y_m)}(e^{hA(\xi_{m-1},y_0)}\dots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0 + F_m).$$

По определению

$$
\begin{aligned}
y_l = x_h(\xi_l; t_0, x_0) = e^{hA(\xi_{l-1}, y_{l-1})} x_h(\xi_{l-1}; t_0, x_0) \\
= (I + hA(\xi_{l-1}, y_{l-1})) y_{l-1} + o(h), \quad l = 1, \dots, m,
\end{aligned}
$$

поэтому

$$
e^{hA(\xi_l, y_m)} = e^{hA(\xi_l, y_{m-1})}(I + hR_{l,m-1} + o(h^2)), \quad m = 1, \dots, l,
$$

где $R_{p,q} = A(\xi_p, y_q + hA(\xi_q, y_q) y_q) - A(\xi_p, y_q)$, и, как следствие,

$$
\begin{aligned}
e^{hA(\xi_m, y_m)} = e^{hA(\xi_m, y_0)}(I + hR_{m,0} + o(h^2))(I + hR_{m,1} + o(h^2)) \times \cdots \\
\cdots \times (I + hR_{m,m-1} + o(h^2)) = e^{hA(\xi_m, y_0)}(I + Q_m).
\end{aligned}
$$

Здесь введено обозначение

$$
Q_m = (I + hR_{m,0} + o(h^2))(I + hR_{m,1} + o(h^2)) \cdots (I + hR_{m,m-1} + o(h^2)) - I.
$$

Из условия (1.4) следует, что

$$
\|R_{l,k}\| \le \varepsilon_0(\xi_l, \xi_k) h, \quad l = 1, \dots, s, \quad k = 0, 1, \dots, l-1,
$$

и, как следствие, с учетом того факта, что $1 + \varepsilon_0(\xi_m, \xi_m) h^2 + o(h^2) \ge 1$,

$$
\|Q_m\| \le \prod_{p=0}^{m} (1 + \varepsilon_0(\xi_m, \xi_p) h^2 + o(h^2)) - 1.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} &= e^{hA(\xi_m, y_m)} y_m \\
&= (e^{hA(\xi_m, y_0)} + e^{hA(\xi_m, y_0)} Q_m)(e^{hA(\xi_{m-1}, y_0)} \cdots e^{hA(\xi_0, y_0)} y_0 + F_m) \\
&= e^{hA(\xi_m, y_0)} \cdots e^{hA(\xi_0, y_0)} y_0 + e^{hA(\xi_m, y_0)} Q_m e^{hA(\xi_{m-1}, y_0)} \cdots e^{hA(\xi_0, y_0)} y_0 \\
&\quad + e^{hA(\xi_m, y_0)} Q_m F_m + e^{hA(\xi_m, y_0)} F_m.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
F_{m+1} = e^{hA(\xi_m, y_0)} Q_m e^{hA(\xi_{m-1}, y_0)} \cdots e^{hA(\xi_0, y_0)} y_0 \\
+ e^{hA(\xi_m, y_0)} Q_m F_m + e^{hA(\xi_m, y_0)} F_m,
\end{aligned}
$$

тогда

$$
\begin{aligned}
\|F_{m+1}\|_X \le e^{h \sum_{p=0}^{m} \alpha(\xi_p)} \|Q_m\| \|y_0\|_X \\
+ e^{h\alpha(\xi_m)} \|F_m\|_X \|Q_m\| + e^{h\alpha(\xi_m)} \|F_m\|_X
\end{aligned}
$$

$$\leq e^{h\sum_{p=0}^{m}\alpha(\xi_p)}\left(\prod_{k=0}^{m}(1+\varepsilon_0(\xi_m,\xi_k)h^2+o(h^2))-1\right)\|y_0\|_X$$

$$+e^{h\sum_{p=0}^{m}\alpha(\xi_p)}\left[\prod_{p=0}^{m-1}\prod_{q=0}^{p}(1+h^2\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)+o(h^2))-1\right]\|y_0\|_X$$

$$+e^{h\sum_{p=0}^{m}\alpha(\xi_p)}\left[\prod_{p=0}^{m-1}\prod_{q=0}^{p}(1+h^2\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)+o(h^2))-1\right]$$

$$\times\left[\prod_{k=0}^{m-1}(1+\varepsilon_0(\xi_m,\xi_k)h^2+o(h^2))-1\right]\|y_0\|_X=$$

$$=e^{h\sum_{p=0}^{m}\alpha(\xi_p)}\left[\prod_{p=0}^{m}\prod_{q=0}^{p}(1+h^2\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)+o(h^2))-1\right]\|y_0\|_X,$$

что доказывает представление (3.12) вместе с оценкой (3.13).

Обозначим $G_{k+1}=B_{k+1}(y_s)-B_{k+1}(y_0)$, тогда из условия $B_k\in Lip(X;\mathcal{L}(X,X))$ и условия (1.4) следует, что

$$\|G_{k+1}\|\leq\varepsilon_{k+1}(\tau_{k+1}-\tau_k)+o(1),\quad h\to 0.$$

Тогда, с учетом предельных соотношений,

$$\lim_{s\to\infty}h\sum_{p=0}^{s}\alpha(\xi_p)=\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(s)\,ds,$$

$$\lim_{s\to\infty}\prod_{p=0}^{s}\prod_{q=0}^{p}(1+h^2\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)+o(h^2))$$

$$=e^{\lim\limits_{s\to\infty}h^2\sum_{p=0}^{s}\sum_{q=0}^{p}\varepsilon_0(\xi_p,\xi_q)}=e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau}$$

получим цепочку неравенств

$$x(\tau_{k+1}+0;t_0,x_0)=B_{k+1}(x(\tau_{k+1};t_0,x_0))x(\tau_{k+1};t_0,x_0)$$
$$=\lim_{h\to 0}B_{k+1}(x_h(\tau_{k+1};t_0,x_0))x_h(\tau_{k+1};t_0,x_0)=\lim_{h\to 0}B_{k+1}(y_s)y_s$$
$$=\lim_{h\to 0}(B_{k+1}(y_0)+G_{k+1})(e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0+F_s)$$
$$=\lim_{h\to 0}B_{k+1}(y_0)e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0$$
$$+\lim_{h\to 0}(G_{k+1}(e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0+F_s)+B_{k+1}(y_0)F_s)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{K}{\le} \|y_0\|_X \varlimsup_{h\to 0} B_{k+1}(y_0)e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}(\delta_1 w_1+\delta_2 w_2)\\
&\quad + \varlimsup_{h\to 0}(G_{k+1}(e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0+F_s)+B_k(y_0)F_s)\\
&\qquad \overset{K}{\le} \|y_0\|_X(\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1},\tau_k))w_1\\
&\qquad\quad + (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1},\tau_k)w_2)\\
&\qquad + \varlimsup_{h\to 0}((G_{k+1}e^{hA(\xi_{s-1},y_0)}\cdots e^{hA(\xi_0,y_0)}y_0+F_s)+B_{k+1}(y_0)F_s).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\|x(\tau_{k+1}+0;t_0,x_0)\|_X\\
&\qquad \le \|y_0\|_X((\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_1\|_X\\
&\qquad\quad + (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_2\|_X)\\
&\quad + \varlimsup_{h\to 0}(\|G_{k+1}\|(e^{h\sum_{p=0}^{s-1}\alpha(\xi_p)}\|y_0\|_X+\|F_s\|_X)+\|B_{k+1}(y_0)\|\|F_s\|_X)\\
&\qquad \le \|y_0\|_X((\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_1\|_X\\
&\qquad\quad + (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_2\|_X)\\
&\qquad\quad + \Bigg((\tau_{k+1}-\tau_k)\varepsilon_{k+1}e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau+\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}\\
&\qquad\quad + \beta_{k+1}e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}\Bigg(e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau}-1\Bigg)\Bigg)\|y_0\|_X\\
&\quad = \|x(\tau_k+0;t_0,x_0)\|_X\Bigg((\delta_1\overline{\psi}_{11}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{12}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_1\|_X\\
&\qquad\quad + (\delta_1\overline{\psi}_{21}(\tau_{k+1},\tau_k)+\delta_2\overline{\psi}_{22}(\tau_{k+1},\tau_k))\|w_2\|_X\\
&\qquad\quad + (\tau_{k+1}-\tau_k)\varepsilon_{k+1}e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau+\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}\\
&\qquad\qquad + \beta_{k+1}e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\alpha(\tau)d\tau}\Bigg(e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{t}\varepsilon_0(t,\tau)\,dtd\tau}-1\Bigg)\Bigg),
\end{aligned}
$$

что завершает доказательство леммы. □

Доказательство основной теоремы. Пусть $t\in(\tau_k,\tau_{k+1}]$, тогда справедливо интегральное представление

$$
x(t;t_0,x_0) = x(\tau_k+0;t_0,x_0)+\int\limits_{\tau_k}^{t} A(s,x(s;t_0,x_0))x(s;t_0,x_0)\,ds
$$

из которого следует неравенство

$$\|x(t;t_0,x_0)\|_X \le \|x(\tau_k+0;t_0,x_0)\|_X + \int\limits_{\tau_k}^{t} M\|x(s;t_0,x_0)\|_X\,ds.$$

Применяя лемму Гронуолла–Белмана и лемму 3.5, получим оценку

$$\|x(t;t_0,x_0)\|_X \le l_k e^{M(\tau_{k+1}-\tau_k)}\|x_0\|_X,$$

из которой следует утверждение теоремы. Теорема доказана. □

4. Заключение

Приведем пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 2.1. Рассмотрим в конечномерном банаховом пространстве $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}$ систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \psi(x)Ax, \quad t \ne \tau_k,\\ \Delta x(t) = \psi(x(t))Bx(t), \quad t = \tau_k,\end{gathered} \tag{4.14}$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, A, B — 3×3-матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & -\alpha & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & \beta\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \gamma & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & -\delta\end{pmatrix},$$

α, β, γ, δ — положительные числа, $\varepsilon \ge 0$ и $\varepsilon < \alpha$.

Моменты импульсного воздействия удовлетворяют неравенствам

$$0 < \theta_1 \le \tau_{k+1} - \tau_k \le \theta_2 < +\infty.$$

Относительно скалярной функции $\psi(x)$ предположим, что

$$\begin{gathered}0 < \psi_m \le \psi(x) \le \psi_M < +\infty, \quad 1 - \psi_M\|A\|_\infty > 0, \quad 1 - \delta\psi_m > 0,\\ \Big\|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\Big\|_1 \le \frac{q}{\|x\|_\infty}, \quad x \ne 0,\ q > 0.\end{gathered}$$

Пусть $K = \mathbb{R}^3_+$, $w_1 = (1,1,0)^T$, $w_2 = (0,0,1)^T$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\|x\|_\infty = \|x\|_w$, тогда

$$\psi(x)Aw_1 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\le} \psi_m(\varepsilon-\alpha)w_1 + 2\varepsilon\psi_M w_2,$$

$$\psi(x)Aw_2 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\leq} \psi_M\varepsilon w_1 + \psi_M\beta w_2,$$
$$(I+\psi(x)B)w_1 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\leq} (1+\psi_M(\gamma+\varepsilon))w_1 + 2\varepsilon\psi_M w_2,$$
$$(I+\psi(x)B)w_2 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\leq} \varepsilon\psi_M w_1 + (1-\delta\psi_m)w_2.$$

Поэтому

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \psi_m(\varepsilon-\alpha) & 2\varepsilon\psi_M \\ \psi_M\varepsilon & \beta\psi_M \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1+\psi_M(\varepsilon+\gamma) & 2\varepsilon\psi_M \\ \psi_M\varepsilon & 1-\delta\psi_m \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что матрица $\overline{\Psi}(\tau_{k+1},\tau_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\Psi}(\tau_{k+1},\tau_k) \leq \Psi^*,$$

где

$$\Psi^* = \exp\left[\begin{pmatrix} \psi_m(\varepsilon-\alpha)\theta_1 & \varepsilon\psi_M\theta_2 \\ 2\psi_M\varepsilon\theta_2 & \beta\psi_M\theta_2 + \psi_m(\alpha-\varepsilon)(\theta_2-\theta_1) \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 1+\psi_M(\varepsilon+\gamma) & \varepsilon\psi_M \\ 2\psi_M\varepsilon & 1-\delta\psi_m \end{pmatrix}$$

Рассмотрим вопрос об оценках (1.4). Из леммы Адамара следует, что при $h \in (0,1)$

$$|\psi(x+h\psi(x)Ax)-\psi(x)| \leq \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x+\eta\psi(x)Ax)\right\|_1 \|h\psi(x)Ax\|_\infty,$$

где $\eta \in (0,1)$. Поскольку

$$\|x+\eta\psi(x)A(x)\|_\infty \geq \|x\|_\infty - \eta\psi_M\|A\|_\infty\|x\|_\infty \geq (1-\psi_M\|A\|_\infty)\|x\|_\infty,$$

то

$$\|\psi(x+h\psi(x)Ax)A-\psi(x)A\|_\infty \leq \frac{q\psi_M\|A\|^2_\infty}{1-\psi_M\|A\|_\infty}h,$$
$$\|\psi(x+h\psi(x)Ax)B-\psi(x)B\|_\infty \leq \frac{q\psi_M\|A\|_\infty\|B\|_\infty}{1-\psi_M\|A\|_\infty}h.$$

Обозначим

$$\varepsilon_0 = \frac{q\psi_M\|A\|^2_\infty}{1-\psi_M\|A\|_\infty}, \quad \varepsilon_1 = \frac{q\psi_M\|A\|_\infty\|B\|_\infty}{1-\psi_M\|A\|_\infty}.$$

Условия глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (4.14) имеют вид

$$q = \psi_{11}^* + \psi_{12}^* + \psi_{21}^* + \psi_{22}^* + \theta_2\varepsilon_1 e^{\frac{\varepsilon_0\theta_2^2}{2}+(2\varepsilon+\beta)\theta_2}$$
$$+ (1+\psi_M\|B\|_\infty)e^{(2\varepsilon+\beta)\theta_2}(e^{\frac{\varepsilon_0\theta_2^2}{2}}-1) < 1.$$

В связи с приведенным выше примером отметим следующее обстоятельство. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{4.15}$$
Локально асимптотически устойчивое состояние равновесия $x = 0$ системы (4.15) является глобально асимптотически устойчивым. Если $\psi \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $\psi(x) > 0$, то состояние равновесия $x = 0$ нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x)Ax$$

также является глобально асимптотически устойчивым. Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием аналогичное утверждение не верно, т.е. из асимптотической устойчивости линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x(t) = Bx(t), \quad t = \tau_k$$

вообще говоря, не следует глобальная асимптотическая устойчивость состояния равновесия нелинейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x(t))Ax, \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x(t) = \psi(x(t))Bx(t), \quad t = \tau_k.$$

Действительно, рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1+x^2), \quad t \neq k\theta, \\ \Delta x(t) &= -\gamma x(1+x^2), \quad t = k\theta, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, $\gamma \in (0,1)$. Неравенство $e^\theta(1-\gamma) < 1$ гарантирует локальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x = 0$ (см. [1]).

Покажем, что состояние равновесия $x = 0$ уравнения (4.16) не является глобально асимптотически устойчивым. Пусть $x(t;x_0)$ решение задачи Коши для уравнения (4.16) с начальным условием

$x(0;x_0) = x_0$, $\omega^+(x_0)$ величина правого максимального интервала существования решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения без импульсного воздействия. Нетрудно видеть, что $\omega^+(x_0) \le \frac{1}{2x_0^2}$, $x_0 > 0$. Пусть $x_0 > \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, тогда решение $x(t;x_0)$ уходит на бесконечность за время меньшее $\frac{\theta}{2}$, т.е. до момента первого импульсного воздействия, что доказывает отсутствие глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (4.16). Таким образом, этот простой пример показывает, что задача о глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является несколько более сложной, чем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Утверждение теоремы 2.1 позволяют исследовать глобальную устойчивость тривиального решения дифференциального уравнения (1.1) и обобщают результаты работ [2, 14]. Фактически вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения в банаховом пространстве сведен к исследованию системы дифференциальных уравнений второго порядка. Последняя задача значительно проще и может быть исследована известными методами [1, 7, 13, 15–18].

Литература

[1] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, К.: Вища школа, 1987, 288 с.

[2] В. Ю. Слюсарчук, *Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь*, Рівне: вид-во НУВГП, 2004, 416 с.

[3] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы*, М.: Наука, 1985, 256 с.

[4] A. O. Ignat'ev, O. A. Ignat'ev, A. A. Soliman, *Asymptotic Stability and Instability of the Solutions of Systems with Impulse Action* // Mathematical Notes, **80** (2006), No. 4, 491–499.

[5] A. O. Ignat'ev, *On the stability ofinvariant sets of systems with impulse effect* // Nonlinear Analisis, **69** (2008), 53–72.

[6] A. O. Ignat'ev, O. A. Ignat'ev, *Stability of Solutions of Systems with Impulse Effect*, In Progress in Nonlinear Analisys Research, Nova Science Publishers, Inc., 2009, 363–389.

[7] A. I. Dvirnyi, V. I. Slyn'ko, *Stabylity of solutions to impulsive differential equations in critical cases* // Siberian Mathematical Journal, **52** (2011), No. 1, 54–62.

[8] Н. А. Перестюк, *К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем* // Годишн. висш. учебни завед. Прилож. ма-тем, **1** (1975), No. 1, 145–151.

[9] Н. А. Перестюк, *Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием* // Вести. Киев. ун-та. Математика и механика, (1977), No. 19, 71–76.

[10] В. Лакшмикантам, С. Лила, А. А. Мартынюк, *Устойчивость движения: метод сравнения*, К.: Наук. думка, 1991, 243 с.

[11] М. А. Красносельский, *Операторы сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1966, 331 с.

[12] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, М.: Наука, 1970, 536 с.

[13] І. О. Дудзяний, М. О. Перестюк, *Про стійкість тривіального інваріантного тора одного класу систем з імпульсним збуренням* // Укр. мат. журн., **50** (1998), No. 3, 338–349.

[14] А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский, *Исследование устойчивости автономных систем сравнения*, Киев, Институт математики АН УССР, 1978, препринт 78.28, 24 с.

[15] М. О. Перестюк, О. С. Чернікова, *Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією* //Укр. мат. журн., **60** (2008), No. 1, 81–94.

[16] А. А. Мартынюк, В. И. Слынько, *Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы* // Прикл. мех., **40** (2004), No. 2, 134–144.

[17] А. И. Двирный, В. И. Слынько, *Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса* // Доп. НАН України, (20040, No. 4, 37–43.

[18] В. И. Слынько, *Об экспоненциальной устойчивости линейной импульсной системы в гильбертовом пространстве*// Доп. НАН України, (2002), No. 12, 44–47.

Сведения об авторах

Александр Иванович Двирный

Академия пожарной безопасности
им. Героев Чернобыля МЧС Украины
ул. Оноприенко, 8
18000 Черкассы
Украина
E-Mail: dvirny@mail.ru

Виталий Иванович Слынько

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины
ул. Нестерова, 3
03057 Киев, Украина
E-Mail: vitstab@ukr.net