УДК 517.925.51

©2011. **О.В. Анашкин, О.В. Митько**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается задача об устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Предполагается, что система линейного приближения устойчива, но не обеспечивает устойчивости полной системы. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейной системы. Приведен иллюстративный пример.

***Ключевые слова:*** *дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, асимптотическая устойчивость, неустойчивость, прямой метод Ляпунова.*

**1. Введение.** Система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием описывает поведение эволюционного процесса с конечномерным вектором состояния, который в некоторые моменты времени резко изменяется так, что можно считать это изменение мгновенным. Реальными примерами таких явлений являются механические удары, электрические импульсы и т.п. Первые итоги развития математической теории систем с импульсным воздействием изложены в монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [1]. К настоящему времени это направление в теории дифференциальных уравнений основательно разработано [2–6].

Одним из важнейших вопросов при анализе любого дифференциального уравнения, является проблема устойчивости решений, рассмотренная уже в первой публикации по системам с импульсами [7]. С прикладной точки зрения важно иметь эффективные инструменты для исследования устойчивости конкретных уравнений. Общепризнано, что именно таким инструментом является метод функций Ляпунова [8]. Различные аспекты развития прямого метода Ляпунова для систем с импульсным воздействием рассматриваются в работах [1–19].

Подбор подходящей функции Ляпунова часто оказывается чрезвычайно трудным делом. Поэтому актуальна задача поиска условий устойчивости, расширяющих класс вспомогательных функций и, тем самым, облегчающих подбор таких функций. В настоящей работе предложены новые достаточные условия устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Развивается примененный в работах [18, 19] подход, который сочетает прямой метод Ляпунова и идеи метода усреднения [20-22]. Теоремы об устойчивости формулируются в терминах разрывных функций Ляпунова, допускающих разрывы первого рода по времени в моменты импульсных воздействий. Приводится пример применения новых результатов.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x|_{t=\tau_k} = J_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ – моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \ge \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ – скачок решения $x(t)$ в момент $\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Система имеет нулевое решение: $f(t, 0) = J_k(0) = 0$. Предполагается, что решения системы (1) непрерывны слева, т. е. $x(t) = x(t-0)$, функции $f(t,x)$ и $J_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \ge 0\}$ и $k = 1, 2, \ldots$. Как обычно, $x(t; t_0, x^0)$ обозначает решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Обозначим через $B_r \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса $r$ с центром в нуле, $B_r = \{|x| < r\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$.

Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \ge 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \ge t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \ge 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \ge t_0$;

– *равномерно притягивающим*, если для некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \ge 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \ge t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Обозначим через $\mathcal{K}$ «класс Хана» – множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$. Чтобы не обсуждать возможные патологии, будем считать, что моменты импульсного воздействия $\tau_k$ распределены более или менее равномерно, а именно, пусть $0 < \theta_1 \le \tau_{k+1} - \tau_k \le \theta_2$, для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \le \theta_2$.

В дальнейшем существенную роль играет *линеаризация* системы (1) в нуле

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A(t)y, \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta y|_{t=\tau_k} = B_k y, \end{aligned} \tag{2}$$

где $|f(t,y) - A(t)y| = o(|y|)$, $|J_k(y) - B_k y| = o(|y|)$ при $|y| \to 0$ равномерно по $t \ge 0$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим $\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|\varphi(t)|, t \in [a, b]\}$ норму в пространстве $KC([a, b])$ всех таких функций.

Используя лемму Гроноулла, можно получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $[t_0, t_0 + T]$: $|x(t; t_0, x^0)| \le |x^0| Const$, где

$Const$ зависит только от длины промежутка $T$. Оценку нормы разности решений систем (1) и (2) на отрезке $[t_0, t_0+T]$ можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [5, стр. 25]):

$$|x(t;t_0,x^0) - y(t;t_0,x^0)| \leq \|x-y\|_{[t_0,t_0+T]} = o(|x^0|) \text{ при } |x^0| \to 0. \tag{3}$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и $x^0$ из заданной окрестности нуля и зависит только от величины $T$.

**3. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости.** Введем в рассмотрение множества $G = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{T} \times \mathcal{D}$.

Будем говорить, что функция $V\colon G \to \mathbb{R}$, $V\colon (t,x) \mapsto V(t,x)$, принадлежит классу $\mathcal{V}_1$, если

1) функция $V$ непрерывно дифференцируема на множестве $\mathcal{G}$;

2) для всякого $x$ из $\mathcal{D}$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{t\to\tau_k-0} V(t,x) = V(\tau_k, x)$$

и существует конечный предел

$$\lim_{(t,z)\to(\tau_k+0,x)} V(t,z) = V(\tau_k+0, x).$$

Используя оценку (3) и подход, изложенный в работах [18, 19], можно обосновать следующие достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости для системы с импульсным воздействием вида (1).

**Теорема 1.** *Предположим, что для некоторого* $0 < h$ *в области* $G_h = \mathbb{R} \times B_h \subset G$ *существуют функции* $V \in \mathcal{V}_1$ *и* $\Phi\colon G_h \to \mathbb{R}$ *такие, что:*

(i) $a(|x|) \leq V(t,x) \leq b(|x|)$ *для некоторых* $a, b \in \mathcal{K}$*;*

(ii) $\dot V\Big|_{(1)} \leq \Phi(t,x)$ *для* $(t,x) \in G_h$*;*

(iii) *существуют постоянные* $d > 1$ *и* $M > 0$ *такие,что*

$$|\Phi(t,x)| \leq M|x|^d, \quad |\Phi(t,x') - \Phi(t,x'')| \leq Mr^{d-1}|x'-x''|$$

*для* $(t,x'), (t,x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ *при всяком* $r \in (0,h)$*;*

(iv) *существуют постоянные* $T_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие,что для всех* $(t_0, x^0)$ *из* $G_h$ *при* $\Delta t \geq T_0$

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t;t_0,x^0))\,dt \leq -\delta_0|x^0|^d\Delta t,$$

*где* $y(t;t_0,x^0)$ *– решение линеаризации (2);*

(v) $V(\tau_k, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \le 0, \quad k = 1, 2, \ldots$

*Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.*

*Областью положительности* функции $V\colon G \to \mathbb{R}$, $V(t,0) \equiv 0$, назовем множество $\{V > 0\} = \{(t,x) \in G\colon V(t,x) > 0\}$. Будем говорить, что область $\{V > 0\}$ *примыкает к нулю*, если при всяком $t \ge 0$ и сколь угодно малом $\rho > 0$ множество $\{V > 0\}_t = \{x \in \mathcal{D}\colon V(t,x) > 0\}$ имеет открытое пересечение со сферой $\{|x| = \rho\}$.

Достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (1) мы также будем формулировать в терминах свойств разрывной вспомогательной функции $V$ из класса $\mathcal{V}_1$.

**Теорема 2.** *Пусть существуют постоянные $\tau \ge 0$, $h > 0$ и функции $V \in \mathcal{V}_1$, $\Phi\colon [\tau, \infty) \times B_h \to \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{K}$ такие, что:*

(i) *функция $V$ обладает примыкающей к нулю областью положительности $\{V > 0\}$ и $V(t,x) \le b(|x|)$ в области $\{V > 0\}$;*

(ii) $\dot V\Big|_{(1)}(t,x) \ge \Phi(t,x)$ *в области $\mathcal{T} \times B_h$;*

(iii) *существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие,что*

$$|\Phi(t,x)| \le M|x|^d, \quad |\Phi(t,x') - \Phi(t,x'')| \le M r^{d-1}|x' - x''|$$

*для $(t,x'), (t,x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ при всяком $r \in (0,h)$;*

(iv) *существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие,что для всех $(t_0, x^0)$ из области положительности $\{V > 0\}$ при $\Delta t \ge T_0$*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t; t_0, x^0))\,dt \ge \delta_0 |x^0|^d \Delta t,$$

*где $y(t; t_0, x^0)$ – решение линеаризации (2);*

(v) $V(\tau_k, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots$

*Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.*

**4. Исследование устойчивости в одном критическом случае.** Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
&\dot x_1 = \lambda x_1 + p_{30}x_1^3 + p_{21}x_1^2 x_2 + p_{12}x_1 x_2^2 + p_{03}x_2^3,\\
&\dot x_2 = \bar\lambda x_2 + \bar p_{03}x_1^3 + \bar p_{12}x_1^2 x_2 + \bar p_{21}x_1 x_2^2 + \bar p_{30}x_2^3, \quad t \ne \tau_k,\\
&x_1(\tau_k + 0) = x_1(\tau_k)\exp(-\alpha\theta),\\
&x_2(\tau_k + 0) = x_2(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \quad k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, коэффициенты $p_{30}$, $p_{21}$, $p_{12}$, $p_{03}$ – комплексные постоянные, черта над символом означает комплексное сопряжение, $\tau_k = k\theta$, $\theta > 0$.

Предполагается, что рассматриваемая система эквивалентна некоторой вещественной системе и переменные $x_1$ и $x_2$ комплексно сопряжены.

Система линейного приближения имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = \lambda y_1,\\
&\dot{y}_2 = \bar{\lambda} y_2,\\
&y_1(\tau_k + 0) = y_1(\tau_k)\exp(-\alpha\theta),\\
&y_2(\tau_k + 0) = y_2(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{5}$$

и является устойчивой, но не асимптотически. Таким образом, можно сказать, что в системе (4) наблюдается критический случай теории устойчивости.

Пусть $\tau_{k_0-1} \le t_0 < \tau_{k_0}$. Найдем решение $y(t; t_0, y^0)$ задачи Коши для линеаризации (5) с начальным условием $y(t_0) = y^0$. При этом мы ограничимся только выражением для первой проекции $y_1$, т.к. вторая проекция будет комплексно сопряженной.

При $t_0 \le t \le \tau_{k_0}$

$$y_1(t) = y_1^0 \exp[\lambda(t - t_0)] \;\text{ и }\; y_1(\tau_{k_0}) = y_1^0 \exp[\lambda(\tau_{k_0} - t_0)] = \widehat{y}_1^0.$$

При $\tau_{k_0} < t \le \tau_{k_0+1}$

$$y_1(t) = \widehat{y}_1^0 e^{-\alpha\theta} \exp[\lambda(t - \tau_{k_0}] \;\text{ и }\; y_1(\tau_{k_0+1}) = \widehat{y}_1^0 \exp[(\lambda - \alpha)\theta] = \widehat{y}_1^0 e^{i\beta\theta}.$$

И вообще, для всякого натурального $k \ge k_0$ при $\tau_k < t \le \tau_{k+1}$ имеем равенства

$$y_1(t) = \widehat{y}_1^0 e^{[-\alpha + i(k-k_0)\beta]\theta} \exp[\lambda(t - \tau_k)] \;\text{ и }\; y_1(\tau_{k+1}) = \widehat{y}_1^0 e^{i(k+1-k_0)\beta\theta}. \tag{6}$$

Вспомогательную функцию построим на основе первого интеграла линейного приближения (5):

$$V(t, x) = x_1 x_2 \exp[-2\alpha(t - \tau_k)] \quad \text{при} \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}.$$

Как легко проверить, эта функция положительно определена, допускает бесконечно малый высший предел, непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{G}$ и имеет по времени $t$ разрывы первого рода в точках $t = \tau_k$. Будем считать. что она непрерывна слева. Более того,

$$V(\tau_k + 0, x + J_k(x)) = V(\tau_k, x), \tag{7}$$

поэтому $V(t, y(t; t_0, y^0)) \equiv V(t_0, y^0)$ при всех $t \ge t_0$ и является «настоящим» первым интегралом линеаризации (5), сохраняя постоянное значение вдоль любой интегральной кривой линейной системы с импульсным воздействием (5) даже в точках разрыва.

На участке $\tau_k < t \le \tau_{k+1}$

$$\dot{V}\Big|_{(4)}(t, x) = \exp[-2\alpha(t - \tau_k)] \sum_{|s|=3} p_s x_1^{s_1} x_2^{s_2+1} + K.C. = \Phi_0(t, x), \tag{8}$$

где $0 \le s = (s_1, s_2)$ – мультииндекс, $|s| = s_1 + s_2$, $K.C.$ – комплексно сопряженная часть выражения.

Пусть $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ – решение системы (4). Принимая во внимание тождество (7), получим

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_0(t, x(t))\, dt = \\ = V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_0(t, y(t))\, dt + \int_{t_0}^{t} \left[\Phi_0(t, x(t)) - \Phi_0(t, y(t))\right] dt, \quad (9)$$

где $y(t) = y(t; t_0, x^0)$ – решение линеаризации (5). Интеграл от $\Phi_0(t, y(t))$ представим в виде суммы

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_0(t, y(t))\, dt = \int_{t_0}^{\tau_{k_0}} \Phi_0(t, y(t))\, dt + \sum_{k=k_0}^{N} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \Phi_0(t, y(t))\, dt + \int_{\tau_N}^{t} \Phi_0(t, y(t))\, dt. \quad (10)$$

Оценим интеграл от одночлена

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} y_1^{s_1}(t) y_2^{s_2+1}(t) \exp[-2\alpha(t - \tau_k)]\, dt.$$

Ключевую роль здесь играет множитель $\exp[i(k - k_0)\beta\theta]$ в выражении для $y_1(t)$, зависящий от $k$. Легко проверить, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} y_1^{s_1}(t) y_2^{s_2+1}(t) \exp[-2\alpha(t - \tau_k)]\, dt = C \exp[i(k - k_0)(s_1 - s_2 - 1)\beta\theta],$$

где постоянная $C$ не зависит от $k$. Положим $\nu = (s_1 - s_2 - 1)\beta\theta$. Поскольку при $\nu \neq 0$

$$\sup_{N > k_0} \sum_{k=k_0}^{N} \exp[ik\nu] < \infty,$$

то на знак интеграла влияет только одночлен с мультииндексом, удовлетворяющим условию

$$s_1 - s_2 - 1 = 0.$$

Таких в выражении для $\Phi_0(t, y(t))$ только два:

$$p_{21} y_1^2(t) y_2^2(t) \exp[-2\alpha(t - \tau_k)]$$

и сопряженный ему. Представим комплексный коэффициент $p_{21}$ в экспоненциальной форме, $p_{21} = \rho_{21} \exp[i\phi_{21}]$, и получим, что знак интеграла (10) определяется выражением

$$\frac{\exp[2\alpha\theta] - 1}{\alpha} \cos\phi_{21}.$$

Отсюда следует, что характер устойчивости нулевого решения системы (4) не зависит от значений $\alpha \neq 0$, $\beta$ или $\theta > 0$, но определяется исключительно аргументом $\phi_{21}$ комплексного коэффициента $p_{21}$. На основании теорем 1 и 2 заключаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво при $\cos\phi_{21} < 0$ и неустойчиво при $\cos\phi_{21} > 0$.

**5. Заключение.** В статье получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Условия устойчивости формулируются в терминах свойств разрывной по времени функции Ляпунова, которая допускает немонотонное изменение вдоль решения импульсной системы. Таким образом, существенно расширяется класс подходящих функций Ляпунова и облегчается построение таких функций для конкретных систем. В качестве примера получены условия устойчивости в одном критическом случае.


1. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев, Вища школа, 1987. – 288 с.
2. *Lakshmikantham V.* Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov World Scientific, Singapure–New Jersey–London, 1989.
3. *Bainov D. D.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications / D. D Bainov, P. S. Simeonov. – N.-Y., Halsted Press, 1989.
4. *Haddad W. M.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control / W. M. Haddad, V. Chellaboina, S. G. Nersesov // Princeton University Press, Princeton, 2006.
5. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
6. *Борисенко С. Д.* Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях / С. Д. Борисенко, В. И. Косолапов, А. Ю. Оболенский. – К.: Наук. думка, 1988. – 200 с.
7. *Мильман В. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильман,,А. Д. Мышкис // Сиб. матем. журнал. – 1960. – Т. 1, № 2. – С. 233-237.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М.Ляпунов. – Л.-М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
9. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Матем. сборник. – 2003. – Т. 194, № 10. – С. 117-132.
10. *Гладилина Р. И.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем / Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т. 55, № 8. – С. 1035-1043.
11. *Гладилина Р. И.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем / Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т. 55, № 8. – С. 1035-1043.
12. *Gladilina R. I.* On Retention of Impulsive System Stability under Perturbations / R. I. Gladilina, A. O. Ignatyev // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol. 68, No. 8. – P. 1364–1371.
13. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы / А. А. Мартынюк, В. И. Слынько // Прикл. механика. – 2004. – Vol. 40, No. 2. – С. 134-144.
14. *Perestyuk M. O.* Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations / M. O.Perestyuk, O. S. Chernikova // Ukrainian Math. J. – 2008. – Vol. 60, No.1. – P. 91-107.
15. *Ignatyev A. O.* On the asymptotic stability and instability of solutions of systems with impulse effect / A. O. Ignatyev, O. A. Ignatyev, A. A. Soliman // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, No. 4. – P. 516–525.
16. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Сиб. матем. журнал. – 2008. – Т. 49, No. 1. – С. 125–133.

17. *Игнатьев А. О.* О существовании функции Ляпунова в виде квадратичной формы для линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Укр. матем. журнал. – 2010. – Vol. 62, No. 11. – С. 1451–1458.
18. *Анашкин О. В.* Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. - С. 3-8.
19. *Анашкин О. В.* Второй метод Ляпунова в теории устойчивости систем с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – № 2. – С. 9-16.
20. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем / М. М.Хапаев. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
21. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М.Хапаев. – М.: Высшая школа, 1988. – 184 с.
22. *Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. "Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов". – К.: Об-во "Знание". – 1990. – С. 3-4.


**O. V. Anashkin, O. V. Mit'ko**

**On stability in systems with impulse effect.**

The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse effect at fixed times is considered. It is assumed that the system of linear approximation is stable, but does not provide the stability of the complete system. Sufficient conditions for asymptotic stability and instability of the zero solution of nonlinear system are obtained by Lyapunov's direct method. An illustrative example is given.

***Keywords:*** *differential equations with impulse effect, asymptotic stability, instability, Lyapunov's direct method.*

**О. В. Анашкін, О. В. Мітько**

**Про стійкість у системах з імпульсним впливом.**

Розглядається задача про стійкість нульового розв'язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Передбачається, що система лінійного наближення стійка, але не забезпечує стійкості повної системи. На основі прямого методу Ляпунова отримано достатні умови асимптотичної стійкості та нестійкості нульового розв'язку нелінійної системи. Наведено ілюстративний приклад.

***Ключові слова:*** *диференціальні рівняння з імпульсним впливом, асимптотична стійкість, нестійкість, прямий метод Ляпунова.*

*Таврический нац. ун-т им. В.И. Вернадского, Симферополь*
*anashkin@crimea.edu*

*Получено 12.05.11*