УДК 539.3:534.1

©2019. **В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай**

МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НАНОКОМПОЗИТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ УЛЬТРААКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Представлена разработка теоретической численно-аналитической методики получения нечетких оценок для физико-механических параметров экспоненциально-неоднородных по толщине пластин из функционально-градиентных трансверсально-изотропных нанокомпозиционных материалов в процессе проектирования современных конструкций для машиностроительной отрасли, приборостроения и аэрокосмической техники. Методика основана на использовании обладающих разбросами и допускающих нечетко-множественную интерпретацию экспериментальных данных измерения длины сдвиговых нормальных упругих волн с различными частотами из различных мод дисперсионного спектра для рассматриваемой пластины. При получении нечетких оценок физико-механических параметров используются переход к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях связи физико-механических параметров функционально-градиентных трансверсально-изотропных нанокомпозиционных материалов с характеристиками ультразвуковых измерений и модифицированная форма эвристического принципа расширения в теории нечетких вычислений.

Ключевые слова: *функционально-градиентные пластины, трансверсально-изотропные нанокомпозитные материалы, идентификация упругих постоянных, нечеткие оценки, методы ультразвуковой диагностики, скорости сдвиговых волн, неконтрастные экспериментальные данные, нечетко-множественные алгоритмы, эвристический принцип обобщения.*

Введение. Пластинчатые конструкции, создаваемые на базе аддитивных технологий из современных функционально-градиентных анизотропных нанокомпозиционных материалов [1, 2], получают все более широкое распространение в машиностроении, приборостроении, строительстве, аэрокосмических технологиях. Эффективность использования подобных пластинчатых конструкций из непрерывно-неоднородных материалов, в том числе из материалов с экспоненциальным типом неоднородности деформационных свойств и плотности [3–6], во многом зависит от точности идентификации реальных значений их физико-механических параметров с учетом технологических разбросов. При этом одним из возможных перспективных путей определения этих характеристик является разработка теоретических методик, базирующихся на использовании разнотипных экспериментальных данных ультразвуковой диагностики [5–7] неоднородных по толщине трансверсально-изотропных нанокомпозиционных пластин. В этих целях возможно использование экспериментальных данных нечетких замеров длин нормальных упругих волн сдвига [8, 9] и нечетких экспериментальных значений критических частот для различных мод бегущих волн в рассматриваемых пластинах. При разработке моделей использования этих экспериментальных данных с принципиальной точки зрения применимы методы теории вероятностей и стохастического анализа [10, 11] в случае, когда экзогенная информация для таких моделей оценивания носит корректный статистический характер. В случае же менее строгих требований к характеру экзогенной информации для решения рассматриваемой актуальной проблемы в настоящей работе предлагается нечетко-множественная [12 – 18] численно-аналитическая методика формирования оценок неопределенных значений физико-механических параметров. Она основывается на переходе к нечетко-множественным аргументам в получаемых аналитических соотношениях связи физико-механических параметров функционально-градиентных трансверсально-изотропных нанокомпозиционных материалов пластин с характеристиками ультразвуковых измерений частот и длин нормальных упругих волн, и последующем применении модифицированной формы эвристического принципа расширения в теории нечетких вычислений [19 – 23]. Приводится пример реализации разработанной методики.

Соответственно, в рамках представленных целей работы предварительно рассматривается получение аналитического решения задачи о распространении нормальных упругих волн сдвига в функционально-градиентном трансверсально-изотропном деформируемом слое с модулями упругости и плотностью, изменяющимися по экспоненциальному закону вдоль поперечной координаты.

1. Получение расчетных соотношений детерминистической модели. Для получения расчетных соотношений, связывающих длины и критические частоты нормальных волн сдвига в трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое с его физико-механическими и геометрическими характеристиками, рассматривается задача о распространении плоской стационарной нормальной SH-волны с циклической частотой ω и волновым числом k вдоль координатного направления Ox_1 в занимающем область $V = \left\{(x_1, x_2) \in R^2,\ x_3 \in [-h,\ h]\right\}$ трансверсально-изотропном функционально-градиентном упругом слое. Ось анизотропии материала слоя ориентирована вдоль координаты x_3. Граничные поверхности $x_3 = \pm h$ слоя являются свободными.

В рассматриваемом случае векторное поле волновых упругих перемещений характеризуется единственной компонентой $u_2(x_1, x_2, t) = \varphi(x_3)\exp(-i(\omega t - kx_1))$. Определяющие соотношения для ненулевых компонентов тензора напряжений и уравнение волновых движений при сформулированных предположениях имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{21} = c_{66}\exp(\lambda x_3)\ \partial_1 u_2, \qquad \sigma_{23} = c_{44}\exp(\lambda x_3)\ \partial_3 u_2,\\ \partial_1\sigma_{21} + \partial_3\sigma_{23} - \rho\exp(\lambda x_3)\ \partial_t^2 u_2 = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где c_{44}, c_{66} и ρ – соответственно параметры упругости и плотности для трансверсально-изотропного материала слоя; λ – параметр поперечной экспоненциальной неоднородности материала слоя; $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_t = \partial/\partial t$ – операторы частного дифференцирования.

С учетом введенных представлений задача определения $u_2(x_1, x_2, t)$ сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(x_3)$, решение которого имеет вид

$$\varphi(x_3) = d_+ \exp(\gamma_+ x_3) + d_- \exp(\gamma_- x_3), \quad \gamma_\pm = -(\lambda/2) \pm ((\lambda/2)^2 - \beta^2)^{1/2}, \\ \beta^2 = (\rho\omega^2 - c_{66}k^2)/c_{44}, \tag{2}$$

где d_+, d_- – произвольные постоянные коэффициенты. Далее из граничных условий на свободных плоских гранях слоя $(\varphi'(x_3))_{x_3=\pm h} = 0$ следует система однородных алгебраических уравнений относительно постоянных $d_\pm$. Основное дисперсионное соотношение для исследуемых нормальных волн следует из равенства нулю определителя полученной алгебраической системы и первоначально может быть записано в виде

$$\omega = [\varsigma_{66}k_p^2 + \varsigma_{44}(\tau + \Delta_p)]^{1/2}, \qquad \varsigma_{ij} = c_{ij}/\rho, \qquad \tau = \lambda^2/4, \\ \Delta_p = (p\pi/(2h))^2, \tag{3}$$

а затем преобразовано в аналитическое соотношение для параметра δ_p длины нормальной волны из моды дисперсионного спектра с номером p $(p = \overline{0,\infty})$

$$\delta_p = (4\pi^2\varsigma_{66}/(\omega^2 - \varsigma_{44}(\tau + \Delta_p)))^{1/2}. \tag{4}$$

Предполагается, что для бегущих нормальных волн из низшей моды спектра $p = 0$ с двумя частотами ω_1 и ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ в рамках ультраакустических измерений экспериментально могут быть определены параметры их длины δ_{01} и δ_{02} $(\delta_{01} > \delta_{02})$. Для волны с частотой ω_3 из низшей моды спектра $p = 0$ и волны с частотой ω_4 из моды спектра $p = 1$ $(\omega_4 > \omega_3)$ могут быть соответственно экспериментально определены параметры их длины δ_{03} и δ_{14} $(\delta_{14} > \delta_{03})$. Кроме того, может быть экспериментально измерен усредненный приведенный параметр удельной массы пластины m, связанный с параметром плотности ρ в рассматриваемом случае соотношением $\rho = m\lambda/(2sh(\lambda h))$.

При этих гипотезах для параметров ς_{66}, ς_{44} и τ могут быть записаны выражения

$$\begin{gathered} \varsigma_{66} = (\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})), \\ \varsigma_{44} = (\gamma_4 - \gamma_3)/(\Delta_1 - \Delta_0) = \\ = (\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0), \\ \gamma_3 = \omega_3^2 - 4\pi^2\varsigma_{66}\delta_{03}^{-2}, \quad \gamma_4 = \omega_4^2 - 4\pi^2\varsigma_{66}\delta_{14}^{-2}, \\ \tau = \gamma_3\varsigma_{44}^{-1} - \Delta_0 = \\ = (\omega_3^2 - 4\pi^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))\delta_{03}^{-2})/((\omega_4^2 - \omega_3^2 + \\ + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0. \end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, для идентифицируемых параметров λ, ρ, c_{66}, c_{44} получены явные аналитические представления с экзогенными параметрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, m, h$:

$$
\begin{gathered}
\lambda = \Phi_\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = \\
= 2[(\omega_3^2 - 4\pi^2((\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))\delta_{03}^{-2}))/ \\
((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2}, \\[2ex]
\rho = \Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = \\
= 2m[(\omega_3^2 - 4\pi^2((\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))\delta_{03}^{-2}))/ \\
((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2}/ \\
[2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))\delta_{03}^{-2}((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})\cdot \\
\cdot(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}], \\[2ex]
c_{66} = \Phi_{66}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = \\
= (\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))2m[(\omega_3^2 - 4\pi^2((\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))\delta_{03}^{-2}))/ \\
((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2}/ \\
[2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))\delta_{03}^{-2}((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})\cdot \\
\cdot(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}] \\[2ex]
c_{44} = \Phi_{44}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = \\
= [(\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)]\cdot \\
\cdot 2m[(\omega_3^2 - 4\pi^2((\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))\delta_{03}^{-2}))/ \\
((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2}/ \\
[2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))\delta_{03}^{-2}((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2(\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})\cdot \\
\cdot(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(4\pi^2(\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})))/(\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}].
\end{gathered}
\tag{6}
$$

2. Алгоритм получения нечетких оценок для идентифицируемых физико-механических параметров пластины. При получении оценок для идентифицируемых физико-механических параметров пластины используется гипотеза о наличии разбросов экспериментальных значений параметров ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, δ_{01}, δ_{02}, δ_{03}, δ_{14}, m в описанной модели. Предполагается, что указанные неопределенные экзогенные параметры описываются выпуклыми нормальными нечеткими множествами $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_4$, $\tilde{\delta}_{01}$, $\tilde{\delta}_{02}$, $\tilde{\delta}_{03}$, $\tilde{\delta}_{14}$, $\tilde{m}$ с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{\omega}_j}$ $(j = \overline{1,4})$,

$\mu_{\tilde{\delta}_{0j}}$ $(j=\overline{1,3})$, $\mu_{\tilde{\delta}_{14}}$, $\mu_{\tilde{m}}$. Параметр h рассматривается как четко заданная величина. Введенные нечеткие множества могут быть представлены в форме суперпозиций по множествам α-уровня:

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}_j=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\quad (j=\overline{1,4});\quad \tilde{\delta}_{0j}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\quad (j=\overline{1,3});\\ \tilde{\delta}_{14}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}];\quad \tilde{m}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{m}_{\alpha},\,\overline{m}_{\alpha}].\end{gathered}\tag{7}$$

Применение модифицированной α-уровневой формы эвристического принципа расширения [13, 19-23] к четким аналитическим представлениям для идентифицируемых эндогенных параметров рассматриваемой модели λ, ρ, c_{66}, c_{44} позволяет получить их представления в виде нечетких множеств $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{c}_{66}$, $\tilde{c}_{44}$ в виде разложений по множествам α-уровня

$$\begin{gathered}\tilde{\lambda}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\lambda}_{\alpha},\,\overline{\lambda}_{\alpha}],\\
\underline{\lambda}_{\alpha}=\inf_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}}\{\lambda(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\},\\
\overline{\lambda}_{\alpha}=\sup_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}}\{\lambda(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\};\\
\tilde{\rho}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\rho}_{\alpha},\,\overline{\rho}_{\alpha}],\\
\underline{\rho}_{\alpha}=\inf_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}}\{\rho(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\},\\
\overline{\rho}_{\alpha}=\sup_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}}\{\rho(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\};\end{gathered}\tag{8}$$

$$\tilde{c}_{66} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{c}_{66\alpha},\ \overline{c}_{66\alpha}],$$

$$\underline{c}_{66\alpha} = \inf_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}} \{c_{66}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\},$$

$$\overline{c}_{66\alpha} = \sup_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\,\overline{m}_{\alpha}]}} \{c_{66}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\};$$

$$\tilde{c}_{44} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{c}_{44\alpha},\ \overline{c}_{44\alpha}],$$

$$\underline{c}_{44\alpha} = \inf_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}} \{c_{44}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\},$$

$$\overline{c}_{44\alpha} = \sup_{\substack{\omega_j\in[\underline{\omega}_{j\alpha},\,\overline{\omega}_{j\alpha}]\\ \delta_{0j}\in[\underline{\delta}_{0j\alpha},\,\overline{\delta}_{0j\alpha}]\\ \delta_{14}\in[\underline{\delta}_{14\alpha},\,\overline{\delta}_{14\alpha}]\\ m\in[\underline{m}_{\alpha},\overline{m}_{\alpha}]}} \{c_{44}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},m)\}.$$

3. Численная реализация методики. Пример реализации разработанной методики представлен для случая принятия гипотезы об описании разбросов в значениях экзогенных параметров ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, δ_{01}, δ_{02}, δ_{03}, δ_{14}, m нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами [24, 25] $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_4$, $\tilde{\delta}_{01}$, $\tilde{\delta}_{02}$, $\tilde{\delta}_{03}$, $\tilde{\delta}_{14}$, $\tilde{m}$. Учитывается, что для произвольного нормального нечеткого трапецеидального интервала $\tilde{\zeta} =(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)$ может быть записано представление в виде суперпозиции интервалов α-уровня

$$\tilde{\zeta} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\zeta}_{\alpha},\overline{\zeta}_{\alpha}],$$

где $\underline{\zeta}_{\alpha} = (1-\alpha)\zeta_1 + \alpha\zeta_2$, $\quad \overline{\zeta}_{\alpha} = \alpha\zeta_3 + (1-\alpha)\zeta_4$. Также в выражениях (8) можно сократить определенное количество варьируемых параметров, так как для функций

$$\Phi_{\lambda}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},h,m),\quad \Phi_{\rho}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},h,m),$$
$$\Phi_{\rho}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},h,m),\quad \Phi_{\rho}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\delta_{01},\delta_{02},\delta_{03},\delta_{14},h,m)$$

могут быть получены аналитические представления их частных производных по некоторому подмножеству аргументов и установлены свойства знакоопределенности этих производных во всем диапазоне допустимых значений аргументов. Соответственно этому может быть записана модифицированная форма соотношений (8), базирующаяся на соответствующей версии эвристического принципа обобщения. В частности, из расчетных соотношений модели для пластины толщины $h = 1.0$ при нечетко-интервальных экспериментальных данных

$$\tilde{\omega}_1 : (0.49,\ 0.50,\ 0.51,\ 0.53); \quad \tilde{\omega}_2 : (0.98,\ 0.99,\ 1.00,\ 1.03);$$
$$\tilde{\omega}_3 : (1.49,\ 1.50,\ 1.52,\ 1.54); \quad \tilde{\omega}_4 : (1.97,\ 1.99,\ 2.01,\ 2.04);$$
$$\tilde{\delta}_{02} : (8.72,\ 8.84,\ 8.93,\ 9.05); \quad \tilde{\delta}_{03} : (5.74,\ 5.91,\ 5.99,\ 6.15);$$
$$\tilde{\delta}_{14} : (7.02,\ 7.18,\ 7.23,\ 7.45); \quad \tilde{m} : (1.96,\ 1.99,\ 2.03,\ 2.10);$$
$$\tilde{c}_{44} : (2.06c_*,\ 2.29c_*,\ 2.31c_*,\ 2.34c_*), \quad c_* = 10^{10}, \quad \rho_* = 10^3,$$

рассчитываемые по описанной методике функции принадлежности для эндогенных нечетких оценок $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{c}_{66}$, $\tilde{c}_{44}$ приводятся в соответствующих размерностях на рис. 1–4.

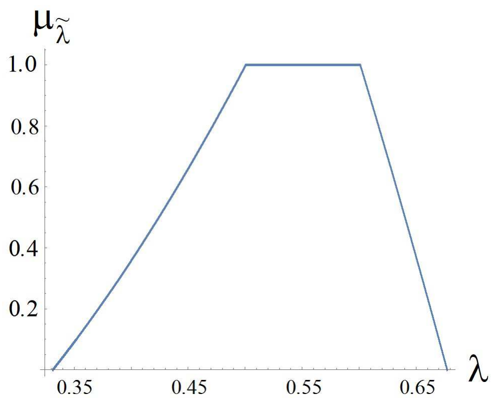

Рис. 1. Функция принадлежности для $\tilde{\lambda}$.

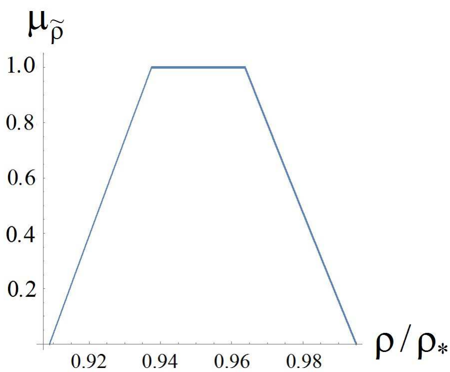

Рис. 2. Функция принадлежности для $\tilde{\rho}$.

Представленные оценки описывают нормированные относительные показатели степени уверенности в том, что физико-механические параметры функционально-градиентных поперечно-изотропных нанокомпозитных материалов с экспоненциальной неоднородностью по толщине пластины будут принимать соответствующие значения с учетом заданных ошибок рассеяния в значениях экзогенных параметров рассматриваемой модели.

Заключение. Результатом представленных исследований является разработка численно-аналитической методики получения оценок для значений физико-механических параметров экспоненциально-неоднородных по толщине пластин из функционально-градиентных трансверсально-изотроп-

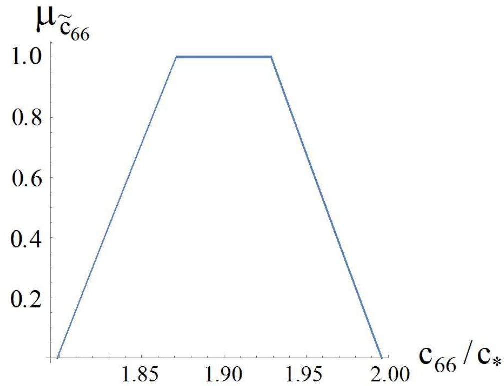

Рис. 3. Функция принадлежности для $\tilde{c}_{66}$.

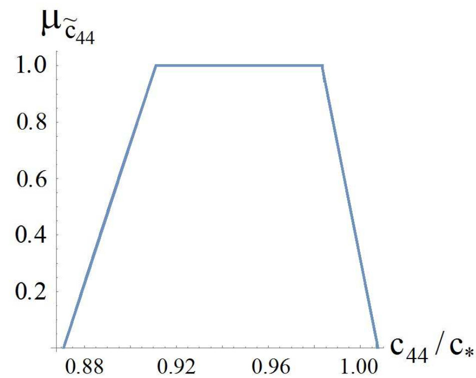

Рис. 4. Функция принадлежности для $\tilde{\rho}$.

ных нанокомпозиционных материалов, предназначенных для использования в машиностроении, приборостроении, строительстве и в аэрокосмических технологиях. Методика основана на использовании полученных методами ультраакустической диагностики неопределенных экспериментальных данных измерения длин сдвиговых нормальных упругих волн с различными частотами из низших мод дисперсионного спектра для рассматриваемой пластины, имеющих нечетко-множественную интерпретацию. Для получения нечетких оценок физико-механических параметров используется переход к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях связи физико-механических параметров функционально-градиентных трансверсально-изотропных нанокомпозиционных материалов с характеристиками ультразвуковых измерений. Применяется также модифицированная форма эвристического принципа обобщения в теории нечетких вычислений. Представлен пример реализации разработанной методики.

1. *FGM: Design, processing and applications* / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
2. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**, N 5. – P. 195–216.
3. *Daniel I.M., Ishai O.* Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 2006. – 411 p.
4. *Fang X.-Q., J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong.* Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves // Mater. Struct. – 2011. – **44**. – P. 67–75.
5. *Yang Y.-H., L.-Z. Wu, X.-Q. Fang.* Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // J. Nondestructive Eval. – 2010. – **29**. – P. 233–240.
6. *Weng G.J.* Effective bulk moduli of two functionally graded composites // Acta Mechanica. – 2003. – **166**. – P. 57–67.
7. *Datta S.K., Sha A.H.* Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series. – Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2008. – 336 p.

8. *Волков А.С., Гребенников В.С.* Об использовании сдвиговых ультразвуковых волн с горизонтальной поляризацией при дефектоскопии изделия // Дефектоскопия. – 1988. – № 5. – С. 94–95.
9. *Алешин Н.П., Вадковский Н.Н., Медведев В.А.* О вводе сдвиговых волн в контролируемое изделие // Дефектоскопия. – 1968. – № 7. – С. 35–40.
10. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
11. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.
12. *Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Изд-во Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
13. *Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНIВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
14. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
15. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
16. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
17. *Kandasamy W. B. V., Smarandache F., Ilanthenral K.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
18. *Sonbol A.H., Fadali M.S.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – **42**. – P. 702–712.
19. *Сторожев В.И., Сторожев С.В.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
20. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое // XVIII Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): Труды конф. в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во Юж. фед. ун-та, 2016. – Т. 2. – С. 200–204.
21. *Storozhev S.V.* Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school “Paradigma” (Summer–2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O.Ja. Kravets. – City place Yelm, State WA, country-region USA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
22. *Storozhev S.V.* Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium // Nonlinear Dynamics. – 2016. Proc. of 5-th International Conference (September 27–30, 2016). – Kharkov: National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», 2016. – P. 509–514.
23. *Vyskub V.G., Mutina E.I., Storozhev S.V., Storozhev V.I.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – **537**. – 022013 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013.
24. *Grzegorzewski P., Mrʃowka E.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – **153**. – P. 115–135.
25. *Ban A.I., Coroianu L.C., Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximation and Aggregation // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – **177**. – P. 45–59.

V.G. Vyskub, D.I. Mutin, S.V. Storozhev, Duong Minh Hai

Model of fuzzy identification of mechanical parameters of nanocomposite functional-gradient plates using ultraacoustic diagnostic data

A description of a theoretical numerical-analytical technique for obtaining fuzzy estimates of the physical-mechanical parameters of plates that are exponentially inhomogeneous in thickness from functionally gradient transversely isotropic nanocomposite materials intended for use in mechanical engineering and aerospace technologies is given. The technique is based on the use of uncertain experimental data of measuring the lengths of normal shear elastic waves with different frequencies for different modes of the dispersion spectrum of the plate under consideration having interpretation in form of fuzzy sets. For obtaining fuzzy estimates of physical-mechanical parameters the transition to fuzzy-multiple arguments in the analytical relationships between the physical-mechanical parameters of functionally gradient transversely isotropic nanocomposite materials and the characteristics of ultrasonic measurements are used. Also a modified form of the heuristic generalization principle in the theory of fuzzy calculations are applies.

Keywords: *functionally gradient plates, transversely isotropic nanocomposite materials, identification of elastic constants, fuzzy estimates, ultraacoustic diagnostic techniques, shear wave velocities, noncontrast experimental data, fuzzy-sets algorithms, heuristic principle of generalization.*

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва;
ФГБНУ "Республ. исслед. научно-консультац. центр экспертизы" МОН РФ, Москва;
ГОУ ВПО "Донбас. национальная акад. строительства и архитектуры", Макеевка;
Центральный научно-исслед. ин-т Военно-морских сил Вьетнама, Хайфон
stvistvi@mail.ru

Получено 11.07.19