УДК 517.95

С. Н. Кружков

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изложены результаты и методы нелокальной теории обобщенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений и гиперболических систем типа законов сохранения. Развивается концепция энтропийных неравенств, позволяющая при соответствующих предположениях доказывать результаты о единственности и устойчивости рассматриваемых решений.

1. **Введение**. Начнем с краткого обсуждения одной знаменательной даты в истории отечественной математики, имеющей непосредственное отношение к теории уравнений с частными производными. В 1837 г. в Московском университете была защищена первая в России докторская диссертация по математике. Положение об ученых степенях было утверждено еще в 1803 г., а в 1835 г. был введен новый Устав университетов в России, согласно которому каждый профессор должен быть доктором наук. И вот в 1837 г. профессор Московского университета Николай Ефимович Зернов успешно защищает диссертацию на тему «Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами», при обосновании актуальности которой во введении отмечается большое прикладное значение рассматриваемых вопросов в связи с задачами теплопроводности, теории колебаний*. В этой диссертации нет больших новых достижений; в основном в ее содержании дано оригинальное изложение классических методов интегрирования уравнений с частными производными того времени. Но ведь наши предшественники — современники и первые продолжатели М. В. Ломоносова и его учеников — просто должны были сначала творчески усвоить, переработать основные доступные им математические достижения человечества и только потом двигаться вперед, одновременно воспитывая молодых способных математиков. Одним из таких замечательных, самоотверженных тружеников в области анализа, особенно в области дифференциальных уравнений с частными производными, был профессор Московского университета Н. Е. Зернов (1804—1862). Он был учителем по чистой математике Пафнутия Львовича Чебышева, который после защиты кандидатской диссертации в Московском университете в 1846 г. переехал в Петербург и создал первую в России математическую школу, среди представителей которой достаточно назвать имена А. М. Ляпунова и А. А. Маркова.

---

* Эта диссертация имеется в научной библиотеке Московского университета.

Обращение к первой математической диссертации в России объясняется ее темой и тем, что бо́льшая ее часть посвящена рассмотрению дифференциальных уравнений первого порядка. Естественно, Н. Е. Зернов рассматривал классические решения этих уравнений. В данной работе речь пойдет об обобщенных решениях, так что работа как бы продолжает диссертацию Н. Е. Зернова, а изучаемые обобщенные решения продолжают во времени классические решения, которые, вообще говоря, существуют лишь в малом даже при аналитических начальных данных.

Как известно, построение классических (локальных) решений уравнений первого порядка основывается на теории характеристик (см., например, [1, 2]). Одним из основных методов построения обобщенных (глобальных) решений является, начиная с «пионерской» работы [3], метод «исчезающей вязкости». Но как в теории классических, так и в теории обобщенных решений различают два основных случая: квазилинейных уравнений и существенно нелинейных. Переходим к рассмотрению задачи Коши — основной задачи для уравнений первого порядка в нелокальной постановке.

2. Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных уравнений и систем гиперболических уравнений первого порядка (в частности, для систем консервативных законов). В качестве основного представителя таких уравнений будет рассматриваться уравнение вида*

$$u_t + (\varphi_i(u))_{x_i} = 0, \quad u = u(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \tag{1}$$

в полосе $\Pi_T = (0, T] \times R^n$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Пусть $A(t, x)$ и $B_i(t, x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Pi_T)$; условимся говорить, что уравнение (неравенство)

$$(A(t, x))_t + (B_i(t, x))_{x_i} = 0 \quad (\leqslant 0)$$

выполняется в смысле теории обобщенных функций (коротко — с. т. о. ф.), если для любой функции $f(t, x) \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Pi_T)$ $(f \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Pi_T),\ f \geqslant 0)$

$$\iint_{\Pi_T} [A(t, x) f_t + B_i(t, x) f_{x_i}]\, dx dt = 0 \quad (\geqslant 0).$$

Законченная теория обобщенных решений (коротко—о. р.) задачи (1), (2) в классе ограниченных измеримых функций в случае гладких функций состояния $\varphi_i(u)$ и $u_0(x) \in L_\infty(R_n)$ построена в [4, 5], причем под о. р. здесь понимается следующее понятие:

Определение 1. Ограниченная измеримая функция $u(t, x)$ называется о. р. задачи (1), (2), если $\forall k \in R^1$ выполняется неравенство

$$|u(t, x) - k|_t + [\mathrm{sing}(u - k)(\varphi_i(u) - \varphi_i(k))]_{x_i} \leqslant 0 \tag{3}$$

в с. т. о. ф. и $\|u(t, x) - u_0(x)\|_{L_1(K_r)} \to 0$ при $t \to +0$ для любого шара $K_r = \{|x| < r\} \subset R^n$, $r = \mathrm{const} > 0$.

Пусть $u(t, x)$ и $v(t, x)$ суть о. р. задачи (1), (2) с начальными функциями $u_0(x)$ и $v_0(x)$ соответственно. В [4] разработана техника «выхода» в пространство удвоенной размерности $2(n+1)$ для рассмотрения $|u(t, x) - v(\tau, y)|$, причем после «возвращения» в исходное пространство с помощью δ-образной последовательности пробных функций с носителями, стягивающимися к биссектральному многообразию $\{t = \tau,\ x = y\}$, здесь выводится неравенство в с. т. о. ф. вида

$$|u(t, x) - v(t, x)|_t + [\mathrm{sign}(u(t, x) - v(t, x))(\varphi_i(x(t, x) - \varphi_i(v(t, x))]_{x_i} \leqslant 0. \tag{4}$$

«Интегрируя» (4) с помощью специального выбора пробных функций по ха-

---

*** Здесь и далее по двум одинаковым индексам в одночленах предполагается суммирование от 1 до *n*.**

рактеристическому конусу $K = \{(t, x) : |x| < r - ct,\ c = \text{const}\}$ (с основанием $S_0 = K_r$ и сечением S_t гиперплоскостью $t = \text{const}$), получаем оценку

$$\|u(t, x) - v(t, x)\|_{L_1(S_t)} \leqslant \|u_0(x) - v_0(x)\|_{L_1(S_0)}. \qquad (5)$$

Обоснование метода «исчезающей вязкости» в [4, 5] проведено с помощью равномерных по ε оценок решений $u^\varepsilon(t, x)$ задачи Коши для уравнения

$$u_t + (\varphi_i(u))_{x_i} = \varepsilon \Delta u, \quad \varepsilon = \text{const} \in (0, 1), \qquad (6)$$

с начальным условием (2) (обеспечивающим компактность в метрике $\mathscr{L}_1$) с учетом единственности вследствие (5) о. р. задачи (1), (2).

В работе Н. Н. Кузнецова [6] показано, что метод получения оценки (5) из [4, 5] применим и для вывода оценки скорости сходимости $u^\varepsilon(t, x)$ к о. р. $u(t, x)$ задачи (1), (2). В предположении существования $u(t, x)$ в [6] установлена оценка вида

$$\|u^\varepsilon(t, x) - u(t, x)\|_{L_1(R^n)} \leqslant \text{const}\, \omega(\sqrt{t\varepsilon}), \qquad (7)$$

если $\|u_0(x + \Delta x) - u_0(x)\|_{L_1(R^n)} \leqslant \omega(|\Delta x|)$, $\omega(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. В дипломной работе А. И. Казмерчуком получены оценки скорости сходимости $\{u^\varepsilon(t, x)\}$ «в себе» по метрике L_1, обобщающие (7), без предположения существования $u(t, x)$, причем этому результату придана форма теоремы теории возмущений операторов. Таким образом, как вопрос единственности и устойчивости о. р. задачи (1), (2), так и вопрос существования можно изучать едиными методами, изложенными в [4, 5].

Предположение о гладкости $\varphi_i(u)$ обеспечивает свойство конечности области зависимости решений от начальных данных в классе ограниченных о. р. Это свойство, конечно, нарушается, если предполагать только непрерывность функций $\varphi_i(u)$. Однако и в этом случае применимы те же методы исследования задачи (1), (2); соответствующие результаты о разрешимости в классе ограниченных суммируемых функций см., например, в [7]. В настоящее время построена теория о. р. задачи (1), (2) только при условии равномерной непрерывности функций $\varphi_i(u)$ в классе локально суммируемых функций в работе Е. Ю. Панова. Следует отметить, что при $n = 1$ все результаты о единственности в случае лишь непрерывных функций $\varphi_i(u)$ доказаны при определенных условиях на их модули непрерывности (например, если $\varphi_i(u) \equiv a_i/u\,|^{\alpha_i}$, $a_i = \text{const} \neq 0$, $\alpha_i = \text{const} > 0$, то для проведения доказательства требуется, чтобы $\alpha_i > (n-1)/n$; до сих пор не ясно, насколько точны эти условия.

Как показано в разд. 7 последнего параграфа [5], сам подход к введению понятия о. р. задачи (1), (2) в скалярном случае непосредственно переносится на случай систем вида (1) (систем консервативных законов), где $u = (u^1, \ldots, u^N) \in R^N$; $\varphi_i(u) = (\varphi_i^1(u), \ldots, \varphi_i^N(u)) \in R^N$, а все переменные u^j в определенном смысле равноправны, что отражается в выборе диффузионного члена $\varepsilon \Delta u$ в соответствующей параболической системе (6) при реализации метода «исчезающей вязкости».

Пусть скалярная функция $\Phi(u)$ такова, что $\forall i = 1, \ldots, n$ и для любых гладких функций $u(t, x)$ выполняется соотношение $(\Phi'(u), (\varphi_i(u))_{x_i}) \equiv \equiv (\Psi_i(u))_{x_i}$; по современной терминологии $\Phi(u)$ — энтропия, а скалярные функции $\Psi_i(u)$ — компоненты вектора потока энтропии $\Psi(u) = (\Psi_1(u), \ldots, \Psi_n(u))$ (заметим, что при $\Phi(u) = u^j$ для любого $i = 1, \ldots, n$ $\Psi_i(u) \equiv \equiv \varphi_i^j(u)$). Очевидно, если $\Phi(u) \in C^2(R^n)$, то она удовлетворяет переопределенной, вообще говоря, системе $\text{rot}_u(\varphi_i'^{*}(u) \cdot \Phi'(u)) = 0$, где $\varphi_i'(u)$ — матрица $\|\varphi_{iu^j}\|$ (эта система не переопределена только при $N = 2$, $n = 1$). В [5] введено следующее понятие о. р. задачи Коши для системы (1):

Определение 2. Ограниченная измеримая вектор-функция $u(t, x)$ называется о. р. задачи (1), (2) в слое Π_T, если для любой энтропийной пары $\{\Phi(u), \Psi(u)\}$ с выпуклой книзу функцией $\Phi(u)$ выполняется неравенство $(\Phi(u))_t + (\Psi_i(u))_{x_i} \leqslant 0$ в с. т. о. ф. и если $\| u^j(t, x) - u_0^j(x)\|_{L_1(K_r)} \to$ $\to 0$ при $t \to +0 \forall r \in R^1$; нетривиальные примеры существования строго выпуклых энтропий см., например, в [8, 9].

Еще в 1965 г. Глимм в работе [10] предложил метод построения глобальных решений задачи (1), (2) для широкого класса гиперболических консервативных законов с помощью оригинальной конечно-разностной аппроксимации этой задачи. Нетрудно проверить, что этот метод (как и ряд других методов построения о. р. задачи (1), (2) разработанных позже) приводит к энтропийно-устойчивым обобщенным решениям в смысле определения 2. Так что проблему существования о. р. задачи (1), (2) можно считать достаточно известной. Основной принципиальной проблемой теории глобальных решений квазилинейных гиперболических систем является, безусловно, проблема единственности о. р. Методика ее исследования, разработанная в [4, 5], позволяет установить следующий результат. Предположим, что для данной системы (1) существует набор энтропийных пар $\{\Phi(u, k), \Psi(u, k)\}$, зависящих от векторного параметра $k = (k^1, \ldots$ $\ldots, k^N) \in R^N$, такой, что при любом k функции $\Phi(u, k) \geqslant 0$ выпуклы книзу, $\Phi(u, u) = 0$, $|\Psi_i(u, k)| \leqslant c_0\Phi(u, k)$, $c_0 = \text{const} \geqslant 0$ и что функции $\Phi(u, k)$ и $\Psi_i(u, k)$ симметричны: $\Phi(u, k) = \Phi(k, u)$, $\Psi_i(u, k) = \Psi_i(k, u)$ (это самое существенное предположение, обеспечивающее возможность дословного повторения скалярной техники). В этом случае метод вывода оценки (5) позволяет получить следующий ее аналог для любых двух решений $u(t, x)$ и $v(t, x)$ задачи (1), (2) с начальными функциями $u_0(x)$ и $v_0(x)$ после предварительного вывода аналога неравенства (4): $(\Phi(u, v))_t + (\Psi_i(u, v))_{x_i} \leqslant 0$

$$\| \Phi(u, v) \|_{L_1(S_t)} \leqslant c \| \Phi(u_0, v_0) \|_{L_1(S_0)} \tag{8}$$

(константа c, характеризующая наклон образующих характеристического конуса K, зависит от c_0 и n).

Приведем пример системы, для которой набор таких энтропийных пар существует. Пусть $n = 1$, $N = 2$, $v \in R^1$, $w \in R^1$, $\varphi(v)$ и $\psi(w) \in C^1(R^1)$

$$v_t + \left[\frac{1}{2}\varphi(v + w) + \frac{1}{2}\psi(v - w)\right]_x = 0,\ u(v, w),\ k = (l, m),$$

$$w_t + \left[\frac{1}{2}\varphi(v + w) - \frac{1}{2}\psi(v - w)\right]_x = 0,\ l \text{ и } m \in R^1.$$

Здесь $\Phi(u, k) \equiv |v + w - l - m| + |v - w - l + m|$,

$$\Psi(u, k) \equiv [\operatorname{sign}(v + w - l - m)]\cdot[\varphi(v + w) - \varphi(l + m)] +$$
$$+ [\operatorname{sign}(v - w - l + m)]\cdot[\varphi(v - w) - \psi(l - m)].$$

Безусловно, представляет большой интерес выделить, описать системы, для которых существуют такие энтропийные наборы.

Оказывается, для единственности и устойчивости достаточно гладких о. р. можно требовать выполнения основного энтропийного неравенства из определения 2 только для одной энтропийной пары со строго выпуклой энтропией $\Phi(u)$ и, конечно, $\Phi(u) \equiv u^j$. О единственности постоянных решений $u(t, x) = U = \text{const}$ стационарных состояний см. в [11, 12]; доказательства здесь — дословное повторение заключительной части вывода оценки (5) из [5]. Попытка установить единственность липшицевых о. р. была предпринята в [13], однако доказательство в [13] представляется недостаточно корректным.

Наконец, заметим, что позже точно такое понятие энтропии для систем вида (1) введено также в работе Фридрихса и Лакса 1971 г. (август) [9], где дважды (в резюме и конце статьи) указано, что это понятие было предложено в работе [5] в 1970 г. (февраль); более того, концепция введения такого понятия на примере скалярного многомерного уравнения подробно изложена в работе [4], появившейся еще летом 1969 г. (см. (6)—(9) в [4]).

Большое теоретическое и прикладное значение имеют исследования по асимптотике о. р. задачи (1), (2) при $t \to +\infty$. Обзор результатов этих исследований, написанный мной совместно с Н. С. Петросян, опубликован в [14].

Ввиду ограниченного объема настоящей работы, к сожалению, нет возможности сколько-нибудь подробно говорить здесь о теории о. р. нелинейных уравнений первого порядка. Отметим лишь, что в 80-е годы интенсивно развивалась теория так называемых вязкостных решений (термин, безусловно, неудачный; см. работы Крэндалла (Grandall), Лионса (Lions) и их сотрудников (основная из них [15]). Весьма знаменательно, что главная принципиальная проблема (единственности) в теории о. р. задачи Коши для таких уравнений решается в [15] с помощью той же идеи «выхода» в пространство удвоенной размерности для рассмотрения $|u(t, x) - v(\tau, y)|$ и последующего «возвращения» в исходное пространство специальным подбором игольчатых пробных функций (лишь множителем отличающихся от δ-образных пробных функций), т. е. с помощью той же идеи, которая «работала» в статьях [4, 5] в квазилинейном случае, что отмечено самими авторами в замечании 2.17 [15].

Недавно автором вместе с сотрудником А. П. Коршиковым построена теория глобальных решений некоторых классов существенно нелинейных уравнений в пространствах разрывных функций (например, сюда включается уравнение вида $u_t \pm uu_x^2 = 0$; в частности, приведен пример ограниченной непрерывной начальной функции $u_0(x) \equiv u(0, x)$, при которой решения задачи Коши для параболического уравнения $u_t - uu_x^2 = \varepsilon u_{xx}$ сходятся при $\varepsilon \to +0$ к соответствующему разрывному о. р. уравнения $u_t - uu_x^2 = 0$). Эти результаты готовятся к печати.

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1964.— 272 с.
2. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными.— М. : МГУ, 1970.— 133 с.
3. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math.— 1950.— 3.— P. 201—230.
4. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР.— 1969.— 187, № 1.— С. 29—32.
5. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб.— 1970.— 81, № 2.— С. 228—255.
6. *Кузнецов Н. Н.* Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейных уравнений первого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1976.— 16, № 6.— С. 1489—1502.
7. *Кружков С. Н., Хильдебрант Ф.* Задача Коши для квазилинейных уравнений первого порядка в случае, когда область зависимости от начальных данных бесконечна // Вестн. МГУ. Сер. мат. и мех.— 1974.— № 1.— С. 93—100.
8. *Годунов С. К.* Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // Успехи мат. наук.— 1962.— 17, № 3.— С. 147—158.
9. *Friedrichs K. O., Lax P. D.* Systems of conservation equation with a convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1971.— 68, N 8.— P. 1686—1688.
10. *Glimm J.* Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Commung Pure Appl. Math.— 1965.— 18, N 4.— P. 697—715.
11. *Быховский Э. Б.* Об энтропийном условии для градиентных систем и о некоторых его следствиях // Вестн. ЛГУ. Сер. мат.— 1984.— № 3.— С. 9—14.
12. *Кружков С. Н.* Развитие понятия обобщенного решения в теории нелинейных уравнений первого порядка // Успехи мат. наук.— 1986.— 41, № 5.— С. 212—214.
13. *Diperna R. J.* Uniqueness of Solutions to Hyperbolic Conservation Laws // Ind. Univ. Math. J.— 1979.— 28, N 1.— P. 137—188.
14. *Кружков С. Н., Петросян Н. С.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // Успехи мат. наук.— 1987.— 42, № 5.— С. 3—40.
15. *Crandall M. G., Lions P. L.* Viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1983.— 277, N 1.— P. 1—42.

Моск. гос. ун-т Получено 28.10.87