УДК 531.38

©2017. М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

В задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром, найдено решение, в котором угловая скорость одного из тел неподвижна в пространстве и коллинеарна моменту количества движения системы тел. Для этого решения получены явные зависимости от времени всех переменных задачи, уравнения подвижных и неподвижных аксоидов. В указанном решении центр шарнира описывает пространственную кривую.

Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, упругий сферический шарнир, подвижные и неподвижные аксоиды тел.*

Постановка рассматриваемой в статье задачи дана в [1]. Ряд ее точных решений на задаваемых инвариантных соотношениях (ИС) и условиях на параметры получен в [1–8].

Данная статья является продолжением работы [8].

1. Исходные соотношения. В качестве уравнений движения по инерции двух гироскопов Лагранжа S, S_0, соединенных сферическим шарниром, как и в [8], выбрана следуюшая система [1]:

$$\dot{G}_1 = \omega_3 G_2 - \omega_2 G_3, \quad \dot{G}_2 = \omega_1 G_3 - \omega_3 G_1, \quad \dot{G}_3 = \omega_2 G_1 - \omega_1 G_2, \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$ – момент количества движения системы тел, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость полуподвижного базиса $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, связанного с телом S;

$$\begin{aligned} G_1 &= (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \\ G_2 &= (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \\ G_3 &= (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta; \end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \Omega_3\mathbf{e}_3^0$ – угловая скорость полуподвижного базиса $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, связанного с телом S_0, который повернут на угол θ относительно $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Величины ω_i и Ω_i связаны соотношениями $(4)_*$, $(5)_*$[1] Угловые скорости тел S и S_0 таковы

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + (\omega_3 + \dot{\varphi})\mathbf{e}_3, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\mathbf{e}_3^0, \tag{4}$$

[1]Номера формул работы [8] снабжены звездочкой.

$\dot\varphi$, $\dot\Phi$ – скорости собственных вращений тел вокруг их осей динамической симметрии $\mathbf{Oe}_3$ и $\mathbf{Oe}_3^0$. Для этой задачи в [1] найдены циклические интегралы

$$J(\omega_3+\dot\varphi)=n, \qquad J_0(\Omega_3+\dot\Phi)=n_0, \tag{5}$$

интеграл постоянства модуля момента количества движения системы тел

$$G_1^2+G_2^2+G_3^2=g^2 \tag{6}$$

и интеграл сохранения энергии системы

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+2\Pi(\theta)=2h. \tag{7}$$

Здесь J, J_0 – осевые моменты тел; $\Pi(\theta)$ – потенциальная энергия упругого элемента, $N=\dfrac{mm_0}{m+m_0}ll_0$, $A=B+\dfrac{mm_0}{m+m_0}l^2$, $A_0=B_0+\dfrac{mm_0}{m+m_0}l_0^2$, B, B_0 – экваториальные моменты; m,m_0 – массы тел S и S_0; l,l_0 – расстояния от точки O (точки пересечения осей $\mathbf{Oe}_3$ и $\mathbf{Oe}_3^0$) до центров масс тел C,C_0.

2. Инвариантное соотношение. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$G_3=0, \tag{8}$$

тогда из (6) следует

$$G_1=g\cos\alpha, \qquad G_2=g\sin\alpha. \tag{9}$$

Подставив эти значения в (1), находим

$$\dot\alpha=-\omega_3, \tag{10}$$

$$g(\omega_2\cos\alpha-\omega_1\sin\alpha)=0. \tag{11}$$

Вариант $g=0$ изучен в монографии [1]. Полагая $g\neq 0$, из (11) находим

$$\omega_1=\sigma\cos\alpha, \qquad \omega_2=\sigma\sin\alpha. \tag{12}$$

Из уравнений $(15)_*-(17)_*$ определим σ, $\dot\alpha,\dot\theta$:

$$\begin{gathered}\sigma\Delta^*=-\big[A_0g\sin\theta\sin\alpha+(A_0\cos\theta-N)n+(A_0-N\cos\theta)n_0\big]\sin\theta,\\ \dot\alpha\Delta^*=-\big[(A_0\cos\theta-N)g\sin\theta\sin\dot\alpha+(A+A_0\cos^2\theta-2N\cos\theta)n+\\ +(A\cos\theta+A_0\cos\theta-N-N(\cos\theta)^2)n_0\big]\sin\alpha,\\ \dot\theta=\frac{\big[g-(A+A_0-2N\cos\theta)\sigma\big]}{(A_0-N\cos\theta)}\cos\alpha,\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\Delta^*=-(AA_0-N^2)\sin^2\theta\sin\alpha.$$

Полученное в [8] уравнение Абеля второго рода $(25)_*$ устанавливает связь между переменными α и θ:

$$\frac{d\chi}{du} = -\frac{[A_0 N g\chi - (A - Nu)A_0 n + (A_0 - Nu)Nn_0]\chi}{(A_0^2 - 2A_0 Nu + N^2)g\chi + (A + A_0 - 2Nu)[(A_0 u - N)n + (A_0 - Nu)n_0]}, \tag{14}$$

где

$$\chi = \sin\theta \sin\alpha, \tag{15}$$

$$u = \cos\theta. \tag{16}$$

Вариант, когда одно из тел закреплено в центре масс ($N = 0$) и циклическая постоянная $n = 0$, уравнение (14) имеет решение $\chi = \text{const}$, изучен в работе [8]. Изучим вариант, когда $N \neq 0$, а обе циклические постоянные равны нулю

$$n = n_0 = 0. \tag{17}$$

При этих условиях угловые скорости движения тел перпендикулярны осям их динамической симметрии. Из (5) следует, что

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = 0, \qquad \Omega_3 + \dot{\Phi} = 0.$$

При условиях (17) уравнение (14) $\dfrac{d\chi}{du} = \dfrac{-A_0 N\chi}{A_0^2 - 2A_0 Nu + N^2}$ имеет решение $\chi(u) = \dfrac{c_*}{A_0}\sqrt{A_0^2 - 2A_0 Nu + N^2}$, которое, вследствие (15), (16), можно записать в виде

$$\sin\alpha = \frac{c_*\sqrt{1 + b^2 - 2bu}}{\sqrt{1 - u^2}}, \tag{18}$$

где $b = \dfrac{N}{A_0}$, c_* – постоянная интегрирования, в дальнейшем будем рассматривать значения параметров $|b| < 1$, $|c_*| < 1$.

Подставив условия (17) и соотношение (18) в (13), находим

$$\sigma = \frac{A_0 g}{AA_0 - N^2},$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\sigma c_*(u - b)\sqrt{1 + b^2 - 2bu}}{1 - u^2}, \tag{19}$$

$$\dot{\theta} = \frac{-\sigma(1 + b^2 - 2bu)\cos\alpha}{1 - bu}. \tag{20}$$

Продифференцировав (16) с учетом (18), (20), имеем

$$\dot{u} = \frac{\sigma(1 + b^2 - 2bu)\sqrt{1 - u^2 - c_*^2(1 + b^2 - 2bu)}}{1 - bu}. \tag{21}$$

Запишем переменные Ω_i, для этого внесем (18), (20) в $(13)_*$, $(14)_*$:

$$\Omega_1(u) = \frac{\sigma b(u-b)}{1-bu}\sqrt{1-\frac{c_*^2(1+b^2-2bu)}{1-u^2}}, \tag{22}$$

$$\Omega_2(u) = \frac{\sigma b c_*\sqrt{1+b^2-2bu}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \Omega_3(u) = \frac{-\sigma c_*(1-bu)\sqrt{1+b^2-2bu}}{1-u^2}. \tag{23}$$

Из интеграла энергии (7) после подстановки в него (12), (22), (23), (16), (18) получим

$$2\Pi(u) = 2h_* + A_0\sigma^2\Big[2(1-bu) + \frac{4(1-b^2)(1-b^2c_*^2)}{1-bu} - \frac{(1-b^2)^2(1-b^2c_*^2)}{(1-bu)^2}\Big],$$

где $2h_*$ – новая постоянная интеграла.

Из уравнения (21) определим связь времени t с u в виде

$$\sigma t = \frac{\gamma}{2} + \operatorname{arctg}\frac{(1+b^2-2b^2c_*^2)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 2bD}{1-b^2}, \tag{24}$$

где

$$\gamma = \arcsin\frac{u-bc_*^2}{D}, \qquad D^2 = (1-c_*^2)(1-b^2c_*^2).$$

После преобразований из (24) получаем

$$\operatorname{tg}(\sigma t+\delta) = \frac{u-b}{\sqrt{1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)}}, \tag{25}$$

а из (18), (25) следует

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-c_*^2}\cos(\sigma t+\delta)}{\sqrt{c_*^2+(1-c_*^2)\cos(\sigma t+\delta)}}; \tag{26}$$

здесь введено обозначение

$$\operatorname{tg}\delta = b\sqrt{\frac{1-c_*^2}{1-b^2c_*^2}}.$$

Из (25) находим зависимость u от t в виде

$$u(t) = b + \frac{\Delta(t)}{b}(1-b^2c_*^2)\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta), \tag{27}$$

где

$$\Delta(t) = \sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)} - \operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta).$$

Теперь можно представить зависимости основных переменных Ω_i в виде явных функций времени:

$$\Omega_1(t) = \frac{\sigma\sqrt{1-c_*^2}\,\mathrm{tg}\,\delta\sin(\sigma t+\delta)\cos(\sigma t+\delta)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}\sqrt{c_*^2+(1-c_*^2)\cos^2(\sigma t+\delta)}}, \tag{28}$$

$$\Omega_2(t) = \frac{bc_*\sigma}{\sqrt{c_*^2+(1-c_*^2)\cos^2(\sigma t+\delta)}}, \tag{29}$$

$$\Omega_3(t) = -c_*\sigma\sqrt{1-b^2c_*^2}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}{c_*^2+(1-c_*^2)\cos^2(\sigma t+\delta)}.$$

Найдем компоненты угловых скоростей (3), (4) тел S и S_0 в неизменно связанных с ними базисах с учетом условий (17):

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \tag{30}$$

$$\omega_3^* = \omega_3 + \dot\varphi = 0, \tag{31}$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi, \tag{32}$$

$$\Omega_3^* = \Omega_3 + \dot\Phi = 0. \tag{33}$$

Из (31), (10) имеем $\dot\varphi - \dot\alpha = 0$, откуда следует

$$\varphi = \alpha. \tag{34}$$

Подставив (34), (12) в (30), получим

$$\omega_1^* = \sigma, \qquad \omega_2^* = 0, \qquad \omega_3^* = 0, \tag{35}$$

т. е. угловая скорость тела S сохраняет направление в теле и в пространстве. Аналогично получаем

$$G_1^* = g, \qquad G_2^* = 0, \qquad G_3^* = 0, \tag{36}$$

т. е. векторы $\mathbf{g}$ и $\boldsymbol{\omega}^*$ коллинеарны. Из (33), (25) имеем

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{c_*\sigma\sqrt{1-b^2c_*^2}\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}{c_*^2+(1-c_*^2)\cos^2(\sigma t+\delta)}, \tag{37}$$

откуда

$$\Phi(t) = c_*\sqrt{1-b^2c_*^2}\int\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}{c_*^2+(1-c_*^2)\cos^2(\sigma t+\delta)}\sigma\,dt\,, \tag{38}$$

очевидно, что $\Phi(t)$ – эллиптическая функция от времени.

Таким образом, величины (35), (36), (32), (28), (29), (38) определяют зависимость основных переменных задачи от времени t в базисах, неизменно связанных с телами S и S_0.

3. Подвижные аксоиды тел. Вначале запишем уравнение подвижного аксоида [1] тела S

$$\boldsymbol{\xi}(\mu,t)=\frac{\mu\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*}+\frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{v}_*}{\omega_*^2},$$

где μ – параметр, $\boldsymbol{\omega}_*$ – угловая скорость тела S, $\mathbf{v}_*$ – скорость центра шарнира O, указываемого вектором $\mathbf{r}_*=C_*O$, C_* – центр масс системы тел. В [1] для $\mathbf{r}_*$ и $\mathbf{v}_*$ получены соотношения

$$\mathbf{r}_*=-a\mathbf{e}_3-a_0\mathbf{e}_3^0,$$
$$\mathbf{v}_*=-a(\omega_2\mathbf{e}_1-\omega_1\mathbf{e}_2)-a_0(\Omega_2\mathbf{e}_1-\Omega_1\mathbf{e}_2^0),$$
$$a=\frac{ml}{m+m_0},\qquad a_0=\frac{m_0l_0}{m+m_0}.$$

Понадобятся представления векторов $\mathbf{r}_*$, $\mathbf{v}_*$ в базисах $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$. Базис $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ повернут на угол θ относительно $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, следовательно,

$$\mathbf{e}_2^0=\mathbf{e}_2\cos\theta+\mathbf{e}_3\sin\theta,\quad \mathbf{e}_3^0=-\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta. \tag{39}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_*=\mathbf{e}_2a_0\sin\theta-\mathbf{e}_3(a+a_0\cos\theta)=-\mathbf{e}_2^0a_0\sin\theta-\mathbf{e}_3^0(a\cos\theta+a_0),\\ \mathbf{v}_*=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{v}_*=v_1\mathbf{e}_1+v_2^0\mathbf{e}_2^0+v_3^0\mathbf{e}_3^0,\end{gathered} \tag{40}$$

здесь

$$v_1=-a\omega_2-a_0\Omega_2,\quad v_2=a\omega_1+a_0\Omega_1\cos\theta,\quad v_3=a_0\Omega_1\sin\theta, \tag{41}$$

$$v_2^0=a\omega_1\cos\theta+a_0\Omega_1,\qquad v_3^0=-a_0\omega_1\sin\theta. \tag{42}$$

Запишем представление вектора $\mathbf{v}_*$ в базисе $\mathbf{Oe}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ с учетом (34)

$$\mathbf{v}_*=v_1^*\mathbf{e}_1^*+v_2^*\mathbf{e}_2^*+v_3^*\mathbf{e}_3,$$

где

$$v_1^*=v_1\cos\alpha+v_2\sin\alpha,\quad v_2^*=-v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha,\quad v_3^*=v_3. \tag{43}$$

Внесем (41) в (43), получим

$$v_1^*=a(-\omega_2\cos\alpha+\omega_1\sin\alpha)-a_0(\Omega_2\cos\alpha+\Omega_1u\sin\alpha),$$
$$v_2^*=a(\omega_2\sin\alpha+\omega_1\cos\alpha)+a_0(\Omega_2\sin\alpha+\Omega_1u\cos\alpha),$$
$$v_3=a_0\Omega_1\sqrt{1-u^2}.$$

Подставим в них (12), (22), (23), (18), находим

$$v_1^*(u)=\frac{-a_0b\sigma c_*}{1-bu}\sqrt{1+b^2-2bu}\sqrt{1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)},$$

$$v_2^*(u) = (a + a_0 b)\sigma - \frac{a_0 b\sigma}{1 - bu}[1 - u^2 - c_*^2(1 + b^2 - 2bu)],$$
$$v_3(u) = \frac{a_0 b\sigma(u - b)}{1 - bu}\sqrt{1 - u^2 - c_*^2(1 + b^2 - 2bu)},$$

которые с учетом (27) принимают вид

$$\begin{gathered} v_1^*(t) = -a_0 c_* \sigma\sqrt{1 - b^2 c_*^2}\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}, \\ v_2^*(t) = (a + a_0 b)\sigma - \frac{a_0\sigma}{b}(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}, \\ v_3(t) = \frac{a_0\sigma}{b}(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}^2\delta\sin(\sigma t + \delta)\cos(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}. \end{gathered} \tag{44}$$

Так как векторы $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ и $\mathbf{v}_*(t)$ определены соотношениями (35), (44), получим компоненты подвижного аксоида тела S в этом базисе:

$$\boldsymbol{\xi}(\mu, t) = \xi_1^*(\mu, t)\mathbf{e}_1^* + \xi_2^*(\mu, t)\mathbf{e}_2^* + \xi_3(\mu, t)\mathbf{e}_3,$$

$$\begin{gathered} \xi_1^* = \mu, \qquad \xi_2^*(t) = \frac{-a_0\operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}, \\ \xi_3(t) = a + a_0 b - \frac{a_0}{b}(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}\ . \end{gathered} \tag{45}$$

Таким образом, соотношениями (45) определен подвижный аксоид тела S. Подвижный аксоид тела S_0 имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \mu\frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{v}_*}{\Omega_*^2}. \tag{46}$$

Представим его в полуподвижном базисе

$$\boldsymbol{\xi}^0(\mu, t) = \xi_1^0(\mu, t)\mathbf{e}_1 + \xi_2^0(\mu, t)\mathbf{e}_2^0 + \xi_3^0(\mu, t)\mathbf{e}_3^0.$$

Внесем (4), (17), (42) в (46) и получим

$$\xi_1^0 = \mu\frac{\Omega_1}{\Omega_*} + \frac{\Omega_2 v_3^0}{\Omega_*^2}, \qquad \xi_2^0 = \mu\frac{\Omega_2}{\Omega_*} - \frac{\Omega_1 v_3^0}{\Omega_*^2}, \qquad \xi_3^0 = a_0 + \frac{a}{\Omega_*^2}(\Omega_1\omega_1 u + \omega_2\Omega_2).$$

Представим v_3^0 и $\Omega_1\omega_1 u + \omega_2\Omega_2$ как явные функции времени, для этого воспользуемся соотношениями (42) и (26) – (29):

$$\begin{gathered} v_3^0 = \frac{-a_0\sigma(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)}{b}\operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t + \delta), \\ \Omega_1\omega_1 u + \omega_2\Omega_2 = b\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{b}(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}. \end{gathered} \tag{47}$$

Отметим, что $\Omega_*^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$, с учетом (28), (29), имеет вид

$$\Omega_*^2(t) = \sigma^2 \frac{b^2 - \operatorname{tg}^2\delta \cos^2(\sigma t + \delta)}{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}. \tag{48}$$

Компоненты подвижного аксоида в полуподвижном базисе таковы:

$$\begin{gathered}
\xi_1^0(\mu, t) = \mu \frac{\Omega_1(t)}{\Omega_*(t)} + \frac{\Omega_2(t) v_3^0(t)}{\Omega_*^2(t)}, \qquad \xi_2^0(\mu, t) = \mu \frac{\Omega_2(t)}{\Omega_*(t)} - \frac{\Omega_1(t) v_3^0(t)}{\Omega_*^2(t)}, \\
\xi_3^0(t) = a_0 + \frac{a}{\Omega_*^2(t)}\Big[b\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{b}(1 - b^2 c_*^2)\Delta(t)\frac{\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t + \delta)}}\Big].
\end{gathered} \tag{49}$$

В неизменно связанном с телом S_0 базисе $\mathbf{O}\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ компоненты векторов $\boldsymbol{\Omega}_*$ и $\boldsymbol{\xi}^0$ имеют вид

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi, \quad \Omega_3^* = 0, \tag{50}$$

$$\xi_1^{0*} = \xi_1^0 \cos\Phi + \xi_2^0 \sin\Phi, \quad \xi_2^{0*} = -\xi_1^0 \sin\Phi + \xi_2^0\cos\Phi, \quad \xi_3^{0*} = \xi_3^0. \tag{51}$$

С учетом (50) соотношения (51) принимают вид

$$\xi_1^{0*}(\mu, t) = \mu\frac{\Omega_1^*(t)}{\Omega_*(t)} + \frac{\Omega_2^*(t) v_3^0(t)}{\Omega_*^2(t)}, \tag{52}$$

$$\xi_2^{0*}(\mu, t) = \mu\frac{\Omega_2^*(t)}{\Omega_*(t)} - \frac{\Omega_1^*(t) v_3^0(t)}{\Omega_*^2(t)} . \tag{53}$$

Соотношениями (52), (53), (49) определены компоненты подвижного аксоида тела S_0 в неизменно связанном с ним базисе. В этих соотношениях величины $\Omega_1^*(t)$, $\Omega_2^*(t)$, $\Omega_*(t)$ и $v_3^0(t)$ определяются функциями (28), (29), (38), (47), (48).

4. Неподвижный базис. Так как вектор $\boldsymbol{\omega}_*$ коллинеарен вектору $\mathbf{g}$, его нельзя использовать для построения неподвижного базиса. Поэтому в алгоритме П.В. Харламова [9] будем использовать векторы $\boldsymbol{\Omega}_*$ и $\mathbf{g}$. Вначале вводим базис $\mathbf{C}_*\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\beta$ соотношениями

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad \mathbf{e}_\rho = \frac{(\mathbf{e}_\nu \times \boldsymbol{\Omega}_*) \times \mathbf{e}_\nu}{\boldsymbol{\Omega}_\rho}, \quad \mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{e}_\nu \times \boldsymbol{\Omega}_*}{\boldsymbol{\Omega}_\rho}.$$

Так как $\boldsymbol{\Omega}_*$ представлен в базисе $\mathbf{O}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, в этом базисе запишем вектор $\mathbf{e}_\nu$, воспользовавшись формулами перехода (39), (8), (9):

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}_1\cos\alpha + \mathbf{e}_2^0 \sin\alpha\cos\theta - \mathbf{e}_3^0\sin\alpha\sin\theta, \tag{54}$$

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{-\mathbf{e}_1 b\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta + \mathbf{e}_2^0\sin\theta(1 - bu\sin^2\alpha) + \mathbf{e}_3^0[u - b + b(1 - u^2\sin^2\alpha)]}{\sqrt{1 - b^2c_*^2}\,\sqrt{1 + b^2 - 2bu}}, \tag{55}$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{e}_1(1-bu)\sin\alpha - \mathbf{e}_2^0(u-b)\cos\alpha + \mathbf{e}_3^0\sin\theta\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2c_*^2}\,\sqrt{1+b^2-2bu}}. \tag{56}$$

Понадобятся компоненты векторов $\mathbf{\Omega}_*$, $\mathbf{v}_*(t)$, $\mathbf{r}_*(t)$ в этом базисе

$$\Omega_\nu = \mathbf{\Omega}_*\cdot\mathbf{e}_\nu, \qquad \Omega_\rho = \mathbf{\Omega}_*\cdot\mathbf{e}_\rho, \tag{57}$$

$$r_\nu = \mathbf{r}_*\cdot\mathbf{e}_\nu, \qquad r_\rho = \mathbf{r}_*\cdot\mathbf{e}_\rho, \qquad r_\beta = \mathbf{r}_*\cdot\mathbf{e}_\beta, \tag{58}$$

$$v_\nu = \mathbf{v}_*\cdot\mathbf{e}_\nu, \qquad v_\rho = \mathbf{v}_*\cdot\mathbf{e}_\rho, \qquad v_\beta = \mathbf{v}_*\cdot\mathbf{e}_\beta. \tag{59}$$

Внесем (22), (23), (54), (55) в (57), получим

$$\Omega_\nu = \frac{b\sigma[u-b+bc_*^2(1+b^2-2bu)]}{1-bu}, \tag{60}$$

$$\Omega_\rho = \frac{b\sigma c_*\sqrt{1-b^2c_*^2}(1+b^2-2bu)}{1-bu}, \tag{61}$$

а подставив в них (27), находим $\Omega_\nu(t)$, $\Omega_\rho(t)$ в виде

$$\Omega_\nu(t) = \sigma\frac{\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta) + b^2c_*^2\Delta(t)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}, \quad \Omega_\rho(t) = \sigma\frac{bc_*\sqrt{1-b^2c_*^2}\Delta(t)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}.$$

Базис $\mathbf{C}_*\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\beta$ вращается вокруг вектора $\mathbf{e}_\nu$ с угловой скоростью $\dot\beta$, которая определяется по формуле $\dot\beta\Omega_\rho^2 = \mathbf{e}_\nu\cdot(\mathbf{\Omega}_*\times\dot{\mathbf{\Omega}}_*)$. Продифференцируем $\Omega_1^*(t)$, $\Omega_2^*(t)$, учтем (37), получим $\dot\beta\Omega_\rho^2 = \Omega_2(\dot\Omega_1 - \Omega_2\Omega_3)\sin\alpha\sin\theta$, откуда

$$\dot\beta = \frac{(1-b^2)\sigma}{1-bu}. \tag{62}$$

Внесем (27) в (62), получим

$$\dot\beta = \sigma + \frac{\sigma\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}},$$

откуда

$$\beta(t) = \sigma t - \arcsin(\operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t+\delta)).$$

После преобразований находим

$$\begin{aligned}\sin\beta &= -\operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t+\delta)\cos\sigma t + \sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}\sin\sigma t,\\ \cos\beta &= \operatorname{tg}\delta\cos(\sigma t+\delta)\sin\sigma t + \sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}\cos\sigma t.\end{aligned} \tag{63}$$

Неподвижный базис $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ таков:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_\nu, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\rho\cos\beta - \mathbf{e}_\beta\sin\beta, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\rho\sin\beta + \mathbf{e}_\beta\cos\beta, \tag{64}$$

где $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{E}_2\cos\beta - \mathbf{E}_3\sin\beta$, $\mathbf{e}_\beta = \mathbf{E}_2\sin\beta + \mathbf{E}_3\cos\beta$. Угловая скорость тела S_0 в неподвижном базисе представима в виде

$$\mathbf{\Omega}_* = \Omega_\nu\mathbf{E}_1 + \Omega_\rho\cos\beta\mathbf{E}_2 + \Omega_\rho\sin\beta\mathbf{E}_3. \tag{65}$$

Запишем вектор $\mathbf{r}_*$ в базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ с учетом формулы (39):

$$\mathbf{r}_* = -\mathbf{e}_2^0 a_0 \sin\theta - \mathbf{e}_3^0(a\cos\theta + a_0). \tag{66}$$

Подставив (66), (40), (54) – (56) в (58), (59), находим

$$\begin{gathered}
r_\nu = a_0 c_* \sqrt{1+b^2-2bu},\\
r_\rho = \frac{-(ab+a_0)\sqrt{1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)}}{\sqrt{1-b^2c_*^2}\sqrt{1+b^2-2bu}},\\
r_\beta = \frac{-a(1-bu)-a_0[u-b+bc_*^2(1+b^2-2bu)]}{(1-b^2c_*^2)\Delta};
\end{gathered} \tag{67}$$

$$\begin{gathered}
v_\beta = \frac{a_0 b\sigma(1-b^2)[1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)]}{\sqrt{1-b^2c_*^2}\sqrt{1+b^2-2bu}(1-bu)},\\
v_\nu = \frac{-a_0 b\sigma c_*\sqrt{1+b^2-2bu}\sqrt{1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)}u^2}{1-u^2},\\
v_\rho = \frac{a_0 b\sigma\sqrt{1-u^2-c_*^2(1+b^2-2bu)}[-2b+(1+b^2)u+bc_*^2(1+b^2-2bu)]}{\sqrt{1-b^2c_*^2}\sqrt{1+b^2-2bu}(1-bu)}.
\end{gathered} \tag{68}$$

Согласно (64), компоненты вектора $\mathbf{r}_*$ в неподвижном базисе имеют вид

$$X = r_\nu, \quad Y = r_\rho\cos\beta - r_\beta\sin\beta, \quad Z = r_\rho\sin\beta + r_\beta\cos\beta. \tag{69}$$

Подставив (27) в (67), внесем их в (69) и получим уравнения

$$\begin{gathered}
X(t) = a_0 c_*\sqrt{1-b^2c_*^2}\Delta(t),\\
Y(t) = -\big(a+\frac{a_0}{b}\big)\cos\sigma t + \frac{a_0}{b}(1-b^2c_*^2)\Delta(t)\cos\beta(t),\\
Z(t) = -\big(a+\frac{a_0}{b}\big)\sin\sigma t + \frac{a_0}{b}(1-b^2c_*^2)\Delta(t)\sin\beta(t),
\end{gathered} \tag{70}$$

которые представляют собой параметрические уравнения точки O. Впервые в этой задаче точка O движется по пространственной кривой, это движение обеспечивается потенциальной энергией упругого элемента.

Так как $\mathbf{v}_* = \dot{\mathbf{r}}_*$, то $\mathbf{v}_* = \dot{X}(t)\mathbf{E}_1 + \dot{Y}(t)\mathbf{E}_2 + \dot{Z}(t)\mathbf{E}_3$,

$$v_1(t) = \dot{X}(t), \quad v_2(t) = \dot{Y}(t), \quad v_3(t) = \dot{Z}(t). \tag{71}$$

5. Неподвижные аксоиды. Неподвижный аксоид тела S имеет вид [1]

$$\boldsymbol{\zeta}(\mu,t) = \mathbf{r}_*(t) + \frac{\mu\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{v}_*}{\omega_*^2}.$$

Векторы $\mathbf{r}_*(t)$, $\boldsymbol{\omega}_*$ в неподвижном пространстве заданы соотношениями (35), (70), а компоненты вектора $\mathbf{v}_*(t)$ – (71), поэтому можем записать

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\zeta}(\mu,t)=\mathbf{r}_*(t)+\mu\mathbf{E}_1-\frac{v_3}{\sigma}\mathbf{E}_2+\frac{v_3}{\sigma}\mathbf{E}_3,\\ \zeta_1(\mu,t)=\mu+X(t),\quad \zeta_2(\mu,t)=Y(t)-\frac{v_3}{\sigma},\quad \zeta_3(\mu,t)=Z(t)+\frac{v_3}{\sigma}.\end{gathered}\tag{72}$$

Уравнениями (72) задан неподвижный аксоид тела S. В своем движении подвижный аксоид (45) тела S катится по неподвижному аксоиду (72). Это движение сопровождается скольжением вдоль общей образующей аксоидов со скоростью $V_c=\dfrac{\boldsymbol{\omega}_*\mathbf{v}_*}{\omega_*}$, которая, с учетом (35), (71), такова: $V_c=v_\nu(t)=\dot X(t)$.

Неподвижный аксоид тела S_0 записывается аналогично:

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,t)=\mathbf{r}_*(t)+\frac{\mu\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\mathbf{v}_*}{\Omega_*^2}.\tag{73}$$

Его представление в неподвижном базисе

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,t)=\zeta_1^0(\mu,t)\mathbf{E}_1+\zeta_2^0(\mu,t)\mathbf{E}_2+\zeta_3^0(\mu,t)\mathbf{E}_3$$

получим, подставив (70), (71), (65) в (73):

$$\zeta_1^0(\mu,t)=X(t)+\mu\frac{\Omega_\nu(t)}{\Omega_*(t)}\cos\beta(t)+\frac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*^2(t)}[\dot Z(t)\cos\beta(t)-\dot Y(t)\sin\beta(t)],$$

$$\zeta_2^0(\mu,t)=Y(t)+\mu\frac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*(t)}\cos\beta(t)+\frac{1}{\Omega_*^2(t)}[-\Omega_\nu(t)\dot Z(t)+\Omega_\rho(t)\dot X(t)\sin\beta(t)],$$

$$\zeta_3^0(\mu,t)=Z(t)+\mu\frac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*(t)}\sin\beta(t)+\frac{1}{\Omega_*^2(t)}[\Omega_\nu(t)\dot Y(t)-\Omega_\rho(t)\dot X(t)\cos\beta(t)].$$

В результате подстановки (70), (71) находим

$$\begin{gathered}\zeta_1^0(\mu,t)=\mu\frac{\Omega_\nu(t)}{\Omega_*(t)}-\frac{abc_*\sqrt{1-b^2c_*^2}\Delta(t)}{b^2-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}\left[1-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)\right],\\ \zeta_2^0(\mu,t)=\mu\frac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*(t)}\cos\beta(t)+\frac{a(1-b^2c_*^2)\Delta(t)\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta)\cos\sigma t}{b^2-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)},\\ \zeta_3^0(\mu,t)=\mu\frac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*(t)}\sin\beta(t)+\frac{a(1-b^2c_*^2)\Delta(t)\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta)\sin\sigma t}{b^2-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)},\end{gathered}\tag{74}$$

где $\dfrac{\Omega_\nu(t)}{\Omega_*(t)}=\dfrac{\operatorname{tg}\delta\sin(\sigma t+\delta)+b^2c_*^2\Delta(t)}{\sqrt{b^2-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}$, $\dfrac{\Omega_\rho(t)}{\Omega_*(t)}=\dfrac{bc_*\sqrt{1-b^2c_*^2}\Delta(t)}{\sqrt{b^2-\operatorname{tg}^2\delta\cos^2(\sigma t+\delta)}}$; $\cos\beta(t),\sin\beta(t)$ определены соотношениями (63).

Вычислим скорость скольжения подвижного аксоида тела S_0 по неподвижному $V_C^0=\dfrac{\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{v}_*}{\Omega_*}$, которая, вследствие (60), (61), (68), (27), такова:

$$V_C^0 = \frac{abc_* \sqrt{1 - b^2 c_*^2} \Delta(t) \operatorname{tg} \delta \cos(\sigma t + \delta)}{\sqrt{b^2 - \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2(\sigma t + \delta)}}. \tag{75}$$

При движении тела S_0 его подвижный аксоид (52), (53), (49) катится по неподвижному аксоиду (74), это движение сопровождается скольжением со скоростью (75).

Таким образом, угловая скорость тела S описывает цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна вектору $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1^*$, а направляющей является пространственная кривая (70).

1. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Решение уравнения Абеля на инвариантном соотношении специального вида // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 58–62.
3. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 41–50.
4. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. науч. тр. НГУ. – 2007. – Вып. 29. – С. 120–129.
5. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение уравнения Абеля для случая, когда одно из тел закреплено в центре масс // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2006. – Вып. 4. – С. 80–91.
6. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – Вып. 5. – С. 32–42.
7. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение уравнений движения системы двух гироскопов Лагранжа при одном условии, связывающем циклические постоянные // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – Вып. 5. – С.42–64.
8. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела. – См. статью в наст. сб. – С. 55–65.
9. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 502–507.

M.E. Lesina, Ya.V. Zinovjeva

A particular solution of the problem of the inertial motion of two Lagrange gyroscopes

In the problem of inertial motion of two Lagrange gyroscopes connected by a spherical hinge, a solution is found in which the angular velocity of one of the bodies is stationary in space and collinear with the momentum of the system of bodies. For this solution, explicit dependences on the time of all the variables of the problem, the equations of moving and fixed axoids are obtained. In this solution, the hinge center describes a spatial curve.

Keywords: *Lagrange gyroscopes system, elastic spherical hinge, movable and immovable axoids of bodies.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный техн. ун-т"
zinovjevayana@gmail.com

Получено 09.10.17