УДК 517.95

Н. М. Бокало

О ЗАДАЧЕ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследован вопрос о единственности решения задачи без начальных условий для общих полулинейных параболических уравнений второго порядка, заданных в нецилиндрических областях. Получены классы единственности решений рассматриваемой задачи в зависимости от коэффициентов уравнения и геометрии области.

Задача без начальных условий для параболических уравнений возникает при описании различных нестационарных процессов в природе, например теплопроводности или диффузии, в момент, достаточно удаленный от начального, когда влияние начальных условий практически не сказывается на прохождении процесса. Эта задача изучалась в работах А. Н. Тихонова, О. А. Олейника, С. Д. Ивасишена и других авторов (см., например, [2, 3, 5—7]). В данной статье исследуется вопрос о единственности решения задачи без начальных условий для общих полулинейных параболических уравнений второго порядка.

Пусть область $Q \subset R^{n+1}_{x,t}$ лежит в полупространстве $\{t < T\}$, где $T \leqslant \leqslant +\infty$, и такая, что для всех $\tau < T$ множества $\Omega_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$ непустые и ограниченные. Предполагается, что гиперповерхность $\Sigma = \partial Q \cap \cap \{t < T\}$ гладкая и ни в какой ее точке касательная плоскость не ортогональна оси t.

Введем пространство

$$V^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \{w(x, t) \mid w, w_{x_i} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ \ i = 1, \dots, n\}.$$

Рассматривается задача

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + c(x, t, u) = f \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$u = h \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

где функции $a^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $b^i_{x_i}(x, t)$ измеримые и ограниченные на любом ограниченном подмножестве области Q; $a^{ij}\eta_i\eta_j \geqslant 0$ для произвольных $\eta \in R^n$; функция $c(x, t, s)$ измерима по (x, t) для всех $s \in R^1$, непрерывна по $s \in R^1$ для почти всех (x, t) и $c(x, t, v(x, t)) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ для любой $v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$; $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$; $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma})$.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $u(x, t)$ из пространства $V^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, которая удовлетворяет условию (2) и интегральному тождеству

$$\iint_Q \left\{ -u\psi_t + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_j} \psi_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_j} \psi + c(x, t, u)\psi - f\psi \right\} dxdt = 0 \tag{3}$$

для любой $\psi \in C^\infty_0(Q)$.

Пусть $\lambda(t)$ — измеримая и ограниченная на каждом конечном промежутке полуоси $(-\infty, T)$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$\lambda(t) \leqslant \inf_{0 \neq v \in \overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega_t)} \left(\int_{\Omega_t} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i} v^2 \right) dx \right) \left(\int_{\Omega_t} v^2 dx \right)^{-1}. \tag{4}$$

Определение 2. Интервал $(a, b), -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, назовем элементом множества $\mathscr{D}$, если функция

$$g^*_{a,b}(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega_t\ a < s_1 < s_2 < b} \frac{c(x, t, s_2) - c(x, t, s_1)}{s_2 - s_1}$$

определена для почти всех $t \in (-\infty, T)$ и принадлежит пространству $L^1_{\mathrm{loc}}((-\infty, T])$.

Лемма 1. Любой подынтервал интервала множества $\mathscr{D}$ также принадлежит множеству $\mathscr{D}$. Если два интервала множества $\mathscr{D}$ пересекаются, то их объединение и пересечение тоже принадлежат множеству $\mathscr{D}$.

Положим $g_{a,b}(t) = \lambda(t) + g^*_{a,b}(t)$. В дальнейшем для удобства будем считать, что в случае $T < +\infty$ функция $g_{a,b}(t)$ доопределена вне интервала $(-\infty, T)$ нулем.

Лемма 2. Если $(c, d) \subset (a, b)$, где $(a, b) \in \mathscr{D}$, то $g_{c,d}(t) \geqslant g_{a,b}(t)$.

Определение 3. Интервал $(a, b) \in \mathscr{D}$ назовем элементом множества $\mathscr{D}_0$, если

$$\int_{-\infty}^{0} g_{a,b}(s)\, ds = +\infty.$$

Из лемм 1 и 2, в частности, вытекает, что любой подынтервал интервала из множества $\mathcal{D}_0$ тоже принадлежит множеству $\mathcal{D}_0$.

Определение 4. Интервал $(a, b) \in \mathcal{D}$ назовем элементом множества $\mathcal{D}_1$, если любой его строго внутренний подынтервал принадлежит множеству $\mathcal{D}_0$.

Легко видеть, что $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$.

Для любого интервала $(a, b) \in \mathcal{D}$ обозначим

$$E(a, b) = \{v \mid \exists (c_v, d_v) \in \mathcal{D},\ (c_v, d_v) \supset (a, b), \exists t_v:$$

$$c_v \leqslant v \leqslant d_v \text{ п. в. на } Q,$$

$$a \leqslant v \leqslant b \text{ п. в. на } Q_{t_v},$$

$$\|v\|_{L^2(\Omega_t)} = o(1) \exp\left(\int_t^0 g_{a,b}(s)\, ds\right) \text{ при } t \to -\infty\},$$

$$E^{(0)}(a, b) = \{v \mid \exists (c_v, d_v) \in \mathcal{D},\ (c_v, d_v) \supset (a, b), \exists t_v:$$

$$c_v \leqslant v \leqslant d_v \text{ п. в. на } Q,$$

$$a \leqslant v \leqslant b \text{ п. в. на } Q_{t_v}\},$$

$$E^{(1)}(a, b) = \{v \mid \exists (c_v, d_v) \in \mathcal{D},\ (c_v, d_v) \supset (a, b):$$

$$c_v \leqslant v \leqslant d_v \text{ п. в. на } Q,$$

$$a < \operatorname{ess} \varliminf_{t \to -\infty} \inf_{x \in \Omega_t} v,\ \operatorname{ess} \varlimsup_{t \to -\infty} \sup_{x \in \Omega_t} v < b\}.$$

Здесь через v, (c_v, d_v), t_v обозначены соответственно измеримая на Q функция, интервал и число, меньшее или равное T, а $Q_{t_v} = Q \cap \{t < t_v\}$.

Имеет место следующая теорема о единственности решения задачи (1), (2).

Теорема 1. Пусть u_1, u_2—обобщенные решения задачи (1), (2), принадлежащие для некоторого $(a, b) \in \mathcal{D}$ классу $E(a, b)$. Тогда $u_1 = u_2$ почти всюду на Q.

Доказательство этой теоремы проводится следующим образом. Предположим, что u_1, u_2 различны на множестве положительной меры. Поскольку u_1, u_2 принадлежат классу $E(a, b)$, то существуют соответственно интервалы $(c_{u_i}, d_{u_i}) \in \mathcal{D}$ и числа $t_{u_i} \leqslant T$ такие, что $c_{u_i} \leqslant u_i \leqslant d_{u_i}$ п. в. на Q и $a \leqslant u_i \leqslant b$ п. в. на $Q_{t_{u_i}}$, $i = 1, 2$, а для разности $w = u_1 - u_2$ имеет место следующая асимптотика:

$$\int_{\Omega_t} w^2(x, t)\, dx = o(1) \exp\left(2 \int_t^0 g_{a,b}(s)\, ds\right) \text{ при } t \to -\infty. \tag{5}$$

Пусть $(c, d) = (c_{u_1}, d_{u_1}) \cup (c_{u_2}, d_{u_2})$, $t_0 = \min\{t_{u_1}, t_{u_2}\}$. Из (3), (4), учитывая леммы 1 и 2, выводим неравенство

$$\int_{\Omega_{t_1}} w^2(x, t_1)\, dx \geqslant \exp\left(2 \int_{t_1}^{t_2} g(s)\, ds\right) \int_{\Omega_{t_2}} w^2(x, t_2)\, dx, \tag{6}$$

где $t_1 < t_2 < T$ — произвольные числа, $g(t) = g_{c,d}(t)$ при $t > t_0$ и $g(t) = g_{a,b}(t)$ при $t \leqslant t_0$. Из неравенства (6) и различия u_1, u_2 на множестве положительной меры вытекает, что при некоторых $\hat{t}$, t_3, $\hat{t} \leqslant t_3 < T$, существует постоянная $c(\hat{t}, t_3) > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega} w^2(x, t) dx \geqslant c(\hat{t}, t_3) \exp\left(2 \int_t^0 g_{a,b}(s)\, ds\right)$$

при любых $t < \hat{t}$. Но это противоречит (5). Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Заметим, что если конечный интервал (a, b) является элементом множества $\mathcal{D}_0$, то классы $E\ (a, b)$ и $E^{(0)}\ (a, b)$ совпадают. Учитывая это, из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть u_1, u_2 — обобщенные решения задачи (1), (2), принадлежащие для некоторого $(a, b) \in \mathcal{D}_1$ классу $E^{(1)}\ (a, b)$. Тогда $u_1 = u_2$ почти всюду на Q.

Теоремы 1 и 2 дают способ нахождения классов единственности решений конкретных задач типа (1), (2). Он состоит в следующем: 1) выбираем функцию $\lambda(t)$, удовлетворяющую неравенству (4) (чем ближе ее значения к правой части неравенства (4), тем лучше); 2) находим множества $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ (см. определения 2 — 4); 3) для интервалов (a, b) из $\mathcal{D}$ определяем классы функций $E(a, b)$, для конечных интервалов (p, q) из $\mathcal{D}_0$ — классы функций $E^{(0)}(p, q)$, а для интервалов (k, l) из $\mathcal{D}_1$ — классы функций $E^{(1)}(k, l)$ и выбираем среди них наиболее широкие (это и будут искомые классы единственности данной задачи).

Продемонстрируем этот способ на следующем примере. Рассмотрим задачу (1), (2) в случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$u_t - \Delta u - |u|^m u = f, \tag{7}$$

где $m > 0$, а область Q цилиндрическая, $Q = \Omega \times (\infty, T)$. В данном случае, как легко видеть, $\lambda(t) = \lambda_1$, где λ_1 — первое собственное число задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в области Ω, $\mathcal{D} = \{(a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$, $\mathcal{D}_0 = \{(p, q) \mid -\gamma_0 < p < q < \gamma_0\}$, $\mathcal{D}_1 = \{(k, l) \mid -\gamma_0 \leqslant k < l \leqslant \gamma_0\}$, где $\gamma_0 = (m+1)^{-\frac{1}{m}} \lambda_1^{\frac{1}{m}}$.

Определив соответствующие классы $E\ (a, b)$, $E^{(0)}\ (p, q)$, $E^{(1)}\ (k, l)$ и проведя их анализ, получаем обобщенное решение задачи (7), (2), единственное в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{ess} \varlimsup_{t \to -\infty} \sup_{x \in \Omega_t} |u(x, t)| < (m+1)^{-\frac{1}{m}} \lambda_1^{\frac{1}{m}}. \tag{8}$$

Полученный результат в определенном смысле точный. Действительно, в случае $f = 0$, $h = 0$ и $\Omega = (-l_1, l_1)$ задача (7), (2) имеет классическое решение $u\ (x, t) = w\ (x)$, где $w\ (x)$ определяется равенством

$$\int_w^\mu \frac{d\eta}{\sqrt{\mu^{m+2} - \eta^{m+2}}} = \sqrt{\frac{2}{m+2}}\,|x|,$$

где $\mu = c(m) \lambda_1^{\frac{1}{m}}$, $c(m) > 0$, — постоянная, зависящая только от m.

Легко видеть, что

$$\varlimsup_{t \to -\infty} \sup_{x \in \Omega_t} |w(x)| = \mu = c(m) \lambda_1^{\frac{1}{m}}. \tag{9}$$

Следовательно, для обеспечения единственности решения данной задачи необходимы условия на его поведение при $t \to -\infty$ более жесткие, чем просто ограниченность. Сравнивая правые части (8) и (9), убеждаемся, что условие (8) в определенном смысле точное.

Теперь сделаем следующее замечание. Сформулированные выше результаты можно использовать и тогда, когда при фиксированной линейной части уравнения (1) требуется найти условия на функцию $c\ (x, t, u)$, которые бы обеспечивали единственность решения задачи (1), (2) из наперед заданного класса. Такая ситуация может возникнуть, если, например, какой-то управляемый нестационарный процесс описывается уравнением вида (1), причем управление задается изменением параметров, от которых зависит вид функции $c(x, t, u)$, и нужно подобрать параметры так, чтобы этот процесс по истечении достаточно длительного промежутка времени практически не зависел от начальных условий. При этом на решение уравнения математической модели данного процесса налагаются определенные ограничения, вытекающие из физического смысла задачи.

Проиллюстрируем сказанное выше на следующем примере. Пусть $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, где Ω — ограниченная область в R^n_x, $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$. Рассмотрим задачу

$$u_t - \Delta u = g(u) \text{ в } Q, \tag{10}$$

$$u = h \text{ на } \Sigma, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ на } Q, \tag{11}$$

где $g(s) \in C(R^1)$, $g(s) = 0$ при $s \leqslant 0$, $g(s) = 0$ при $s \geqslant 1$.

Уравнение (10), как известно ([14]), является уравнением Колмогорова — Петровского — Пискунова, описывающим, в частности, концентрацию особей биологической популяции, откуда и берутся ограничения на значения его решения. Естественно возникает вопрос об условиях на $g(s)$, обеспечивающих единственность решения задачи (10), (11). Ответ на него вытекает из теоремы 1 и замечания после нее.

Теорема 3. Если выполнено условие

$$\sup_{0<s_1<s_2<1} \frac{g(s_2) - g(s_1)}{s_2 - s_1} < \lambda_1, \tag{12}$$

то задача (10), (11) имеет не более одного обобщенного решения.

Здесь λ_1 — первое собственное число задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в области Ω.

Полученный результат нельзя улучшить. Покажем это. Пусть $g(s) = \lambda_1 s$ на $[0, \gamma]$ и $g(s) = g_1(s)$ на $[\gamma, 1]$, где γ какое угодно малое положительное число: $g_1(s) \in C^1([\gamma, 1])$, $g_1'(s) \leqslant \lambda_1$. Очевидно, для указанной $g(s)$ левая часть неравенства (12) равна λ_1 и, если $\Omega = (0, l)$, $l > 0$, $h = 0$, то задача (10), (11) имеет бесконечно много решений вида

$$u_\beta(x, t) = \beta \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right),$$

где β — произвольное, $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Заметим, что в данном случае $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$.

В заключение отметим следующее. В данной работе нас интересовал вопрос о единственности решения задачи без начальных условий для уравнений вида (1), на коэффициенты которых налагаются очень слабые ограничения. Но ясно, что для некоторых конкретных уравнений вида (1) возможны лучшие результаты, чем это дают теоремы 1 и 2. Укажем здесь один из таких случаев.

Пусть Q — произвольная область из $R^{n+1}_{x,t}$, лежащая в полупространстве $\{t < T\}$, где $T \leqslant +\infty$, и такая, что гиперповерхность $\Sigma = \partial Q \cap \cap \{t < T\}$ кусочно-гладкая.

Рассматривается задача

$$u_t - \Delta u + |u|^m u = f \text{ в } Q, \tag{13}$$

$$u = h \text{ на } \Sigma, \tag{14}$$

где $m > 0$, $f \in L^1_{\text{loc}}(Q)$, $h \in C(\Sigma)$.

Обобщенным решением задачи (13), (14) назовем непрерывную на $Q \cup \Sigma$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условию (14) и уравнению (13) в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$.

Теорема 4. Решение задачи (13), (14) единственно.

Заметим, что для единственности на поведение решения задачи (13), (14) при $x \to +\infty$, $t \to -\infty$ не требуется никаких условий. Распространение этого результата на более общие уравнения дано в работе [1].

1. *Бокало Н. М.* О единственности решения задачи без начальных условий для нелиней. ных параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 5.— С. 163—164.
2. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 5.— С. 547—552.
3. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972. — 588 с.
4. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенное с возрастанием количества веществ, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Секция мат. и мех.— 1937.— № 6.— С. 1—26.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1976.— **31**, № 6.— С. 142—166.
6. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы типа Лиувилля для общих параболических систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его приложения.— 1974.— **8**, № 4.— С. 59—70.
7. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнений теплопроводности // Мат. сб.— 1935.— **42**, № 2.— С. 199—216.

Львов. гос. ун-т им. Ив. Франко

Получено 29.09.87