УДК 517.9

К. Н. Солтанов

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе изучается следующий вопрос: можно ли определить множества из образа заданного множества из области определения непрерывного оператора исходя из локальных свойств оператора.

Пусть X, Y — локально выпуклые хаусдорфовы векторные топологические пространства (ЛВП), а $f(\cdot): \mathcal{D}(f)\, X \to Y$ — некоторое непрерывное нелинейное отображение (т. е. $f(\cdot) \in C^0$).

Рассматриваются вопросы: при каких условиях заданное множество $M \subset Y$ содержится в образе $f(\Omega)$ некоторого множества $\Omega < \mathcal{D}(f) \subseteq X$ и можно ли определить множество M из $f(\Omega)$ исходя из локальных свойств отображения $f(\cdot)$ при достаточно общих условиях на $f(\cdot)$ из класса C^0 (в частности, вопрос разрешимости для уравнений $f(x) = y$)[1].

Как известно, вопросу разрешимости уравнений вида $f(x) = y$ посвящено достаточно много работ (см., например, [1—3] и литературу в них). Настоящая работа является продолжением [1].

1. Из результатов работы [1] непосредственно вытекает, что имеет место следующий результат, который является некоторой переформулировкой одного из основных результатов [1].

Предположим, что выполняется условие:

(A) отображение $f(\cdot)$ подмножества $\Omega \subset \mathcal{D}(f)$ с непустой внутренностью в X преобразует множество $f(\Omega)$ с непустой внутренностью в пространстве Y.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (A). Тогда, если существует отображение $g(\cdot): \mathcal{D}(g) \subseteq X \to Y^*$, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$, такое, что $g(\Omega)$ является допустимым множеством [1] в Y^*, причем существует элемент $x_0 \in \Omega$, такой, что образ каждой окрестности $\mathcal{U}(x_0)$ из Ω содержит границу некоторой замкнутой поглощающей окрестности нуля в Y^* при отображении $(g\cdot)$, то существует подмножество Ω_1 из Ω, такое, что $g(\Omega_1)$ — допустимое множество в Y^* и множество

$$M \equiv \{y \in Y \mid \langle y, g(x)\rangle \leqslant \langle f(x), g(x)\rangle, \quad \forall x \in \Omega_1'\} \tag{1}$$

содержится в образе $f(\Omega)$, т. е. $M \subseteq f(\Omega)$ (здесь $\Omega_1' \subseteq \Omega$ и $g(\Omega_1')$ — граница некоторой замкнутой поглащающей окрестности нуля Y^*).

Замечание 1. Чаще всего в примерах нелинейных краевых задач пространства X и Y являются банаховыми и имеет место условие: существует функционал $c(\cdot) \geqslant 0$, такой, что $c(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$, $c(\lambda(x - x_0)) \nearrow +\infty$ при $|\lambda| \nearrow +\infty$ и относительно $x_0 \in \Omega$ выполняется одно из неравенств:

$$\langle f(x) - f(x_0),\ g(x)\rangle \geqslant c(x - x_0)^2 \tag{2}$$

или

$$\| f(x) - f(x_0) \|_Y \geqslant c(x - x_0).^3 \tag{3}$$

[1] Ясно, что условие непрерывности отображения $f(\cdot)$ недостаточно для изучения разрешимости уравнения $f(x) = y$, $y \in Y$.

[2] Неравенство (2), вообще говоря, не является условием типа условия коэрцитивности даже в обобщенном смысле (см. [4]).

[3] В неравенствах (2) и (3) функционалы $c(\cdot)$, вообще говоря, различны.

Следует заметить также, что условия (2) и (3) являются эквивалентными при условии 1 теоремы 1.

Замечание 2. Ясно, что если Y — ЛВП, то из телесности образа $f(\Omega)$ некоторого множества $\Omega \subset \mathcal{D}(f) \subseteq X$ вытекает, что существует выпуклое тело, содержащееся в $f(\Omega)$, причем такие множества можно определить в виде (1). При этом, если имеет место (2) или (3), можно использовать функционалы из этих неравенств.

2. Пусть X и Y — банаховы пространства. Поскольку теорема 1 основной вопрос приводит к вопросу телесности непустоты внутренности образа, нам следует исследовать этот вопрос. Вначале рассмотрим непрерывные отображения, действующие в банаховых пространствах.

Теорема 2. Пусть отображение $f(\cdot): \mathcal{D}(f) \subseteq X \to Y$ из класса C^0 и в некоторой окрестности $U(x_0)$ заданного элемента $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ существует отображение $f^{x_0}(\cdot) \equiv f_0(\cdot)$, действующее из X в Y из класса C^0, такое, что выполняется следующие условия:

а) $f_0(U(x_0))$ — телесное множество в Y, причем для некоторой окрестности $V(x_0) \subseteq U(x_0)$ имеет место равенство

$$f_0(V(x_0)) \equiv B_r^Y(f_0(x_0));$$

б) $f_0(x_0) \equiv f(x_0)$;

в) существует непрерывная функция $c(\cdot) \geqslant 0$, такая, что для любых $x_1, x_2 \in U(x_0)$ имеет место неравенство

$$\| f(x_1) - f(x_2) - f_0(x_1) + f_0(x_2) \|_Y \leqslant$$
$$\leqslant c(\| f_0(x_1) - f_0(x_2) \|_Y) \leqslant \delta \| f_0(x_1) - f_0(x_2) \|_Y \tag{4}$$

(здесь $\delta \in (0, 1)$ — некоторое число);

г) каждой сходящейся последовательности $\{y_\alpha \mid \alpha \in I \subset R^1\}$ из образа $f_0(V(x_0)) \equiv B_r^V(f(x_0))$ соответствует некоторая сходящаяся последовательность из прообраза $f_0^{-1}(B_r^Y(f(x_0)))$, определенная в виде $x_\alpha \in f_0^{-1}(y_\alpha) \cap V(x_0)$.

Тогда для всякого $r_1 < (1 - \delta) r$ шар $B_{r_1}^Y(f(x_0))$ содержится в образе $f(U(x_0))$, т. е. $B_{r_1}^Y(f(x_0)) \subseteq f(V(x_0))$.

Замечание 3. Если, в частности, отображение $f_0(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию (по крайней мере, в окрестности заданной точки x_0), то существует постоянная $L(x_0) > 0$, такая, что

$$\| f_0(x_1) - f_0(x_2) \|_Y \geqslant L(x_0) \| x_1 - x_2 \|_X$$

для любых $x_1, x_2 \in U(x_0)$, то в теореме условие г) можно опустить. А если в окрестности $U_\varepsilon(x) \subset \mathcal{D}(f)$ отображение $f(\cdot)$ из класса C^1 и $f'_{x_0}(\cdot) \in C^0$, $f'_{r_0}(x_0) \neq 0$, то вместо отображения $f_0(\cdot)$ можно брать линейное отображение $f'_{x_0}(x_0)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

При этом, если $f'_{x_0}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица (локально), за $f_0(\cdot)$ можно брать $f'_{x_0}(x_0)$ без дополнительного условия на $\varepsilon > 0$.

Для доказательства теоремы 2 используется метод последовательных приближений. При этом последовательность приближений строится в виде соотношений
$y_{m-1} = f_0(x'_m) - f_0(x'_{m-1})$; $y_m = f_0(x'_m) - f(x'_m) + f(x'_{m-1})$, где $x'_0 = x_0$; $y_0 = y$.

Нетрудно видеть, что теорема 2 является локальной теоремой разрешимости. Используя эту теорему, можно привести и глобальную теорему разрешимости.

Предположим, что выполняются условия:

1) отображение $f(\cdot): \mathcal{D}(f) \subseteq X \to Y$ на некотором множестве $\Omega \subset \subset \mathcal{D}(f)$ телесно в пространстве X из класса C^0;

2) существует семейство отображений $\{f_x(\cdot) \mid x \in \Omega' \subseteq \Omega\}$, действующих из X в Y, каждое из которых в некоторой окрестности соответствую-

щего элемента x из Ω' удовлетворяет условиям теоремы 2 относительно данного отображения $f(\cdot)$ $(\overline{\Omega'} \supseteq \Omega)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1), 2). Тогда, если существует отображение $g(\cdot): \mathcal{D}(g) \subseteq X \to Y^*$, $\Omega \subseteq \mathcal{D}(g)$, такое, что $g(\Omega)$ является поглощающей окрестностью нуля в Y^* и относительно некоторого элемента $x_0 \in \Omega$, имеет место условие 2 из теоремы 1, то существует подмножество Ω_0 множества Ω такое, что $g(\Omega_0)$ является допустимым множеством из Y^* и справедливо:

(i) $f(\Omega_0)$ — телесное множество (т. е. с непустой внутренностью);

(ii) множество

$$M_0 \equiv \{y \in Y \mid \langle y, g(x)\rangle \leqslant \langle f(x), g(x)\rangle, \quad \forall x \in \Omega_0'\} \tag{5}$$

содержится в образе $f(\Omega)$, т. е. $M_0 \subseteq f(\Omega)$. (Здесь $\Omega_0' \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega$ — подмножество из $\mathcal{D}(f)$, соответствующее границе поглощающей окрестности нуля из Y^*, т. е. $g(\Omega_0') = \partial\,[g(\Omega_0)]_0^1$, см. [1].)

Замечание 4. Если дополнительно выполняется условие 3) (см. ниже), то при построении множества M_0 из [4] можно использовать функционал $c_0(\cdot)$ из этого условия:

3) существует непрерывный функционал $c_0(\cdot) \geqslant 0$, такой, что для любого $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\langle f(x) - f(x_0),\ g(x)\rangle \geqslant c_0(x - x_0)^2.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах и теоремах 1 и 2.

Лемма 1. Пусть отображение $f(\cdot)$, действующее из ЛВП X в ЛВП Y, на некотором множестве $\Omega \subset \mathcal{D}(f)$ удовлетворяет неравенству

$$\langle f(x) - f(x_0),\ g(x)\rangle > 0, \quad x_0 \in \mathcal{D}(f),$$

а отображение $g(\cdot): \mathcal{D}(g) \subseteq X \to Y^*$ такое, что $g(\Omega)$ является границей поглощающей окрестности нуля в пространстве Y^*.

Тогда образ $f(\Omega_2)$ всякого множества $\Omega_2 \subset \mathcal{D}(f)$, $\Omega \subseteq \Omega_2$, порождает всюду плотное аффинное подпространство пространства Y.

Лемма 2. Пусть Y^* сепарабельно и выполняются условия 1) и 2) теоремы 3, причем отображение $g(\cdot)$ является обратным к непрерывному отображению, действующему из Y^* в X, и $g(\Omega)$ содержит абсолютно выпуклую замкнутую окрестность нуля в Y^*.

Тогда, если выполняется условие 3) замечания 4, то существует подмножество Ω_1 из Ω такое, что $g(\Omega_1)$ — абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля в Y^* и $f(\Omega_1)$ содержит всюду плотное в некотором телесном множестве подмножество.

Замечание 5. В примерах в основном исследуются дифференциальные операторы, для которых соответствующие пространства являются сепарабельными. Следовательно, теорема 3 применяется с условиями леммы 2, т. е. в предположении, что Y^* сепарабельно и $g(\Omega) \equiv B_{r_0}^{Y^*}(0) \subset Y^*$.

Следствие 1. Если условия теоремы 3 выполняются относительно всего $\mathcal{D}(f) = X$, то множество M_0, определенное в (5), может совпадать с максимально выпуклым телом из области значения отображения $f(\cdot)$. Если дополнительно выполняется условие 3), причем функционал $c_0(\cdot)$ такой, что $c(\lambda(x - x_0))/\|g(\lambda x)_x\| \nearrow +\infty$ при $|\lambda| \nearrow +\infty$ для любого $x \in S_1^X(0)$, то область значения отображения $f(\cdot)$ совпадает со всем пространством Y, т. е. $f(X) = Y$.

3. Пусть теперь X, Y — ЛВП, а $f(\cdot): \mathcal{D}(f) \subseteq X \to Y$ — некоторое непрерывное отображение (в частности, X и Y — банаховы пространства со слабой топологией или $f(\cdot)$—деминепрерывное, т. е. непрерывно из сильной топологии X в слабую топологию Y). Чтобы ответить на поставленный воп-

[1] Достаточно предполагать, что $y(\Omega_0') \equiv S_{r_0}^{Y^*}(0)$ (сфера из Y^*).

[2] О роли условия 3) см. также следствие 1.

рос, в этом случае доказываются теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3 из п. 1.

Пусть $K_0^* \subset Y^*$ — абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество из Y^*. Обозначим через K_r биполяру [5] множества, определенного в виде

$$K_r \equiv \{y \in Y \mid \langle y, y^* \rangle \leqslant r, \ y^* \in K_0^*\},$$

а через $K_r(y_0)$ — его сдвиг в $Y: K_r(y_0) = K_r + y_0$. Как известно, в случае банаховых пространств Y множество $K_r(y_0)$ топологически эквивалентно шару $B_r^Y(y_0)$ и в случае ЛВП вместо шаров можно использовать эти множества, т. е. биполяры.

Теорема 4. Пусть выполняются условия а), б), г) теоремы 2, в которых шары заменены множествами $K_r(f(x_0))$, а также существует непрерывная функция $c_1(\cdot) \geqslant 0$, такая, что для любых $x_1, x_2 \in U(x_0)$ имеет место неравенство

$$\sup \langle f(x_1) - f(x_2) - f_0(x_1) + f_0(x_2), y^* \rangle \leqslant c_1(\sup \langle f_0(x_1) - f_0(x_2), y^* \rangle) \leqslant$$
$$\leqslant \delta \sup \langle f_0(x_1) - f_0(x_2), y^* \rangle. \tag{6}$$

Тогда для всякого $r_1: 0 \leqslant r_1 \leqslant (1-\delta) r$ абсолютно выпуклая окрестность $K_{r_1}(f(x_0))$ содержится в образе $f(U(x_0))$, т. е. $K_{r_1}(f(x_0)) \subseteq f(V(x_0))$.

Замечание 6. Точно так же, заменяя соответствующие условия в формулировке теоремы 3, получаем теорему, аналогичную теореме 3 и относящуюся к случаю ЛВП. Для краткости эту теорему приводить не будем, поскольку из формулировки локального результата (теорема 4) нетрудно видеть, как формулируется глобальный результат. В дальнейшем будем ссылаться на это замечание как на глобальный результат.

Заметим еще, что если пространство Y является банаховым, а отображение $f(\cdot)$ — деминепрерывным, то в теореме 4 и теореме с глобальной разрешимости вместо множества $K_r(f(x_0))$ можно брать замкнутые шары в соответствующих пространствах, где эти множества встречаются.

4. Приведем примеры нелинейных краевых задач, разрешимость которых доказывается непосредственным применением приведенных выше общих теорем.

1) Пусть $G \subset R^n$ $(n \geqslant 1)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂G. В G рассматривается задача

$$f(u) \equiv \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \mathcal{D}_k u) \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j u + b(x, u, \mathcal{D}_k u) = h(x), \\ u|_{\partial G} = \varphi(x'), \ x' \in \partial G. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что $h(x) \in L_{p_1}(G)$, $\varphi(x') \in W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial G)$, оператор $f(\cdot)$, порожденный задачей (7), действует из пространства $W_p^2(G)$ в $L_{p_1}(G) \times W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial G)$ $(p \geqslant 1)$ и выполняются следующие условия:

1) $a_{ij}(x, \xi, \eta_k)$ и $b(x, \xi, \eta_k)$ — функции Каратеодори в $G \times R^{n+1}$;

2) существует непрерывный функционал $c_1(\cdot) \geqslant 0$, $c(0) = 0$, такой, что $c_1(\lambda u) \nearrow +\infty$ при $|\lambda| \nearrow +\infty$ и для любой функции $u(x) \in C^1$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \mathcal{D}_k u) \eta_i \eta_j \geqslant c_1(u) |\eta|^2, \quad \forall \eta \in R^n;$$

3) каждый элемент $u_0(x)$ из всюду плотного подмножества Ω_1 из шара $B_r^{W_p^2}(0) \subset W_p^2(G)$ обладает окрестностью $U_\varepsilon(u_0)$, в которой

(а) существует такое отображение $f_{u_0}(\cdot)$, порожденное задачей вида (7) с гладкими функциями $a_{ij}^{u^0}(x, \xi, \eta_k)$, $b^{u^0}(x, \xi, \eta_k)$, что обратное отображение $f_{u_0}^{-1}(\cdot)$ является полунепрерывным[1];

(б) существует функция $\varkappa^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u)$ из $L^\infty(G)$ такая, что

$$\|\varkappa^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u) - \varkappa^{u_0}(x, v, \mathcal{D}_k v)\|_{L^\infty} \leqslant \delta(u_0)\|u - v\|^{\alpha}_{W_p^2}, u, v \in U_\varepsilon(u_0),$$

$$a_{ij}(x, u, \mathcal{D}_k u) \equiv a_{ij}^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u) + \varkappa^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u)\ a_{ij}^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u)^2,$$

$$\varkappa^{u_0}(x, u_0, \mathcal{D}_k u_0) = 0,\ \|\varkappa^{u_0}(x, u, \mathcal{D}_k u)\|_{L^\infty} < \delta < 1,\ \delta(u_0) \ll 1,\ \alpha > 0.$$

Теорема 5. Предположим, что все условия этого примера выполняются. Тогда существуют подмножество $\Omega_0 \subset B_r^{W_2^p}(0) \subset W_2^p(G)$ и отображение $g(\cdot)$ такие, что $g(\Omega_0) \equiv S_{r_1}^{L_p}(0)$ и для любого $h \equiv \{h(x), \varphi(x')\} \in L_{p_1}(G) \times W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial G)$, удовлетворяющего неравенству $\langle h, g(u)\rangle \leqslant \langle f(u), g(u)\rangle$ для любого $u \in \Omega_0$, уравнение (7) разрешимо в пространстве $W_p^2(G)$.

А если условия теоремы выполняются относительно всего пространства $W_p^2(G)$, то задача (7) разрешима для любого $h \equiv \{h(x), \varphi(x')\} \in L_{p_1}(G) \times W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial G)$ в пространстве $W_p^2(G)$.

Для доказательства этой теоремы используется теорема 3. При этом, как показывает следующий результат, выполняется также условие 3) замечания 4, который показывает также существование отображения $g(\cdot)$ (выполнение остальных условий теоремы 3 очевидно).

Лемма 3. Пусть выполняются условия 1) и 2) теоремы 5. Тогда существует отображение $g(\cdot): W_p^2(G) \cap \overset{0}{W}{}_p^1(G) \to L_{p_1}(G)$ такое, что для любого $u(x) \in B_r^W(0) \subset W_p^2(G) \cap \overset{0}{W}{}_p^1(G)$ имеет место неравенство

$$\langle f(u_0 + u) - f(u_0),\quad g(u_0 + u)\rangle \geqslant \tilde{c}(u),\quad u_0(x) \in \mathcal{D}(f),$$

где $\tilde{c}(\cdot) \geqslant 0$ — непрерывный функционал, определенный по функционалу $c_1(\cdot)$ из условия 2), а $u_0(x) \in W_p^2(G) \cap \overset{0}{W}{}_p^1(G)$ — некоторый элемент. (Здесь предполагается, что в задаче (7) имеет место $u|_{\partial G} = \varphi(x') \equiv 0$.)

2. В ограниченной области $G \subset R^3$ с достаточно гладкой границей ∂G рассматривается задача (см. [6])

$$-\mu_0 \Delta u - \operatorname{div}(\varphi(Bu) Bu) + \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{D}_i u + \operatorname{grad} p = h(x),\quad \operatorname{div} u = 0, \tag{8}$$

$$u|_{\partial G} = 0,\quad G \subset R^3,$$

где

$$B_{ik} u \equiv \mathcal{D}_i u_k + \mathcal{D}_k u_i,\ i, k = 1, 2, 3;\ \varphi(Bu) \equiv \varphi_0\Big(\sum_{i,k=1}^{3} (B_{ik} u)^2\Big).$$

Пусть $\varphi_0 \in C^0$ и каждый элемент $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G) \cap \{u(x) \mid \operatorname{div} u = 0\} \equiv V$ обладает окрестностью $U_\varepsilon(u_0)$ такой, что существует $\mu_1 \equiv \mu_1(u_0) \geqslant 0$, удовлетворяющее соотношениям

$$|\varphi(\tau) - \varphi(s)| \leqslant \mu_1(u_0)|\tau - s|,\quad \mu_1(u_0) \leqslant \frac{1}{2}\mu_0 - \varepsilon\ (\tau = Bu,\ s = Bv),$$

для всех $u(x), v(x) \in U_\varepsilon(u_0)$, $\varepsilon > 0$.

---

[1] В частности, если функции $a_{ij}^{u_0}(x, \xi, \eta_k)$, $b^{u_0}(x, \xi, \eta_k)$ такие, что отображение f_{u_0} является гомеоморфизмом (см., например, [2, 3]), то условие 3 (а) заведомо выполняется.

[2] Предполагается, что функции $b(x, \xi, \eta_k)$ удовлетворяют условиям такого же типа.

Обозначим через $f(\cdot)$ отображение, порожденное задачей (8) и действующее из V в V^* — сопряженное пространство к V.

Теорема 6. Предположим, что все условия этого примера выполняются на пространстве V, тогда задача (8) разрешима для любого $h(x)$ пространства V^*, $p(x) \in L_2(G)$.

Для доказательства используется глобальная теорема разрешимости, аналогичная теореме 3 (см. замечание 6 и теорему 4). При этом для всякого элемента $u_0 \in V$ за отображения $f_{u_0}(\cdot)$ можно брать отображение, определенное выражением

$$-\mu_0 \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i \mathcal{D}_i u + \operatorname{grad} p - \operatorname{div}(\varphi(Bu_0)\, Bu_0)$$

и действующее из V в V^*.

Замечание 7. Если функция φ_0 является возрастающей, т. е. имеет некоторый рост, то к задаче (8) снова может быть применена вышеупомянутая теорема. Однако в этом случае выбор отображения $f_{u_0}(\cdot)$ и окрестности $U_\varepsilon(u_0)$ для каждой точки непосредственно связан со структурой функции $f_0(\cdot)$ в окрестности данной точки.

1. *Солтанов К. Н.* О нелинейных отображениях и разрешимости нелинейных уравнений // Докл. АН СССР.— 1986.— 289, № 6.— С. 1318—1323.
2. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М. : Мир, 1977.— 289 с.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М. : ИЛ, 1957.— 168 с.
4. *Солтанов К. Н.* О разрешимости некоторых нелинейных эволюционных задач // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1985.— **6**, № 4.— С. 18—22.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Изд-во иностр. лит., 1967.— 280 с.
6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М. : Наука, 1971.— 204 с.

Ин-т математики и механики АН АзССР,
Баку

Получено 28.10.87