

УДК 531.38; 531.39

©2020. А.В. Мазнев

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ

Рассмотрены кинематические свойства регулярных прецессий твердого тела с неподвижной точкой, которые обусловлены характером резонансных движений главных осей инерции. Получены кривые пересечения главной оси и сферы Пуассона при условиях равенства скоростей прецессии и собственного вращения и резонансах 1:2 и 2:1 этих параметров.

Ключевые слова: *регулярные прецессии, главные оси инерции, резонансы скоростей прецессии и собственного вращения.*

Введение. Прецессии твердого тела с неподвижной точкой в различных силовых полях относятся к тем программным движениям, которые наиболее полно изучены в динамике твердого тела [1–8]. Регулярные прецессии тела характеризуются наглядными свойствами движения и находят широкое применение в приложениях, например, в теории гироскопических систем [4].

В обзорной монографии [5] показано, что регулярные прецессии тела имеют место не только в классических задачах динамики (задачах о движении тяжелого твердого тела и о движении тела в идеальной несжимаемой жидкости), но и в обобщенных задачах (задаче о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил, задаче о движении тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, в задаче о движении системы связанных твердых тел). Анализ свойств прецессий твердого тела проводится, в основном, в “прецессионной” системе координат.

В задачах кинематического истолкования движения твердого тела с неподвижной точкой применяются различные методы изучения свойств движения. Наиболее эффективным оказался метод Пуансо представления движения тела качением без скольжения подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному аксоиду в сочетании с уравнениями П.В. Харламова [9] для неподвижного годографа. К настоящему времени с помощью такого подхода изучены движения во многих решениях уравнений динамики твердого тела (см. обзоры [10, 11]). В классическом решении Л. Эйлера в задаче о движении свободного твердого тела, кроме метода Пуансо, применялись и другие методы исследования свойств движения тела. Особенно подробно это решение представлено в монографиях К. Магнуса [12] и Э. Рауса [13]. В частности, в них представлены исследования движений главных осей инерции твердого тела в неподвижном пространстве.

Развитие комплексного подхода в истолковании движения тела с неподвижной точкой отражено в статье [14]. Согласно результатам [14], особый интерес представляет исследование движения характерных осей, связанных с твердым телом (например, барицентрических осей, главных осей инерции).

В статье [15] рассмотрено движение главной оси инерции в неподвижном пространстве в решении Д.Н. Горячева, в статье [16] – оси динамической симметрии твердого тела под действием потенциальных сил для случая трех инвариантных соотношений [17] уравнений движения тела.

В [8] предложен общий метод изучения движения главных осей инерции для прецессий твердого тела относительно вертикали. Некоторые случаи прецессии тела рассмотрены в статье [18]. Однако в ней изучены, в основном, аналитические свойства прецессий.

Данная статья посвящена исследованию геометрических свойств движения главных осей инерции в неподвижном пространстве в случае резонансных регулярных прецессий тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прецессионные движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Обозначим через $Oxyz$ подвижную систему координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$; O – неподвижная точка тела. Полагаем, что $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий ось симметрии силовых полей, в которых движется тело. Для векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеет место уравнение Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где точка над вектором $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t . Движение тела называется прецессией относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$, если в течение всего времени постоянен угол между осями l_1 и l_2 , проходящими через неподвижную точку, из которых l_1 неизменно связана с телом, а ось l_2 – неподвижна в пространстве и направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$. Пусть \mathbf{a} – единичный вектор оси l_1 ; тогда прецессии тела можно описать инвариантными соотношениями [6]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi_1(t)\mathbf{a} + \varphi_2(t)\boldsymbol{\nu}. \quad (2)$$

Здесь $a_0 = \cos \theta_0$ ($\theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})$), $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – дифференцируемые функции времени t . Отметим, что в общем случае вместо вектора $\boldsymbol{\nu}$ можно рассматривать вектор $\boldsymbol{\gamma}$ ($\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{0}$), тогда прецессию тела называют прецессией относительно “наклонной оси» (такой прецессией является прецессия Д. Гриоли [2]). В динамике гиростата с неподвижной точкой найдены многочисленные классы решений уравнений движения (см. обзоры [5–7]).

При исследовании условий существования прецессий, как правило, используется прецессионная система координат, в которой вектор \mathbf{a} направлен по третьей оси: $\mathbf{a} = (0; 0; 1)$ [5]. Тогда, если $\varphi_1(t) = n$, $\varphi_2(t) = m$, где n и m – постоянные, из соотношений (2) в этом случае имеем

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = \cos \theta_0, \quad \boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\boldsymbol{\nu}, \quad (3)$$

а прецессия тела называется регулярной [2]. Из равенств (3) следует, что движение тела представимо в виде суперпозиции двух типов: равномерного вращения вокруг неподвижной в теле оси l_1 и равномерного вращения в

пространстве вокруг оси l_2 . Данный результат представляет ограниченную информацию о свойствах движения регулярной прецессии. Поэтому в динамике твердого тела изучаются и другие свойства прецессии (3).

В статье Г.В. Горра, Т.В. Балаклицкой [8] рассмотрен метод исследования движения главных осей в случае прецессионных движений тела. Следуя этому методу, положим, что система $Oxyz$ является главной системой координат, и для компонент вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ имеют место равенства

$$\mathbf{a} = (\sin \mu_0 \cos \sigma_0, \sin \mu_0 \sin \sigma_0, \cos \mu_0), \quad (4)$$

где μ_0, σ_0 – постоянные параметры: $\mu_0 \in (0, \pi)$, $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$. При $\mu_0 = 0$ будем полагать $\mathbf{a} = (0; 0; 1)$, т. е. в этом случае параметр σ_0 не определен.

Запишем решение уравнения (1):

$$\begin{aligned} \nu_1 &= a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a'_0 \sin \sigma_0 \cos nt + a'_0 \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt, \\ \nu_2 &= a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a'_0 \cos \sigma_0 \cos nt + a'_0 \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt, \\ \nu_3 &= a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin nt. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу соотношений (4), (5) из второго равенства системы (3) получим

$$\omega_i = na_i + m\nu_i \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (6)$$

Обозначим через u угол нутации, v – угол собственного вращения, w – угол прецессии, которые характеризуют положение подвижной системы координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ по отношению к неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\nu}$. Для нахождения u, v, w используем формулы [17]

$$u(t) = \arccos(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{i}_3(t)), \quad v(t) = \arctg \frac{(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{i}_1(t))}{(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{i}_2(t))}, \quad (7)$$

$$w(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{i}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathbf{i}_3)^2} d\tau. \quad (8)$$

Подставим величины (4)–(6) в равенства (7), (8):

$$u(t) = \arccos(a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin nt), \quad (9)$$

$$v(t) = \arctg \frac{a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a'_0 \sin \sigma_0 \cos nt + a'_0 \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt}{a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a'_0 \cos \sigma_0 \cos nt + a'_0 \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt}, \quad (10)$$

$$w(t) = mt - \arctg \frac{\sin \mu_0 \cos nt}{a'_0 \cos \mu_0 + a_0 \sin \mu_0 \sin nt} + \arctg \frac{\tg \mu_0}{a'_0}. \quad (11)$$

Значение постоянной в (11) выбрано так, чтобы выполнялось условие $w(0) = 0$.

Статья посвящена изучению движения в неподвижном пространстве вектора

$$\mathbf{i}_3 = \sin u \sin w^* \mathbf{r}_1 - \sin u \cos w^* \mathbf{r}_2 + \cos u \mathbf{r}_3, \quad (12)$$

где

$$w^*(t) = mt - \operatorname{arctg} \frac{\sin \mu_0 \cos nt}{a'_0 \cos \mu_0 + a_0 \sin \mu_0 \sin nt} \quad (13)$$

или

$$w^*(t) = w(t) - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \mu_0}{a'_0}. \quad (14)$$

На основании соотношений (9), (11), для вектора (12) получим разложение по неподвижному базису в зависимости от времени t :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3 = & [(a'_0 \cos \mu_0 + a_0 \sin \mu_0 \sin nt) \sin mt - \sin \mu_0 \cos nt \cos mt] \mathbf{r}_1 - \\ & - [(a'_0 \cos \mu_0 + a_0 \sin \mu_0 \sin nt) \cos mt + \sin \mu_0 \cos nt \sin mt] \mathbf{r}_2 + \\ & + (a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin nt) \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Если вектор \mathbf{a} принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, для которой в равенстве (15) $\cos \mu_0 = 0$, $\sin \mu_0 = 1$, то из формулы (15) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3 = & (a_0 \sin nt \sin mt - \cos nt \cos mt) \mathbf{r}_1 - \\ & - (a_0 \sin nt \cos mt + \cos nt \sin mt) \mathbf{r}_2 - a'_0 \sin nt \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношение (16) упрощается при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ($a_0 = 0$, $a'_0 = 1$):

$$\mathbf{i}_3 = -\cos nt (\cos mtr_1 + \sin mtr_2) - \sin nt \mathbf{r}_3. \quad (17)$$

2. Построение годографа (17) в случае $m=n$. Рассмотрим равенство (17) при $m = n$. Положим

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\tau), \quad x_2(t) = -\frac{1}{2} \sin 2\tau, \quad x_3(t) = -\sin \tau. \quad (18)$$

Тогда из (17), в силу (18), следует

$$\mathbf{i}_3 = x_1(t) \mathbf{r}_1 + x_2(t) \mathbf{r}_2 + x_3(t) \mathbf{r}_3, \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_3}{dt} = n(\sin 2\tau \mathbf{r}_1 - \cos 2\tau \mathbf{r}_2 - \cos \tau \mathbf{r}_3), \quad (20)$$

где $\tau = nt$ (полагаем $n > 0$).

Изучим проекцию годографа вектор-функции (19) на плоскость $O\xi\eta\zeta$:

$$\mathbf{R}(\tau) = x_1(\tau) \mathbf{r}_1 + x_2(\tau) \mathbf{r}_2. \quad (21)$$

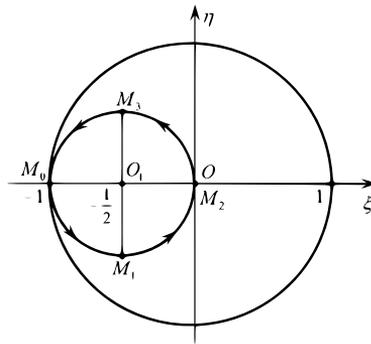


Рис. 1

В силу (18) для компонент вектора (21) имеет место соотношение

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}, \quad (22)$$

т. е. годографом вектор-функции $\mathbf{R}(\tau)$ является окружность (22). На основании (18) заключаем, что годограф $\mathbf{R}(\tau)$ является периодической вектор-функцией с периодом по τ , равным π .

На рис. 1 точка M_0 соответствует значению $\tau = 0$; точка $M_1 - \tau = \frac{\pi}{4}$; точка $M_2 - \tau = \frac{\pi}{2}$; точка $M_3 - \tau = \frac{3\pi}{4}$. При значении $\tau = \pi$ годограф (21) находится в точке M_0 . Движение конца вектора (21) показано на рис. 1 стрелкой. В силу формулы (20) в точках M_0 и M_2 касательная к кривой (21) вертикальна, а в точках M_1 и M_3 – горизонтальна.

Рассмотрим годограф (19). Движение конца вектора (19) по сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, указанное на рис. 2, является периодическим с периодом 2π . Отметим, что в точке M_0 ветви кривой (19) пересекаются, угол между касательными к этим частям кривой можно определить из формулы (21).

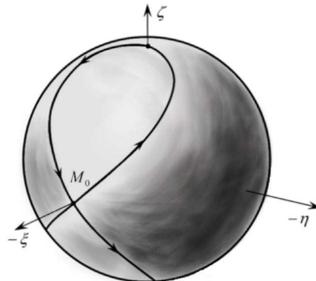


Рис. 2

Следует учесть, что рис. 1, 2 построены для случая $a_0 = 0$, т. е. вектор \mathbf{a} в процессе движения тела занимает горизонтальное положение.

3. Построение годографа (16) при $m=n$. Рассмотрим вектор-функцию (16) при $m = n$ ($a_0 > 0$), полагая $nt = \tau$:

$$\mathbf{i}_3(\tau) = x_1(\tau) \mathbf{r}_1 + x_2(\tau) \mathbf{r}_2 + x_3(\tau) \mathbf{r}_3, \quad (23)$$

где

$$x_1(\tau) = (a_0 + 1) \sin^2(\tau) - 1, \quad x_2(\tau) = -\frac{a_0 + 1}{2} \sin 2\tau, \quad x_3(\tau) = -a'_0 \sin \tau. \quad (24)$$

Вычислим производную от (23), учитывая равенства (24):

$$\frac{d\mathbf{i}_3}{d\tau} = (a_0 + 1) \sin 2\tau \mathbf{r}_1 - (a_0 + 1) \cos 2\tau \mathbf{r}_2 - a'_0 \cos \tau \mathbf{r}_3. \quad (25)$$

Изучим проекцию годографа (23) на плоскость $O\xi\eta$:

$$\mathbf{R}(\tau) = x_1(\tau) \mathbf{r}_1 + x_2(\tau) \mathbf{r}_2. \quad (26)$$

Компоненты $x_1(\tau), x_2(\tau)$ из (26), в силу (24), удовлетворяют уравнению

$$\left[x_1 + \frac{1}{2}(1 - a_0) \right]^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}(1 + a_0)^2. \quad (27)$$

Следовательно, проекция годографа (23) является окружностью (27) с центром $\left(-\frac{1}{2}(1 - a_0), 0 \right)$ и радиусом $\frac{1}{2}(1 + a_0)$ (см. рис. 3).

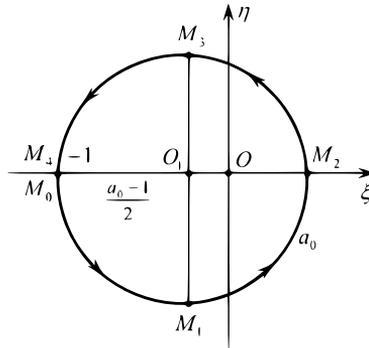


Рис. 3

Отметим свойства кривой (26): движение конца вектора $\mathbf{R}(\tau)$ является периодическим с периодом π по переменной τ ; точка M_0 соответствует значению $\tau = 0$; точка $M_1\left(-\frac{1}{2}(1 + a_0), -\frac{1}{2}(1 + a_0)\right)$ – значению $\tau = \frac{\pi}{4}$; точка $M_2(a_0, 0)$ – значению $\tau = \frac{\pi}{2}$; точка $M_3\left(-\frac{1}{2}(1 + a_0), \frac{1}{2}(1 + a_0)\right)$ – значению $\tau = \frac{3\pi}{4}$; точка M_4 – значению $\tau = \pi$ (она совпадает с точкой M_0).

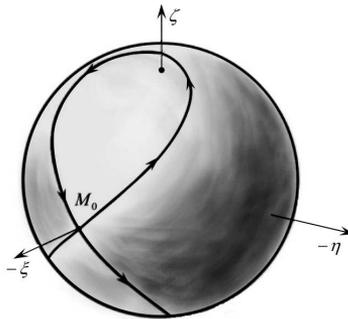


Рис. 4

Рассмотрим годограф (23) с компонентами (24). Очевидно, что он находится на сфере Пуассона: $x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) + x_3^2(\tau) = 1$ и является периодическим с периодом 2π (рис. 4).

Отметим свойства кривой, изображенной на рис. 4. Ее условно можно разделить на две кривые: γ_1 (“нижняя” часть) и γ_2 (“верхняя” часть). При движении изображающей точки M по кривой, изображенной на рис. 3, от точки M_0 ($\tau = 0$) до точки M_1 ($\tau = \frac{\pi}{2}$) и далее до начальной точки, изображающая точка M годографа (23) движется по кривой γ_1 ; когда τ изменяется от значения π до значения 2π , изображающая точка M движется по кривой γ_2 . То есть движение точки M является периодическим с периодом 2π по τ .

Вычислим значение вектора (25) при $\tau = 0$:

$$\left. \frac{d\mathbf{i}_3(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -(a_0 + 1)\mathbf{r}_2 - a'_0\mathbf{r}_3, \quad (28)$$

и при $\tau = \pi$:

$$\left. \frac{d\mathbf{i}_3(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\pi} = -(a_0 + 1)\mathbf{r}_2 + a'_0\mathbf{r}_3. \quad (29)$$

Из формул (28), (29) следует, что в точке M_0 (см. рис. 4) векторы (28) и (29) не коллинеарны, т. е. в точке M_0 кривые γ_1 и γ_2 не касаются друг друга.

4. Исследование случая $\mathbf{n} = 2\mathbf{m}$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$. Рассмотрим вектор-функцию (17) при условии $n = 2m$. Введем вместо t новую переменную $\tau = mt$, где $m > 0$. Тогда из (17) найдем зависимость \mathbf{i}_3 от τ :

$$\mathbf{i}_3(\tau) = -\cos 2\tau \cos \tau \mathbf{r}_1 - \cos 2\tau \sin \tau \mathbf{r}_2 - \sin \tau \mathbf{r}_3. \quad (30)$$

Пусть в векторном равенстве (30) введены функции

$$x_1(\tau) = -\cos 2\tau \cos \tau, \quad x_2(\tau) = -\cos 2\tau \sin \tau, \quad x_3(\tau) = -\sin \tau. \quad (31)$$

Проекция годографа (30) на плоскость $O\xi\eta$ имеет вид

$$\mathbf{R}(\tau) = x_1(\tau)\mathbf{r}_1 + x_2(\tau)\mathbf{r}_2. \quad (32)$$

Используя величины (31) для компонент $x_1(\tau), x_2(\tau)$, получим уравнение

$$(x_1^2 + x_2^2)^3 = (x_1^2 - x_2^2)^2. \quad (33)$$

В полярных координатах ρ и α : $x_1 = \rho \cos \alpha$, $x_2 = \rho \sin \alpha$, т. е. уравнение (33) запишем так:

$$\rho = |\cos 2\alpha|. \quad (34)$$

Используя равенства (32)–(34), изобразим годограф (32) на рис. 5:

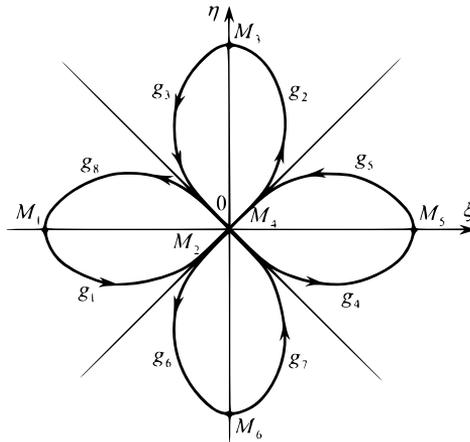


Рис. 5

Выполним пояснения к рис. 5. Введем в рассмотрение точки

$$M_1(-1, 0), M_2(0, 0), M_3(0, 1), M_4(0, 0), M_5(1, 0), M_6(0, -1)$$

и кривые

$$\begin{aligned} g_1 : \tau \in (0, 45^\circ), \quad g_2 : \tau \in (45^\circ, 90^\circ), \quad g_3 : \tau \in (90^\circ, 135^\circ), \\ g_4 : \tau \in (135^\circ, 180^\circ), \quad g_5 : \tau \in (180^\circ, 225^\circ), \quad g_6 : \tau \in (225^\circ, 270^\circ), \\ g_7 : \tau \in (270^\circ, 315^\circ), \quad g_8 : \tau \in (315^\circ, 360^\circ). \end{aligned}$$

Движение изображающей точки кривой (32) указано стрелкой и происходит следующим образом: из начальной точки M_1 точка M движется по кривой g_1 до точки $M_2(0, 0)$, из точки M_2 она движется по кривой g_2 до точки $M_3(0, 1)$, дальнейший порядок прохождения точки M по годографу (32) указан стрелкой. За время 2π точка M возвращается в точку M_1 .

Для построения годографа (30) необходимо использовать проекцию, изображенную на рис. 5, и сферу Пуассона $x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) + x_3^2(\tau) = 1$. При этом следует учитывать значение функции $x_3(\tau) = -\sin 2\tau$, которая определяет соответствие точек годографов (30), (32).

5. Исследование случая $m = 2n$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$. Запишем вектор-функцию (17) при $m = 2n$:

$$\mathbf{i}_3(\tau) = -\cos \tau \cos 2\tau \mathbf{r}_1 - \cos \tau \sin 2\tau \mathbf{r}_2 - \sin \tau \mathbf{r}_3, \quad (35)$$

где $\tau = nt$. Исследуем проекцию (35) на плоскость $O\xi\eta$:

$$\mathbf{R}(\tau) = x_1(\tau) \mathbf{r}_1 + x_2(\tau) \mathbf{r}_2, \quad (36)$$

где

$$x_1(\tau) = -\cos \tau \cos 2\tau, \quad x_2(\tau) = -\cos \tau \sin 2\tau. \quad (37)$$

Исключим в равенствах (37) параметр τ :

$$x_2^2 - 4(x_1^2 + x_2^2)^2 [1 - (x_1^2 + x_2^2)] = 0. \quad (38)$$

То есть годограф $\mathbf{R}(\tau)$ из (36) является алгебраической кривой шестого порядка (рис. 6).

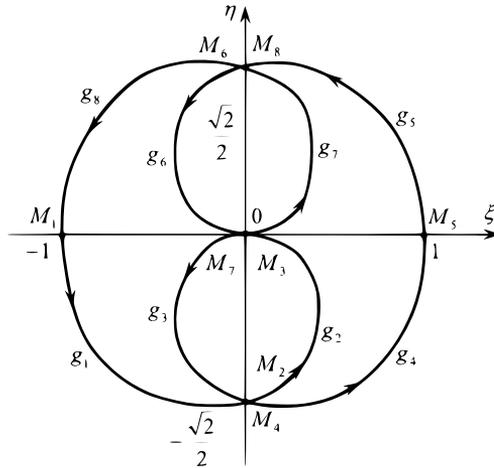


Рис. 6

Для описания свойств кривой (37) введем в рассмотрение точки данной кривой

$$\begin{aligned} M_1(-1, 0), \quad M_2(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad M_3(0, 0), \quad M_4(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad M_5(1, 0), \\ M_6(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad M_7(0, 0), \quad M_8(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad M_9(-1, 0), \end{aligned} \quad (39)$$

а также кривые g_i ($i \in \overline{1, 8}$):

$$\begin{aligned} g_1 : \tau \in (0, 45^\circ), \quad g_2 : \tau \in (45^\circ, 90^\circ), \quad g_3 : \tau \in (90^\circ, 135^\circ), \\ g_4 : \tau \in (135^\circ, 180^\circ), \quad g_5 : \tau \in (180^\circ, 225^\circ), \quad g_6 : \tau \in (225^\circ, 270^\circ), \\ g_7 : \tau \in (270^\circ, 315^\circ), \quad g_8 : \tau \in (315^\circ, 360^\circ). \end{aligned} \quad (40)$$

Предельными точками кривых (40) являются точки, которые указаны в (39). Движение конца вектора (36) с координатами (37) – точки M – по кривой (рис. 6), указано стрелкой. Отметим, что кривые g_1, g_8, g_4, g_5 касаются окружности единичного радиуса; кривые g_2 и g_3, g_6 и g_7 касаются, соответственно, в точках M_3 и M_7 оси $O\xi$. Угол между касательными к кривым g_1, g_2 и g_3, g_4 , а также между g_5, g_6 и g_7, g_8 определяется с помощью вектор-функции

$$\frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} \mathbf{r}_1 + \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} \mathbf{r}_2, \quad (41)$$

где компоненты вектора (41) определяются с помощью соотношений (37), вычисленных, соответственно, в точках M_2, M_4 и M_6, M_8 . Очевидно, что движение точки M по кривой, изображенной на рис. 6, является периодическим по τ с периодом 2π .

Построение годографа (35) на сфере Пуассона проводится по аналогии с указанным в п. 5.

6. Исследование случая $\mathbf{m} = 2\mathbf{n}, a_0 > 0$. Запишем вектор-функцию (16)

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3(\tau) = & (a_0 \sin \tau \sin 2\tau - \cos \tau \cos 2\tau) \mathbf{r}_1 - \\ & - (a_0 \sin \tau \cos 2\tau + \cos \tau \sin 2\tau) \mathbf{r}_2 - a'_0 \sin \tau \mathbf{r}_3, \end{aligned} \quad (42)$$

где $\tau = nt$. Изучим проекцию вектора (42) на плоскость $O\xi\eta$:

$$\mathbf{R}(\tau) = x_1(\tau) \mathbf{r}_1 + x_2(\tau) \mathbf{r}_2. \quad (43)$$

Здесь

$$x_1(\tau) = 2(a_0 + 1)(\sin^2 \tau - \varepsilon_1^2) \cos \tau, \quad x_2(\tau) = 2(a_0 + 1)(\sin^2 \tau - \varepsilon_2^2) \sin \tau. \quad (44)$$

Параметры ε_1^2 и ε_2^2 , входящие в равенства (44), имеют значения

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2(a_0 + 1)}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{a_0 + 2}{2(a_0 + 1)} \quad (45)$$

и удовлетворяют соотношению $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = \frac{1}{2}$. Из формулы (43) следует

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{(\sin^2 \tau - \delta_2^2) \cos \tau}{(\sin^2 \tau - \delta_1^2) \sin \tau}; \quad \delta_1^2 = \frac{4a_0 + 5}{6(a_0 + 1)}, \quad \delta_2^2 = \frac{a_0 + 2}{6(a_0 + 1)}. \quad (46)$$

Рассмотрим на плоскости Ou^*v^* (рис. 7) единичную окружность: $u^* = \cos \tau, v^* = \sin \tau$. Пусть $\alpha(\tau) = \frac{dx_2(\tau)}{dx_1(\tau)}$. Для построения годографа (43)

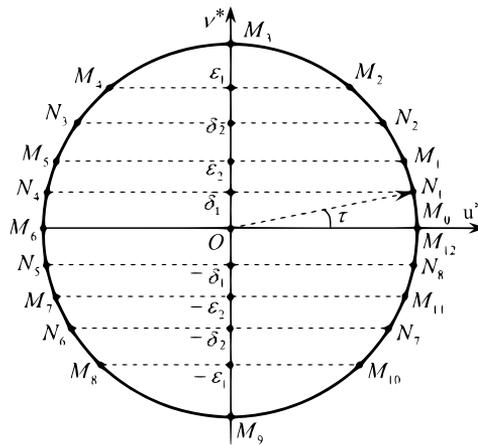


Рис. 7

изучим отображение единичной окружности (рис. 7) на плоскость $O\xi\eta$ (точки годографа (43) будем снабжать звездочками). Рассмотрим отображение первой четверти окружности, для которой $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 M_1(1, 0) &\Rightarrow M_0^*(-1, 0) \quad (\alpha = \frac{\pi}{2}), \\
 N_1(\sqrt{1 - \delta_1^2}, \delta_1) &\Rightarrow N_1^*(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \quad \text{где } x_1^{(1)} < 0, \quad x_2^{(1)} < 0 \quad (\alpha = 0), \\
 M_1(\sqrt{1 - \varepsilon_2^2}, \varepsilon_2) &\Rightarrow M_1^*(0, -\varkappa_0) \quad (\alpha > 0), \\
 N_2(\sqrt{1 - \delta_2^2}, \delta_2) &\Rightarrow N_2^*(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \quad \text{где } x_1^{(1)} > 0, \quad x_2^{(1)} > 0 \quad (\alpha = \frac{\pi}{2}), \\
 M_3(\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}, \varepsilon_1) &\Rightarrow M_3^*(\varkappa_1, 0) \quad (\alpha > 0), \\
 M_4(0, 1) &\Rightarrow M_4^*(0, a_0) \quad (\alpha = 0),
 \end{aligned} \tag{47}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varkappa_0 &= \sqrt{\frac{a_0 + 1}{2}}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{\frac{a_0 + 1}{2}} \quad (\varkappa_0 > \varkappa_1), \\
 x_1^{(1)} &= x_1(\arcsin \delta_1), \quad x_2^{(1)} = x_2(\arcsin \delta_1), \\
 x_1^{(2)} &= x_1(\arcsin \delta_2), \quad x_2^{(1)} = x_2(\arcsin \delta_2).
 \end{aligned} \tag{48}$$

Аналогично отображению (47), можно указать отображение и остальной части окружности (рис. 7) на плоскость $O\xi\eta$. Результат такого метода дает возможность построить годограф (44). Он указан на рис. 8. Движение конца вектора (43) на этом рисунке показано стрелкой

Рассмотрим годограф, изображенный на рис. 8, при $a_0 = 0$. В силу обозначений (45), (46) имеем

$$\delta_1^2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_2^2 = \frac{5}{6}, \quad \varkappa_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varkappa_0 = 0. \tag{49}$$

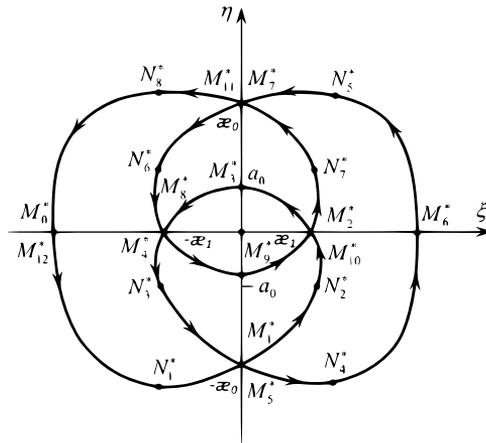


Рис. 8

Очевидно, что при значениях (49) кривая (рис. 8) переходит в кривую (рис. 7).

Годограф (42) описывает кривую пересечения сферы Пуассона и цилиндрической поверхности, направляющей которой является плоская кривая (43), а образующие параллельны оси $O\xi$.

Заключение. Исследовано движение третьей, главной, оси инерции твердого тела с неподвижной точкой в случаях регулярной прецессии тела при равенстве скоростей прецессии и собственного вращения и резонансах 1:2 и 2:1 этих параметров. Для перечисленных случаев полученные годографы главной оси эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве указывают на принципиальное отличие движения главной оси от движения оси прецессии тела, сохраняющей постоянный угол с вертикалью во все время движения.

1. *Аппельрот Г. Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1938. – № 3. – С. 385–411.
2. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
3. *Klein F., Sommerfeld A.* Uber die Theorie des Kreisels // New York e. a. Johnson reprint согр. – 1965. – 966 р.
4. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2017. – 265 с.

8. Горр Г.В., Балаклицкая Т.В. О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 55–65.
9. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, № 3. – С. 502–507.
10. Горр Г. В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
11. Гашененко И. Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
12. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
13. Раус Э. Дж. Динамика систем твердых тел. В 2-х т. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 544 с.
14. Горр Г.В., Ковалев А.М. Методы истолкования движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 3–13.
15. Yehia H.M. Goriachev's solution in the dynamics of a rigid body about a fixed point // Механика твердого тела. – 2018. – Вып.48. – С. 106–116.
16. Горр Г.В. О движении оси симметрии твердого тела под действием потенциальных сил в случае трех инвариантных соотношений // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 41–54.
17. Горр Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикл. математика и механика. – 2019. – **83**, № 2. – С. 202–214.
18. Мазнев А.В., Горбунова Ю.С. Новые кинематические свойства прецессионных движений твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 66–77.

A.V. Maznev

Investigation of the motion of the principal axes of inertia of a rigid body with a fixed point in the case of regular precessions

The article examines the kinematic properties of regular precessions of a rigid body with a fixed point, which are due to the nature of the resonant motions of the principal axes. The curves of intersection of the principal axes and the Poisson sphere are obtained under the conditions of equality of the precession and proper rotation rates and resonances of 1:2 and 2:1 of these parameters.

Keywords: *regular precessions, principal axes of inertia, resonances of precession velocities and proper rotation.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
aleksandr_maznev@rambler.ru

Получено 03.08.20