УДК 533.9

Н. А. Бритов

ЭФФЕКТИВНЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Получены эффективные априорные оценки L_2-норм скорости и ротора скорости решения первой краевой задачи магнитной гидродинамики в двумерном безындукционном случае. Установлен характер роста указанных норм для больших значений числа Гартмана.

Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в замкнутой ограниченной неодносвязной бласти Ω, граница которой $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров. Внешность Ω имеет магнитную проницаемость вакуума. На течение наложено внешнее постоянное магнитное поле индукцией $\mathbf{B}$. В дальнейшем $\mathbf{B}$ полагается известным, удовлетворяющим условиям: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\Omega + \varkappa b$; $\mathbf{B}_\Omega$ — гармоническое в Ω поле, компланарное плоскости течения; $\boldsymbol{\varkappa}$ единичный вектор ортогональный плоскости течения; $\mathbf{B}_\Omega$ не вырождается в $\Omega \bigcup \Gamma$ и $m = \inf\limits_{\Omega\bigcup\Gamma} |\mathbf{B}_\Omega|$, $M = \sup\limits_{\Omega\bigcup\Gamma} |\mathbf{B}_\Omega|$; $\int\limits_{\Gamma_0} |\mathbf{B}_\Omega \cdot \mathbf{v}|^2 d\Gamma_0 > 0$; $\mathbf{v}$ — нормаль к Γ. Кроме того, предполагаем, что течение безындукционно, т. е. поле $\mathbf{B}$ пренебрежимо мало искажается течением.

В рамках модели Навье — Стокса — Максвелла рассматриваемое течение описывается в безразмерных переменных краевой задачей

$$(\nabla\times)^2 \mathbf{v} + \nabla (p + 0{,}5\,\mathrm{Re}\,|\mathbf{v}|^2) = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathrm{Ha}^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}, \qquad (1)$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0;\ \nabla\times\mathbf{E} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B});\ \mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_0.$$

Здесь $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля в $\Omega \bigcup \Gamma$; Re — число Рейнольдса; На — число Гартмана. Целью работы является получение эффективных априорных оценок решений задачи (1) при достаточно больших значениях На.

1. **Исходное неравенство.** Как обычно [1], предполагается, что поле $\mathbf{v}_0$ можно продолжить внутрь Ω в виде соленоидального поля $\mathbf{u}_0 \in W_2^2(\Omega)$. Это осуществляется следующим образом. Пусть φ — решение краевой задачи

$$\Delta\varphi = 0,\ \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi|_\Gamma = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0,$$

$\mathbf{w}_0$ — любое дважды дифференцируемое в Ω соленоидальное векторное поле, удовлетворяющее краевому условию $\mathbf{w}_{0|\Gamma} = \mathbf{v}_0 - \nabla\varphi_{|\Gamma}$. Тогда $\mathbf{u}_0 = \nabla\varphi + \mathbf{w}_0$. Функция φ определяется с точностью до постоянной и в дальнейшем считается известной. Выбор $\mathbf{w}_0$ для построения оценок играет принципиальную роль. Как и в [2], $\mathbf{w}_0$ строится в виде $\mathbf{w}_0 = \nabla\times(\psi_\delta\varkappa)$, где ψ_δ произведение срезающей функции χ_δ и гладкой функции ψ_0, удовлетворяющей краевым условиям

$$\psi_0|_{\Gamma_i} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n;\ \mathbf{v}\cdot\nabla\psi_0|_\Gamma = (\mathbf{v}_0\times\nabla\varphi)\cdot(\varkappa\times\mathbf{v}).$$

Срезающая функция выбирается в виде

$$\chi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \rho(x) < \delta^2, \\ 3\dfrac{[1-\rho(x)/\delta]^2}{(1-\delta)^2} - 2\dfrac{[1-\rho(x)/\delta]^3}{(1-\delta)^3}, & \delta^2 \leqslant \rho(x) < \delta, \\ 0, & \delta \leqslant \rho(x) \end{cases}$$

($\rho(x)$ — расстояние от $x \in \Omega$ до ближайшей компоненты Γ, $\delta > 0$).

Как обычно [1], $\mathbf{H}(\Omega)$ — гильбертово пространство обращающихся в нуль на Γ соленоидальных в Ω векторных полей, имеющих в Ω интегрируемый с квадратом ротор; $\mathbf{J}(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω соленоидальных векторных полей. Обобщенным решением задачи (1) называется векторное поле $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющее для любых $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{J}(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\langle\nabla\times\boldsymbol{\Phi}, \nabla\times\mathbf{v}\rangle = \mathrm{Re}\langle\nabla\times\mathbf{v}, \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{v}\rangle + \mathrm{Ha}^2\langle\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\boldsymbol{\Phi}\rangle,\ \mathbf{E} = \varkappa e,\ e\text{— const}, \qquad (2)$$

где $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ — скалярное произведение векторных полей в $L_2(\Omega)$.

Пусть $\Phi = \mathbf{u}$. Тогда из (2) следует уравнение баланса энергии

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + \mathrm{Ha}^2\|\mathbf{u}\times\mathbf{B}_\Omega\|_2^2 = \mathrm{Re}\,[\langle\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\rangle + \langle\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{u}\times\nabla\varphi\rangle] - \langle\nabla\times\mathbf{u},$$
$$\nabla\times\mathbf{w}_0\rangle + \mathrm{Re}\,\langle\nabla\times\mathbf{w}_0,\mathbf{u}\times(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\rangle - \mathrm{Ha}^2\langle\mathbf{u}\times\mathbf{B}_\Omega,(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\times\mathbf{B}_\Omega\rangle.$$

Для получения исходного неравенства в Ω вводится система координат, локальный базис которой образован единичными векторами $\beta_1 = |\mathbf{B}_\Omega|^{-1}\mathbf{B}_\Omega$ и $\beta_2 \perp \beta_1$. В этом базисе $\mathbf{u} = u_1\beta_1 + u_2\beta_2$. Подстановка этого представления в (2) и применение неравенства Коши дает исходное неравенство

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + \mathrm{Ha}^2m^2\|u_2\varkappa\|_2^2 \leqslant \mathrm{Re}\,(\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 + \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2) +$$
$$+ \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2 + \mathrm{Re}\,(\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 + \|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2) +$$
$$+ \mathrm{Ha}^2M^2\|\varkappa u_2\|_2(\|\mathbf{w}_0\|_2 + \|\varkappa(\beta_2\nabla\varphi)\|_2). \qquad (3)$$

Для построения априорных оценок требуется оценить слагаемые в правой части (3) через $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2$ и $\|\varkappa u_2\|_2$. Для этого потребуются следующие оценки для $\mathbf{w}_0$:

$$|\mathbf{w}_0| \leqslant \left(1 + 1{,}5\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)M_\nabla, \ \|\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant M_\nabla\left[0{,}7\frac{1+8\delta^3}{(1-\delta)^2} + \delta^{1/2}\right](L_\Gamma\delta)^{1/2},$$

$$\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \left\{\frac{6M_\nabla}{(1-\delta)^3}[1{,}2\,(1-\delta) + 0{,}71\,(3-\delta)^{1/2}] + 1{,}2M_\Delta\right\}(L_\Gamma/\delta)^{1/2}. \qquad (4)$$

Здесь $M_\nabla = \sup\limits_{\Omega\cup\Gamma}|\nabla\psi_0|$; $M_\Delta = \sup\limits_{\Omega\cup\Gamma}|\Delta\psi_0|$; L_Γ — суммарная длина контуров Γ.

2. Построение априорных оценок. Для построения априорных оценок требуется оценить слагаемые в (3) с использованием (4). Оценка слагаемого $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2$ сводится к оценке второго сомножителя. Следуя (1), (2)

$$\|u\times w_0\|_2 \leqslant \left(1 + 1{,}5\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)M_\nabla\delta\frac{1+K\delta}{1-K\delta}\|\nabla\times u\|_2$$

($K = \max\limits_i|K(\Gamma_i)|$; $K(\Gamma_i) = \sup\limits_{\Gamma_i}k$; k — кривизна Γ_i).

В дальнейшем $\delta = \varepsilon/(1+\mathrm{Ha})$, $\varepsilon = \min(1/2K, \rho_m/3, \varepsilon_0)$,

$$\varepsilon_0 = [25 + 11\,(M_\nabla\,\mathrm{Re})^{-1} + (M_\nabla\,\mathrm{Re})^{-2}]^{1/2} - (M_\nabla\,\mathrm{Re})^{-1} - 5,$$

ρ_m — наименьшее расстояние между контурами Γ. Для больших Re ε — величина порядка $O(\mathrm{Re}^{-1})$.

Оценка слагаемого $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\Delta\varphi\|_2$ также сводится к оценке второго сомножителя. Доказано [2] (d — диаметр Ω)

$$\|\mathbf{u}\|_2 \leqslant d^{1/2}\|\varkappa u_2\|_2^{1/2}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{1/2} \qquad (5)$$

Пусть $M_i = \sup\limits_{\Omega\cup\Gamma}|\beta_i\cdot\nabla\varphi|$, $i = 1, 2$. Тогда в силу (5) и неравенства Юнга получается требуемая оценка слагаемого

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2 \leqslant 0{,}5\,[M_1\varepsilon_1^2 + M_2d^{1/2}(\varepsilon_1^2 + 0{,}5\varepsilon_1^{-2}\varepsilon_2^2)]\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + 0{,}5\varepsilon_2^{-2}(M_1 +$$
$$+ 0{,}5d^{1/2}M_2\varepsilon_1^{-2})\|u_2\varkappa\|_2^2.$$

В дальнейшем предполагается выполненным условие

$$\mathrm{Ha}^2 > (q + 2M_1\,\mathrm{Re})/3m^2, \ q > 0. \qquad (*)$$

Тогда ε_1, ε_2 можно выбрать так, что

$$\mathrm{Re}\,\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2 \leqslant 0{,}5\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + 0{,}75\,\mathrm{Ha}^2m^2\|\varkappa u_2\|_2^2.$$

Аналогично оцениваются остальные слагаемые. Подстановка этих оценок в (3) дает

$$0{,}25\,\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2+0{,}25\,\mathrm{Ha}^2m^2\,\|\varkappa u_2\|_2^2\leqslant(1{,}25+0{,}5M_2d^{1/2}\,\mathrm{Re})\,\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\times$$
$$\times\,\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2+[\mathrm{Re}\,(M_1+0{,}5M_2d^{1/2})\,\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2+\mathrm{Ha}^2M^2\,(M^2+\|\mathbf{w}_0\|_2)]\,\|\varkappa u_2\|_2.$$

Из этого неравенства и оценок (4) следуют оценки для $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2$, $\|\varkappa u_2\|_2$:

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\leqslant[5+(4+\mathrm{Ha}^{-1})\,M_2d^{1/2}\mathrm{Re}+2M_1\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1}]\,\{6M_\nabla\,[1{,}2\,(1-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})+$$
$$+\,0{,}71\,(3-\varepsilon_0\,\mathrm{Ha}^{-1})^{1/2}]\,(1-\varepsilon_0\,\mathrm{Ha}^{-1})^{-3}+1{,}2M_\Delta\}\,(\mathrm{Ha}\,L_\Gamma/\varepsilon_0)^{1/2}+2M\,\{M_2+$$
$$+\,M_\nabla\,[0{,}7\,(1+8\varepsilon_0^3\mathrm{Ha}^{-3})\,(1-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{-2}+(\varepsilon_0/\mathrm{Ha})^{1/2}]\,(L_\Gamma\varepsilon_0/\mathrm{Ha})^{1/2}\}\,\mathrm{Ha},\qquad(6)$$
$$\|\varkappa u_2\|_2\leqslant[2{,}5+(1+2\,\mathrm{Ha}^{-1})\,M_2d^{1/2}\mathrm{Re}+4M_1\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1}]\,\{6M_\nabla\,[1{,}2\,(1-$$
$$-\,\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})+0{,}71\,(3-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{1/2}]\,(1-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{-3}+1{,}2M_\Delta\}\,(\mathrm{Ha}\,\varepsilon_0m/L_\Gamma)^{-1/2}+$$
$$+\,4\,(M_2+M_\nabla\,[0{,}7\,(1+8\varepsilon_0^3\mathrm{Ha}^{-3})\,(1-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{-2}+(\varepsilon_0/\mathrm{Ha})^{1/2}]\,(L_\Gamma\varepsilon_0/\mathrm{Ha})^{1/2}\}\,Mm^{-1}.$$

Комбинирование оценок (5), (6) дает оценку для $\|\mathbf{u}\|_2$:

$$\|\mathbf{u}\|_2\leqslant(5d^2)^{1/4}\,[2{,}5+(1+2\,\mathrm{Ha}^{-1})\,M_2d^{1/2}\mathrm{Re}+4M_1\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1}]\,\{6M_\nabla\,[1{,}2\,(1-$$
$$-\,\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})+0{,}71\,(3-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{1/2}+1{,}2M_\Delta\}\,(L_\Gamma/\varepsilon_0)^{1/2}m^{-1/4}+2Mm^{-1/2}\,\{M_2+$$
$$+\,M_\nabla\,[0{,}7\,(1+8\varepsilon_0^3\mathrm{Ha}^{-3})\,(1-\varepsilon_0\mathrm{Ha}^{-1})^{-2}+(\varepsilon_0/\mathrm{Ha})^{1/2}]\,(L_\Gamma\varepsilon_0)^{1/2}\}\,\mathrm{Ha}^{1/2}.\qquad(7)$$

Таким образом, для достаточно больших Ha из (4), (6), (7) следуют асимптотические оценки

$$\|\mathbf{v}\|_2\leqslant M_v\mathrm{Ha}^{1/2},\ \ \|\varkappa v_2\|_2\leqslant M_{v2}\,|,\ \ \|\nabla\times\mathbf{v}\|_2\leqslant M_{v\nabla}\mathrm{Ha}.$$

Полученные оценки (6) и (7) гарантируют разрешимость задачи (1) при выполнении условия (*).

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М., 1971.— 204 с.
2. *Бритов Н. А.* Априорные оценки, существование и единственность двумерных и осесимметричных решений краевых задач магнитной гидродинамики // Магнит. гидродинамика.— 1988.— № 4.— С. 81—85.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк

Получено 22.08.89