

УДК 531.38; 531.39

©2020. Г.В. Горр, Т.В. Балаклицкая, Д.Н. Ткаченко

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ-РАВНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Исследованы условия существования равномерных и асимптотически-равномерных движений гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. Найдены уравнения в вариациях для рассматриваемых движений и характеристическое уравнение. На основании первого метода Ляпунова установлены два класса асимптотически-равномерных вращений гиростата относительно главной оси эллипсоида инерции, по которой направлены векторы обобщенного центра масс гиростата и гироскопический момент.

Ключевые слова: асимптотически-равномерные движения, потенциальные и гироскопические силы.

Введение. Асимптотические решения уравнений движения механических систем изучались в различных направлениях. Ж. Адамар [1], А. Кнезер [2], П. Боль [3], О. Перрон [4] и другие рассматривали асимптотические движения натуральных механических систем.

Результаты А. Кнезера были обобщены С.В. Болотиным и В.В. Козловым [5]. В работах [6, 7] рассмотрены вопросы обращения теоремы Ляпунова об устойчивости положения равновесия. На основе конструктивного построения решений уравнений движения в виде рядов определенной структуры доказано существование асимптотических траекторий.

А.П. Маркеев [8, 9] изучал асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Наиболее существенные результаты в построении асимптотических решений уравнений механики получил А.М. Ляпунов [10]. На основании определенных свойств линейной системы (например, свойства правильности) он создал метод получения асимптотических решений в виде рядов, абсолютно сходящихся по времени. При этом А.М. Ляпунов изучал случай и непериодических линейных систем, ввел понятие характеристичных чисел системы. А. Пуанкаре [11] сформулировал ряд теорем, посвященных характеристичным числам линейных периодических систем, которые имеют место для исходных дифференциальных уравнений, допускающих первые интегралы.

С помощью первого метода Ляпунова исследованы асимптотически-маятниковые движения тяжелого твердого тела [12, 13], асимптотически-прецессионные движения гиростата [14, 15], асимптотически-равномерные движения [16–18]. В статье [19] установлено, что асимптотически стремящиеся к покою движения тяжелого твердого тела можно найти на основе теоремы Г.В. Каменкова [20]. Ряды Г.В. Каменкова [20] являются частным случаем рядов А.М. Ляпунова [10], но преимущество [20] по сравнению с [10] состоит в

том, что ряды Г.В. Каменкова имеют более простой вид (их коэффициенты не зависят от времени).

В настоящей статье продолжено изучение асимптотически-равномерных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил относительно оси симметрии силовых полей. Получены условия существования таких движений в общем случае; определено множество осей равномерных движений и значение угловой скорости гиростата. Найдено характеристическое уравнение системы первого приближения в задаче об асимптотически-равномерных движениях без ограничения на параметры задачи. Полное исследование этого уравнения проведено для варианта равномерных вращений относительно главной оси эллипсоида инерции гиростата.

Отдельно рассмотрены свойства корней характеристического уравнения в задачах о движении тяжелого твердого тела под действием сил Лоренца и в задаче о движении твердого тела под действием потенциальных сил (силы тяжести и ньютоновских сил). Указаны типы асимптотических рядов Ляпунова в данных задачах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{y}_s = Y_s(t, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$, функции Y_s удовлетворяют требованиям существования и единственности решения задачи Коши. Пусть система (1) допускает решение

$$y_s^{(0)} = f_s(t). \quad (2)$$

Для исследования поведения системы (1) в окрестности решения (2) положим

$$y_s = x_s + f_s(t). \quad (3)$$

Тогда

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

$X_s(t, 0, \dots, 0) = 0$. Предположим, что X_s являются голоморфными функциями переменных $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Запишем систему (4) в матричном виде

$$\dot{x} = p(t)x + P(t, x). \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $P = (P_1, \dots, P_n)^T$, $p(t) = \|p_{ij}(t)\|$,

$$P_i(t, x) = \sum_{m=2(m_1+\dots+m_n=m)}^{\infty} K^{(m_1, \dots, m_n)}(t) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad (6)$$

функции $p_{ij}(t)$, $K_{(t)}^{(m_1, \dots, m_n)}(t)$ являются непрерывными ограниченными функциями $t \geq t_0$; $m_1, \dots, m_n$ – натуральные числа или нули. Если система

$\dot{x} = p(t)x$ есть правильная и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – положительные характеристичные числа этой линейной системы, то система (5) допускает решение в виде рядов [10]

$$x_s = \sum_{m=1(m_1+\dots+m_n=m)}^{\infty} L_s^{(m_1, \dots, m_k)}(t) \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k} \exp\left(-\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i\right) t, \quad (7)$$

где $L_s^{(m_1, \dots, m_k)}(t)$ – непрерывные функции t , характеристичные числа которых не менее нуля, а суммирование распространяется на натуральные числа $m_1, \dots, m_k$. Ряды (7) абсолютно сходятся для малых произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и $x_s \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для применения первого метода Ляпунова важны три задачи: 1) выяснение условий правильности системы первого приближения, 2) определение количества положительных характеристических чисел этой системы, 3) построение асимптотического ряда. Первые две задачи решаются с помощью методов из [10, 11].

Рассмотрим *третью* задачу: построение асимптотического ряда (7). Ляпунов предложил для системы (5) решение в виде ряда

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(m)} + \dots \quad (8)$$

и для членов его получил систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^{(1)} = p(t)x^{(1)}, \quad \dot{x}^{(m)} = p(t)x^{(m)} + R^m \quad (m > 1), \quad (9)$$

где R^m – вектор, компоненты которого есть целые функции от $x^{(\mu)}$ ($\mu < m$).

Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу первого из уравнений (9)

$$x^{(1)} = X(t)\alpha, \quad (10)$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ – вектор произвольных постоянных. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – положительные характеристичные числа решений, которым соответствуют k первых столбцов матрицы $X(t)$. Тогда в качестве решения системы первого приближения А.М. Ляпунов берет решение

$$x^{(1)} = X(t)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)^T.$$

Для решения m -го измерения ($m > 1$) рассматриваем выражение

$$x^{(m)} = X(t) \left[\int X^{-1}(t) R^{(m)}(t) dt + C \right]. \quad (11)$$

Причем каждый из интегралов в (11), в котором подынтегральная функция имеет положительное характеристичное число, берется от $+\infty$ до t и полагается $C = 0$. Если же подынтегральная функция имеет неположительное характеристичное число, то интегрирование проводится от t_0 до t , а вектор C принимается фиксированным вектором с компонентами, не зависящими от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

2. Условия существования равномерных вращений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Для применения первого метода Ляпунова [10] к указанной задаче сначала необходимо найти условия существования исследуемого решения.

Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [21]

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) допускают три первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu - \frac{1}{2}B\nu \cdot \nu = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2s \cdot \nu + C\nu \cdot \nu = 2E, \quad (13)$$

где k, E – постоянные. В уравнениях (12) и интегралах (13) введены следующие обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение несомых тел; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, коллинеарный обобщенному вектору центра масс гиростата; $A = (A_i)$ ($i = \overline{1, 3}$) – тензор инерции гиростата; $B = (B_i)$ ($i = \overline{1, 3}$) – постоянная матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = (C_i)$ ($i = \overline{1, 3}$) – постоянная матрица, определяющая потенциальные силы; точка над переменными ω и ν обозначает относительную производную по времени t . В литературе [22–27] приведены различные подходы в формировании уравнений рассматриваемой задачи.

Рассмотрим равномерные движения гиростата относительно вектора ν : $\omega = \omega^{(0)}$ – постоянный вектор, направленный по ν . Из второго уравнения системы (12) следует $\dot{\nu} = 0$, т. е. $\nu = \nu^{(0)} = \text{const}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\omega^{(0)} = \omega_0 \nu^{(0)}. \quad (14)$$

Подставим величину (14) в первое уравнение (12)

$$[\omega_0^2 A \nu^{(0)} + \omega_0 (\lambda - B \nu^{(0)}) + s - C \nu^{(0)}] \times \nu^{(0)} = 0. \quad (15)$$

Теперь задача свелась к подбору таких значений $A_i, B_i, C_i, \lambda_i, \nu_i^{(0)}, \omega_0$, при которых уравнение (15) обращается в тождество.

Случай сферического распределения масс. Пусть выполняются условия

$$A_3 = A_2 = A_1. \quad (16)$$

Тогда из (15) имеем

$$[\omega_0 (\lambda - B \nu^{(0)}) + s - C \nu^{(0)}] \times \nu^{(0)} = 0. \quad (17)$$

Первый вариант, который следует из (17), таков:

$$\lambda_i = B_i \nu_i^{(0)}, \quad s_i = C_i \nu_i, \quad (B^{-1} \boldsymbol{\lambda})^2 = 1, \quad (C^{-1} \mathbf{s})^2 = 1. \quad (18)$$

Равномерное вращение в силу (18) происходит вокруг оси с единичным вектором $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = C^{-1} \mathbf{s}$ (полагаем $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) и произвольной угловой скоростью ω_0 .

Второй вариант охарактеризуем условиями

$$\boldsymbol{\lambda} = B \boldsymbol{\nu}^{(0)}, \quad \mathbf{s} \neq C \boldsymbol{\nu}^{(0)}, \quad (B^{-1} \boldsymbol{\lambda})^2 = \boldsymbol{\nu}^{(0)2} = 1. \quad (19)$$

Тогда, в силу (19), из равенства (17) получим

$$\begin{aligned} s_2 \nu_3^{(0)} - s_3 \nu_2^{(0)} + (C_3 - C_2) \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} &= 0, \\ s_3 \nu_1^{(0)} - s_1 \nu_3^{(0)} + (C_1 - C_3) \nu_3^{(0)} \nu_1^{(0)} &= 0, \\ s_1 \nu_2^{(0)} - s_2 \nu_1^{(0)} + (C_2 - C_1) \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\nu_i^{(0)} = \frac{\lambda_i}{B_i}$ ($i = \overline{1,3}$). Отметим, что если в (19) матрица $B = 0$, то $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, т.е. в случае отсутствия сил Лоренца и гиросtatического момента имеем только условия (20). Эти условия необходимо рассматривать и при частных ограничениях:

$$\nu_3^{(0)} = \nu_2^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)} = \pm 1 \quad (s_2 = s_3 = 0);$$

$$\nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)2} + \nu_2^{(0)2} = 1 \quad (s_3 = 0, \quad s_1 \nu_2^{(0)} - s_2 \nu_1^{(0)} + (C_2 - C_1) \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} = 0).$$

Последнее условие изучается с помощью нового параметра β_0 : $s_1 - C_1 \nu_1^{(0)} = \beta_0 \nu_1^{(0)}$, $s_2 - C_2 \nu_2^{(0)} = \beta_0 \nu_2^{(0)}$, для которого имеет место уравнение

$$\frac{s_1^2}{(\beta_0 + C_1)^2} + \frac{s_2^2}{(\beta_0 + C_2)^2} - 1 = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что уравнение (21) имеет по крайней мере два действительных корня. По аналогии со случаем (21), в общем случае из (20) получим

$$\nu_i^{(0)} = \frac{s_i}{\beta_0 - C_i} \quad (i = \overline{1,3}), \quad \frac{s_1^2}{(\beta_0 + C_1)^2} + \frac{s_2^2}{(\beta_0 + C_2)^2} + \frac{s_3^2}{(\beta_0 + C_3)^2} - 1 = 0. \quad (22)$$

Очевидно, что уравнение (22), как и уравнение (21), имеет не менее двух действительных корней относительно параметра β_0 .

Вариант $\boldsymbol{\lambda} \neq B \boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\mathbf{s} = C \boldsymbol{\nu}^{(0)}$ симметричен рассмотренному выше. Для него из равенства (17) следуют условия

$$\begin{aligned} \lambda_2 \nu_3^{(0)} - \lambda_3 \nu_2^{(0)} + (B_3 - B_2) \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} &= 0, \\ \lambda_3 \nu_1^{(0)} - \lambda_1 \nu_3^{(0)} + (B_1 - B_3) \nu_3^{(0)} \nu_1^{(0)} &= 0, \\ \lambda_1 \nu_2^{(0)} - \lambda_2 \nu_1^{(0)} + (B_2 - B_1) \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\nu_i^{(0)} = \frac{\lambda_i}{C_i}$ ($i = \overline{1,3}$). Если полагать, что $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, то матрица $C = 0$ и тогда уравнения (23) необходимо изучать независимо от условия $\mathbf{s} = C\boldsymbol{\nu}^{(0)}$. При этом опять имеют место три подслучая

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \nu_2^{(0)} = 0, \quad \nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)} = \pm 1, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 = 0, \quad \nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)} = \frac{\lambda_1}{\beta_0 - B_1}, \quad \nu_2^{(0)} = \frac{\lambda_2}{\beta_0 - B_2}, \\ \frac{\lambda_1^2}{(\beta_0 - B_1)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(\beta_0 - B_2)^2} - 1 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\nu_i^{(0)} = \frac{\lambda_i}{\beta_0 - B_i}, \quad \frac{\lambda_1^2}{(\beta_0 - B_1)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(\beta_0 - B_2)^2} + \frac{\lambda_3^2}{(\beta_0 - B_3)^2} - 1 = 0. \quad (26)$$

Для варианта $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ из (23) получим либо случай Клебша: $B_3 = B_2 = B_1$, либо случай $\nu_1^{(0)} = \pm 1, \nu_2^{(0)} = 0, \nu_3^{(0)} = 0$, либо случай $\nu_3^{(0)} = 0, \nu_1^{(0)2} + \nu_2^{(0)2} = 1, B_2 = B_1$. Все указанные выше результаты будут учтены при исследовании характеристического уравнения системы первого приближения.

Случай $A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} = \mathbf{0}$. Тогда

$$A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} = ((A_2 - A_3)\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}, (A_3 - A_1)\nu_3^{(0)}\nu_1^{(0)}, (A_1 - A_2)\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}) = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Исключая вариант (16), без ограничения общности положим, что $A_2 - A_3 \neq 0$. При этом равенство (27) выполняется в следующих двух случаях:

$$\nu_2^{(0)} = 0, \quad \nu_3^{(0)} = 0, \quad (\nu_1^{(0)} = \pm 1), \quad (28)$$

$$\nu_3^{(0)} = 0, \quad \nu_1^{(0)2} + \nu_2^{(0)2} = 1, \quad A_2 = A_1. \quad (29)$$

Если выполняются равенства (27), то уравнение (15) принимает вид (17). Следовательно, все результаты, полученные выше (см. формулы (17)–(22)), сохраняются и при условиях (29).

Случай $A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} \neq \mathbf{0}$. Умножим левую часть равенства (15) скалярно на векторы $A\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}$:

$$\omega_0[(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)})] = -A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \cdot [\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)})], \quad (30)$$

$$\omega_0[(\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)})] = -(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot [\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)})], \quad (31)$$

$$\omega_0^2[(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)})] = (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot [\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)})]. \quad (32)$$

Очевидно, что равенства (30)–(32) зависимы, но использование их в дальнейшем упростит получение окончательного результата.

Из равенства (15) следует, что при принятом условии $A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} \neq 0$ одновременно равенства $\boldsymbol{\lambda} = B\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\mathbf{s} = C\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ выполняться не могут. Поэтому вначале предположим, что выполняется равенство $\boldsymbol{\lambda} = B\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ или

$$\lambda_i = B\nu_i^{(0)} \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (33)$$

В силу равенств (33) из (15) получим

$$(\omega_0^2 A\boldsymbol{\nu}^{(0)} + \mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} = 0. \quad (34)$$

Умножив скалярно левую часть (34) на вектор $A\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, имеем уравнение

$$(\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}) = 0. \quad (35)$$

Распишем (35) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} (s_1 - C_1\nu_1^{(0)})(A_2 - A_3)\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)} + (s_2 - C_2\nu_2^{(0)})(A_3 - A_1)\nu_3^{(0)}\nu_1^{(0)} + \\ + (s_3 - C_3\nu_3^{(0)})(A_1 - A_2)\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\nu_i^{(0)} = \frac{\lambda_i}{B_i}$ ($i = \overline{1, 3}$). Следовательно, при условиях (33) вращение гиростата происходит вокруг оси с единичным вектором $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = B^{-1}\boldsymbol{\lambda}$, $(B^{-1}\boldsymbol{\lambda})^2 = 1$, с произвольной угловой скоростью. При этом параметры задачи удовлетворяют условию (36), в котором $\nu_i^{(0)} = \frac{\lambda_i}{B_i}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Рассмотрим случай $\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)} = \mathbf{0}$. Из (15) для данного варианта имеем (полагаем $\omega_0 \neq 0$)

$$(\omega_0 A\boldsymbol{\nu}^{(0)} + \boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \times \boldsymbol{\nu}^{(0)} = 0. \quad (37)$$

Сформулируем, по аналогии со случаем (33), окончательный результат. Равномерное вращение гиростата происходит вокруг вектора $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = C^{-1}\mathbf{s}$, а параметры задачи удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - B_1\nu_1^{(0)})(A_2 - A_3)\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)} + (\lambda_2 - B_2\nu_2^{(0)})(A_3 - A_1)\nu_3^{(0)}\nu_1^{(0)} + \\ + (\lambda_3 - B_3\nu_3^{(0)})(A_1 - A_2)\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\nu_i^{(0)} = \frac{s_i}{C_i}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Таким образом, в рассмотренных случаях направляющая линия конуса осей равномерных вращений гиростата вырождается в точку, координаты которой указаны выше.

Изучим общий случай: $\boldsymbol{\lambda} \neq B\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\mathbf{s} \neq C\boldsymbol{\nu}^{(0)}$. Поскольку рассматриваем вариант $A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \nparallel \boldsymbol{\nu}^{(0)}$, то обозначим плоскость, которая содержит векторы

$A\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$, через α . Если в равенствах (30)–(32) предположить, что вектор $\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ содержится в плоскости α , то и вектор $\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ будет лежать в этой плоскости и наоборот. Следовательно, при выполнении данных условий из системы (30)–(32) получим

$$(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}) = 0, \quad (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}) = 0. \quad (39)$$

В скалярной форме равенства (39) приводятся к условиям (36), (38), которые необходимо рассматривать совместно с условием $\nu_1^{(0)^2} + \nu_2^{(0)^2} + \nu_3^{(0)^2} = 1$. Разрешимость условий (36), (38) может быть показана на двух примерах. Пусть $\nu_2^{(0)} = \nu_3^{(0)} = 0$, $\nu_1^{(0)^2} = 1$; тогда (36), (38) становятся тождествами. Второй пример также очевиден: при условии, что векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ коллинеарны ($\mathbf{s} = \mu_0 \boldsymbol{\lambda}$), а матрицы C и B удовлетворяют ограничению $C = \mu_0 B$, то уравнение (38) будет следствием уравнения (36). То есть множество осей равномерных вращений гиростата должно удовлетворять только уравнению (36), которое является алгебраическим уравнением третьего порядка.

В общем случае из (30), (31) получим

$$\omega_0 = \frac{\Pi_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}{\Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})} = \frac{G_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}{\Pi_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times A\boldsymbol{\nu}^{(0)}), \quad \Pi_2 = (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}), \\ G_1 &= (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot [(\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^{(0)}) \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}]. \end{aligned} \quad (41)$$

Из (40) следует уравнение

$$\Pi_1^2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) - G_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})\Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) = 0, \quad (42)$$

которое описывает множество осей равномерных вращений гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$. Для нахождения направляющей линии на сфере Пуассона необходимо уравнение (42) рассматривать совместно с уравнением сферы $\nu_1^{(0)^2} + \nu_2^{(0)^2} + \nu_3^{(0)^2} = 1$.

Поверхность (42) отличается от поверхностей для случаев движения тяжелого твердого тела, которая получена Б.К. Млодзеевским [28] и О. Штауде [29] (в некоторых публикациях ссылка на работу [28] отсутствует, хотя обе статьи опубликованы в одном году). Устойчивость данных движений изучалась во многих публикациях (см., например, [30–32]).

В задаче о движении тяжелого гиростата конус осей равномерных вращений получен П.В. Харламовым [33], в статье [34] изучены свойства направляющей линии этого конуса (в обзорной монографии [27] указаны методы исследования данной кривой и статьи по смежной тематике). Устойчивость равномерных вращений гиростата исследована в статьях [35, 36].

Запишем (41), (42) в скалярном виде

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & s_1\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_3 - A_2) + s_2\nu_1^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_1 - A_3) + s_3\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}(A_2 - A_1) + \\ & + \nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}[A_1(C_3 - C_2) + A_2(C_1 - C_3) + A_3(C_2 - C_1)], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \lambda_1\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_3 - A_2) + \lambda_2\nu_1^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_1 - A_3) + \lambda_3\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}(A_2 - A_1) + \\ & + \nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}[A_1(B_2 - B_3) + A_2(B_3 - B_1) + A_3(B_1 - B_2)], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \{s_1\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_3 - A_2) + s_2\nu_1^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_1 - A_3) + s_3\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}(A_2 - A_1) + \\ & + \nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}[A_1(C_3 - C_2) + A_2(C_1 - C_3) + A_3(C_2 - C_1)]\}^2 - \\ & - \{\nu_1^{(0)}(\lambda_2s_3 - \lambda_3s_2) + \nu_2^{(0)}(\lambda_3s_1 - \lambda_1s_3) + \nu_3^{(0)}(\lambda_1s_2 - \lambda_2s_1) + \\ & + [s_1(B_2 - B_3) - \lambda_1(C_2 - C_3)]\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)} + [s_2(B_3 - B_1) - \\ & - \lambda_2(C_3 - C_1)]\nu_3^{(0)}\nu_1^{(0)} + [s_3(B_1 - B_2) - \lambda_3(C_1 - C_2)]\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)} + \\ & + \nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}[B_1(C_2 - C_3) + B_2(C_3 - C_1) + B_3(C_1 - C_2)]\} * \\ & * \{\lambda_1\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_3 - A_2) + \lambda_2\nu_1^{(0)}\nu_3^{(0)}(A_1 - A_3) + \lambda_3\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}(A_2 - A_1) + \\ & + \nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}\nu_3^{(0)}[B_1(A_2 - A_3) + B_2(A_3 - A_1) + B_3(A_1 - A_2)]\} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Из уравнения (45) следует, что множество осей равномерных вращений гиригостата описывается алгебраическим уравнением шестого порядка.

3. Уравнения в вариациях. Характеристическое уравнение. Для рассмотрения уравнений равномерных движений гиригостата в вариациях уравнение (15) параметризуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_0\nu_1^{(0)} &= \omega_0^2 A_1\nu_1^{(0)} + \omega_0(\lambda_1 - B_1\nu_1^{(0)}) + s_1 - C_1\nu_1^{(0)}, \\ \epsilon_0\nu_2^{(0)} &= \omega_0^2 A_2\nu_2^{(0)} + \omega_0(\lambda_2 - B_2\nu_2^{(0)}) + s_2 - C_2\nu_2^{(0)}, \\ \epsilon_0\nu_3^{(0)} &= \omega_0^2 A_3\nu_3^{(0)} + \omega_0(\lambda_3 - B_3\nu_3^{(0)}) + s_3 - C_3\nu_3^{(0)}, \end{aligned} \quad (46)$$

где ϵ_0 – параметр.

Исследование асимптотических движений гиригостата к равномерным вращениям будем проводить стандартным методом. Введем возмущения Ω и γ :

$$\omega = \omega_0\nu^{(0)} + \Omega, \quad \nu = \nu^{(0)} + \gamma. \quad (47)$$

Подставим ω и ν в уравнения (12) и рассмотрим линейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 = & \frac{(A_2 - A_3)\omega_0\nu_3^{(0)} - \lambda_3 + B_3\nu_3^{(0)}}{A_1}\Omega_2 + \frac{(A_2 - A_3)\omega_0\nu_2^{(0)} + \lambda_2 - B_2\nu_2^{(0)}}{A_1}\Omega_3 + \\ & + \frac{(C_3 - C_2)\nu_3^{(0)} - s_3 + B_2\omega_0\nu_3^{(0)}}{A_1}\gamma_2 + \frac{(C_3 - C_2)\nu_2^{(0)} + s_2 + B_3\omega_0\nu_2^{(0)}}{A_1}\gamma_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_2 = & \frac{(A_3 - A_1)\omega_0\nu_3^{(0)} + \lambda_3 - B_3\nu_3^{(0)}}{A_2}\Omega_1 + \frac{(A_3 - A_1)\omega_0\nu_1^{(0)} - \lambda_1 + B_1\nu_1^{(0)}}{A_2}\Omega_3 + \\ & + \frac{(C_1 - C_3)\nu_3^{(0)} + s_3 + B_1\omega_0\nu_3^{(0)}}{A_2}\gamma_1 + \frac{(C_1 - C_3)\nu_1^{(0)} - s_1 - B_3\omega_0\nu_1^{(0)}}{A_3}\gamma_3, \quad (48)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_3 = & \frac{(A_1 - A_2)\omega_0\nu_2^{(0)} - \lambda_2 + B_2\nu_2^{(0)}}{A_3}\Omega_1 + \frac{(A_1 - A_2)\omega_0\nu_1^{(0)} + \lambda_1 - B_1\nu_1^{(0)}}{A_3}\Omega_2 + \\ & + \frac{(C_2 - C_1)\nu_2^{(0)} - s_2 - B_1\omega_0\nu_2^{(0)}}{A_3}\gamma_1 + \frac{(C_2 - C_1)\nu_1^{(0)} + s_1 + B_2\omega_0\nu_1^{(0)}}{A_3}\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 = & -\nu_3^{(0)}\Omega_2 + \nu_2^{(0)}\Omega_3 + \omega_0\nu_3^{(0)}\gamma_2 - \omega_0\nu_2^{(0)}\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_2 = & \nu_3^{(0)}\Omega_1 - \nu_1^{(0)}\Omega_3 - \omega_0\nu_3^{(0)}\gamma_1 + \omega_0\nu_1^{(0)}\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_3 = & -\nu_2^{(0)}\Omega_1 + \nu_1^{(0)}\Omega_2 + \omega_0\nu_2^{(0)}\gamma_1 - \omega_0\nu_1^{(0)}\gamma_2.\end{aligned} \quad (49)$$

Для применения теории Ляпунова, которая изложена в п. 1 и характеризуется соотношениями (1)–(11), отметим, что система (48), (49) – правильная и поэтому необходимо найти ее характеристическое уравнение. Для этого из равенств (46) представим s_i в виде

$$s_i = -\nu_i^{(0)}\epsilon_i - \omega_0\lambda_i, \quad (50)$$

где

$$\epsilon_i = \omega_0^2 A_i - \omega_0 B_i - C_i^* \quad (C_i^* = C_i + \epsilon_0). \quad (51)$$

Поскольку правая часть первого уравнения из (12) содержит матрицу C только в векторном произведении $\boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}$, то она определяется с точностью до постоянной. В случае (51) такой постоянной является величина ϵ_0 (вспомогательная постоянная).

Кроме этого, для преобразований используем формулу Шура

$$\begin{vmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix} = |G_1 G_4 - G_2 G_1 - G_3 G_4|. \quad (52)$$

Матрицы G_3 и G_4 запишем для системы (49) следующим образом:

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3^{(0)} & \nu_2^{(0)} \\ \nu_3^{(0)} & 0 & -\nu_1^{(0)} \\ -\nu_2^{(0)} & \nu_1^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} -\mu & \omega_0\nu_3^{(0)} & -\omega_0\nu_2^{(0)} \\ -\omega_0\nu_3^{(0)} & -\mu & \omega_0\nu_1^{(0)} \\ \omega_0\nu_2^{(0)} & -\omega_0\nu_1^{(0)} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы G_1 , G_2 для системы (48) приводить не будем в силу их громоздкости.

Запишем окончательный результат

$$\mu^2(\mu^4 + a\mu^2 + b) = 0. \quad (53)$$

Здесь

$$a = -\frac{1}{A_1 A_2 A_3} [E_1 A_2 A_3 + E_2 A_3 A_1 + E_3 A_1 A_2 - (A_1 \beta_1^2 + A_2 \beta_2^2 + A_3 \beta_3^2)], \quad (54)$$

$$\begin{aligned} b = & \frac{1}{A_1 A_2 A_3} [E_1 E_3 A_2 + E_2 E_1 A_3 + E_3 E_2 A_1 + 2(\epsilon_1 \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} \beta_2 \beta_3 + \\ & + \epsilon_2 \nu_3^{(0)} \nu_1^{(0)} \beta_3 \beta_1 + \epsilon_3 \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} \beta_1 \beta_2) - (E_1 \beta_1^2 + E_2 \beta_2^2 + E_3 \beta_3^2) - \\ & - (A_1 \epsilon_1^2 \nu_2^{(0)2} \nu_3^{(0)2} + A_2 \epsilon_2^2 \nu_3^{(0)2} \nu_1^{(0)2} + A_3 \epsilon_3^2 \nu_1^{(0)2} \nu_2^{(0)2})], \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \nu_1^{(0)} [\omega_0 (A_2 + A_3 - A_1) + B_1] - \lambda_1, \\ \beta_2 &= \nu_2^{(0)} [\omega_0 (A_3 + A_1 - A_2) + B_2] - \lambda_2, \\ \beta_3 &= \nu_3^{(0)} [\omega_0 (A_1 + A_2 - A_3) + B_3] - \lambda_3, \end{aligned} \quad (56)$$

$$E_1 = \epsilon_2 \nu_3^{(0)2} + \epsilon_3 \nu_2^{(0)2}, \quad E_2 = \epsilon_3 \nu_1^{(0)2} + \epsilon_1 \nu_3^{(0)2}, \quad E_3 = \epsilon_1 \nu_2^{(0)2} + \epsilon_2 \nu_1^{(0)2}. \quad (57)$$

В параметризации (46) случай $C = 0$ является особым. Уравнения (30)–(32) имеют место в предположении $\lambda \neq 0$, $B \neq 0$. При $\lambda = 0$, $B = 0$, $C = 0$ приходим к уравнениям Эйлера–Пуассона.

Результат исследования уравнений Эйлера–Пуассона в задаче о равномерных вращениях тела [28, 29] запишем в векторном виде

$$\mathbf{s} \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}) = 0, \quad \omega_0 [(\mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}) \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)})] = -(\mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)})^2. \quad (58)$$

Пусть в равенствах (30)–(32) $B = 0$, $C = 0$, $\lambda \neq 0$. Этот случай – равномерное вращение гиростата – изучен П.В. Харламовым [33]. В силу (40)–(42) получим

$$\omega_0 = \frac{\Pi_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}{\Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}, \quad (59)$$

$$\Pi_1^2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) - \Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) G_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) = 0,$$

где

$$\Pi_1 = \mathbf{s} \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}), \quad \Pi_2 = \lambda \cdot (A\boldsymbol{\nu}^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}), \quad G_1 = \lambda \cdot (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}^{(0)}). \quad (60)$$

Соотношения (59), (60) изучены А.М. Ковалевым [34], А.М. Ковалевым и А.М. Кисилевым [35]

4. Асимптотически-равномерные движения тяжелого твердого тела под действием сил Лоренца. Рассмотрим случай, когда на тяжелое твердое тело действуют силы Лоренца: $\lambda = 0$, $C = 0$. Тогда из (40), (42), (45) найдем

$$\omega_0 = \frac{\Pi_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}{\Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)})}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) &= s_1 \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} (A_3 - A_2) + s_2 \nu_1^{(0)} \nu_3^{(0)} (A_1 - A_3) + \\ &+ s_3 \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} (A_2 - A_1), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}) &= \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} [A_1(B_2 - B_3) + A_2(B_3 - B_1) + A_3(B_1 - B_2)], \\ [s_1 \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} (A_3 - A_2) + s_2 \nu_1^{(0)} \nu_3^{(0)} (A_1 - A_3) + s_3 \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} (A_2 - A_1)]^2 + \\ &+ \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} [A_1(B_2 - B_3) + A_2(B_3 - B_1) + A_3(B_1 - B_2)] \times \\ &\times [s_1 \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} (B_2 - B_3) + s_2 \nu_1^{(0)} \nu_3^{(0)} (B_3 - B_1) + s_3 \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} (B_1 - B_2)]. \end{aligned} \quad (63)$$

В частных случаях, наряду с уравнениями (61)–(63), можно использовать равенства (46) при $\lambda_i = 0$, $C_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nu_1^{(0)} &= \omega_0 (\omega_0 A_1 - B_1) \nu_1^{(0)} + s_1, \\ \epsilon_0 \nu_2^{(0)} &= \omega_0 (\omega_0 A_2 - B_2) \nu_2^{(0)} + s_2, \\ \epsilon_0 \nu_3^{(0)} &= \omega_0 (\omega_0 A_3 - B_3) \nu_3^{(0)} + s_3. \end{aligned} \quad (64)$$

Исключим в уравнениях (64) параметр ϵ_0 :

$$\begin{aligned} \omega_0 \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} [\omega_0 (A_2 - A_1) - (B_2 - B_1)] - s_1 \nu_2^{(0)} + s_2 \nu_1^{(0)} &= 0, \\ \omega_0 \nu_2^{(0)} \nu_3^{(0)} [\omega_0 (A_3 - A_1) - (B_3 - B_2)] - s_2 \nu_3^{(0)} + s_3 \nu_2^{(0)} &= 0, \\ \omega_0 \nu_3^{(0)} \nu_1^{(0)} [\omega_0 (A_1 - A_2) - (B_1 - B_3)] - s_3 \nu_1^{(0)} + s_1 \nu_3^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Можно показать, что из равенств (65) следуют равенства (61)–(63). Применение уравнений (64) удобно при изучении характеристического уравнения (53).

Рассмотрим **пример**: $\nu_2^{(0)} = 0$, $\nu_3^{(0)} = 0$, $\nu_1^{(0)} = \pm 1$. Тогда из условий (64) получим

$$s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \epsilon_0 = \omega_0^2 A_1 - \omega_0 B_1 + s_1 \nu_1^{(0)}. \quad (66)$$

Запишем характеристическое уравнение (53)

$$\mu^2 (\mu^4 + a \mu^2 + b) = 0, \quad (67)$$

где

$$a = \frac{1}{A_2 A_3} \{ \omega_0^2 [2A_2 A_3 + A_1 (A_1 - A_2 - A_3)] + \omega_0 [A_2 B_2 + A_3 B_3 + B_1 (A_2 + A_3 - 2A_1)] + B_1^2 + s_1 \nu_1^{(0)} (A_2 + A_3) \}, \quad (68)$$

$$b = \frac{1}{A_2 A_3} [\omega_0^2 (A_2 - A_1) - \omega_0 (B_2 - B_1) - s_1 \nu_1^{(0)}] \times \\ \times [\omega_0^2 (A_3 - A_1) - \omega_0 (B_3 - B_1) - s_1 \nu_1^{(0)}]. \quad (69)$$

Обозначим $\mu^2 = z$, тогда, опуская нулевой корень, из уравнения (67) получим

$$z^2 + az + b = 0. \quad (70)$$

Рассмотрим (68)–(70) при больших значениях угловой скорости ω_0 . Обозначим через D дискриминант уравнения (70). Приведем значения a , b и D к виду

$$a = \frac{1}{A_2 A_3} \left\{ [2A_2 A_3 - A_1 (A_2 + A_3 - A_1)] \omega_0^2 + \dots \right\}, \quad (71)$$

$$b = \frac{1}{A_2 A_3} [(A_2 - A_1)(A_3 - A_1) \omega_0^4 + \dots], \quad (72)$$

$$D = A_1^2 (A_2 + A_3 - A_1)^2 \omega_0^4 + \dots \quad (73)$$

Многоточием в формулах (71)–(73) обозначены члены более низкого порядка относительно ω_0 . Из формулы (73) следует, что $D > 0$, значит, корни уравнения (67) действительны.

Моменты инерции при этом могут удовлетворять условиям

$$A_1 < A_2 < A_3 \quad (b > 0, z_1 z_2 > 0), \quad (74)$$

$$A_2 < A_1 < A_3 \quad (b < 0, z_1 z_2 < 0), \quad (75)$$

$$A_2 < A_3 < A_1 \quad (b > 0, z_1 z_2 > 0). \quad (76)$$

При выполнении условий (75) уравнение (70) имеет корни z_1, z_2 с противоположными знаками. Пусть $z_1 > 0, z_2 < 0$. Из равенства $\mu^2 = z$ получим $\mu_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}, \mu_{3,4} = \pm i \sqrt{z_2}$. Следовательно, в данном случае уравнение (67) имеет отрицательный корень: $-\sqrt{z_1}$, который позволяет, на основании результатов А.М. Ляпунова [10], сделать вывод о том, что нелинейная система в возмущениях для рассматриваемых равномерных вращений $\omega^{(0)} = \omega_0(\nu_1^{(0)}, 0, 0)$ имеет решение вида (7), в котором $\alpha_1 \neq 0, \alpha_i = 0 (i \neq 1)$, и она описывает асимптотически-равномерное движение тяжелого твердого тела под действием силы Лоренца. Отметим, что в силу (64) равномерное вращение тела происходит вокруг средней оси эллипсоида инерции тела, а ряд Ляпунова (7) зависит только от одной произвольной постоянной α_1 (однопараметрический ряд).

Рассмотрим случаи (74), (76). Введем безразмерные параметры $a_1 = \frac{A_1}{A_3}$, $a_2 = \frac{A_2}{A_3}$. Тогда условия (74), (76) можно записать в виде

$$a_1 < a_2 < 1, \quad a_2 < 1 < a_1. \quad (77)$$

Знак величины (71) зависит от знака параметра

$$\kappa_0 = a_2(2 - a_1) + a_1(a_1 - 1). \quad (78)$$

Можно показать, что при выполнении неравенств (77) параметр (78) отрицателен. Это означает, что в данном случае асимптотически-равномерные движения по Ляпунову отсутствуют.

Предположим, что параметры ω_0 и B_1 являются малыми. Тогда из (68), (69) найдем

$$a = \frac{s_1 \nu_1^{(0)} (A_2 + A_3)}{A_2 A_3} + \dots, \quad b = \frac{s_1}{A_2 A_3} + \dots, \quad D = \frac{s_1^2 (A_2 - A_3)^2}{A_2^2 A_3^2} + \dots, \quad (79)$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от малых параметров ω_0 , B_1 , которыми мы пренебрегаем. Без ограничения общности полагаем $s_1 > 0$. Если в (79) величина $\nu_1^{(0)} = 1$, то уравнение (67) имеет два нулевых корня и четыре мнимых. То есть в этом случае асимптотических решений системы уравнений в возмущениях по Ляпунову не существует. Пусть $\nu_1^{(0)} = -1$, тогда уравнение (70) имеет два действительных положительных корня z_1 и z_2 . Следовательно, уравнение (67) имеет два отрицательных корня $-\sqrt{z_1}$ и $-\sqrt{z_2}$, а система уравнений в возмущениях для равномерных вращений имеет двухпараметрический ряд А.М. Ляпунова (7), который в данном случае имеет вид

$$y_i = \sum_{(m_1+m_2=m), m=1}^{\infty} L_i^{(m_1, m_2)}(t) \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} e^{(-m_1 \sqrt{z_1} - m_2 \sqrt{z_2})}, \quad (80)$$

где α_1 , α_2 – произвольные постоянные, $L_i^{(m_1, m_2)}(t)$ – функции, характеристические числа которых не менее нуля, m_1 и m_2 – натуральные числа или нули.

Таким образом, приведены два примера асимптотически-равномерных движений тяжелого гиростата под действием сил Лоренца. Они согласуются с результатами, полученными в классической задаче [30–33].

Замечание. Представляет интерес задача об исследовании влияния гиросtatического момента на полученные выше результаты. Для этой цели рассмотрим случай $\nu_2^{(0)} = 0$, $\nu_3^{(0)} = 0$, $\nu_1^{(0)} = \pm 1$. Тогда из соотношений (46) следует

$$\omega_0 \lambda_2 + s_2 = 0, \quad \omega_0 \lambda_3 + s_3 = 0. \quad (81)$$

Для изучения случая произвольной угловой скорости положим в (81) $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Учтем указанные предположения в (54)–(57). Вычислим из (51), (56) ϵ_i , β_i ($i = \overline{1, 3}$), а ϵ_0 – из первого уравнения системы (46):

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \omega_0^2 A_1 - \omega_0 B_1 + (\omega_0 \lambda_1 + s_1) \nu_1^{(0)}, \\ \epsilon_2 &= \omega_0^2 (A_2 - A_1) - \omega_0 (B_2 - B_1) - (\omega_0 \lambda_1 + s_1) \nu_1^{(0)}, \\ \epsilon_3 &= \omega_0^2 (A_3 - A_1) - \omega_0 (B_3 - B_1) - (\omega_0 \lambda_1 + s_1) \nu_1^{(0)}, \\ \beta_2 &= \beta_3 = 0, \quad \beta_1 = \nu_1^{(0)} [\omega_0 (A_2 + A_3 - A_1) + B_1] - \lambda_1.\end{aligned}\tag{82}$$

Если в соотношениях (54), (55) учесть равенства $\nu_1^{(0)} = \pm 1$, $\nu_2^{(0)} = 0$, $\nu_3^{(0)} = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ и рассмотреть, как было принято выше, варианты: угловая скорость ω_0 принимает большие значения по сравнению с другими параметрами; ω_0 , λ_1 , B_1 являются малыми, то приходим к результату, который получен для случая $\lambda_1 = 0$.

5. Асимптотически-равномерные движения твердого тела под действием потенциальных сил. Рассмотрим случай $\lambda_i = 0$, $B_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$) и положим, что равномерное вращение тела происходит относительно первой главной оси подвижной системы координат: $\nu_1^{(0)} = \pm 1$, $\nu_2^{(0)} = 0$, $\nu_3^{(0)} = 0$. Запишем равенства (46), (51) при данных условиях:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \omega_0^2 A_1 - C_1 + s_1 \nu_1^{(0)}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \\ \epsilon_2 &= \omega_0^2 (A_2 - A_1) + C_1 - C_2 - s_1 \nu_1^{(0)}, \\ \epsilon_3 &= \omega_0^2 (A_3 - A_1) + C_1 - C_3 - s_1 \nu_1^{(0)}.\end{aligned}\tag{83}$$

На основании (54)–(57), (83) найдем коэффициенты уравнения (53)

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{A_2 A_3} \{ \omega_0^2 [2A_2 A_3 - A_1 (A_2 + A_3 - A_1)] + A_2 (C_2 - C_1) + \\ &\quad + A_3 (C_3 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)} (A_2 + A_3) \},\end{aligned}\tag{84}$$

$$b = \frac{1}{A_2 A_3} [\omega_0^2 (A_2 - A_1) + C_1 - C_2 - s_1 \nu_1^{(0)}] [\omega_0^2 (A_3 - A_1) + C_1 - C_3 - s_1 \nu_1^{(0)}].$$

Вычислим дискриминант уравнения

$$z^2 + az + b = 0,\tag{85}$$

используя равенства (84):

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{A_2^2 A_3^2} \{ \omega_0^4 A_1^2 (A_2 + A_3 - A_1)^2 + 2\omega_0^2 (A_2 + A_3 - A_1) [A_2 (C_2 - C_1) \times \\ &\quad \times (2A_3 - A_1) + A_3 (C_3 - C_1) (2A_2 - A_1) + (4A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) \times \\ &\quad \times s_1 \nu_1^{(0)}] + [A_2 (C_2 - C_1) - A_3 (C_3 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)} (A_2 - A_3)]^2 \}.\end{aligned}\tag{86}$$

Для сопоставления полученных ранее результатов и результатов, которые следуют из анализа уравнений (84), (85), положим вначале, что угловая скорость ω_0 превосходит значения всех параметров задачи. Поскольку в случаях (84)–(86) и (71)–(73) коэффициенты при ω_0^2 , ω_0^4 совпадают, то для уравнений (85) и (70) выводы о корнях этих уравнений тоже совпадают. То есть существует асимптотический ряд Ляпунова, который описывает асимптотически-равномерное движение твердого тела под действием потенциальных сил (силы тяжести и ньютоновской силы). Отметим, что в данном варианте $s \parallel \nu^{(0)}$, т. е. равномерное вращение происходит вокруг вектора s .

Рассмотрим соотношения (84) при малых значениях ω_0 . Из формулы (86) следует, что $D > 0$, т. е. корни уравнения (85) действительны. Запишем (84), (85) в виде

$$a = \frac{1}{A_2 A_3} [A_2(C_2 - C_1) + A_3(C_3 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)}(A_2 + A_3)] + \dots, \quad (87)$$

$$b = \frac{1}{A_2 A_3} [C_2 - C_1 + s_1 \nu_1^{(0)}][C_3 - C_1 + s_1 \nu_1^{(0)}] + \dots \quad (88)$$

Если разности $C_2 - C_1$, $C_3 - C_1$ малы по сравнению со значениями параметров s_1 , A_2 , A_3 , то получаем известный случай: при $\nu_1^{(0)} = 1$ асимптотические решения нелинейной системы по Ляпунову отсутствуют; при $\nu_1^{(0)} = -1$ имеют место асимптотически-равномерные движения тела, которые описываются двухпараметрическими рядами Ляпунова вида (80).

Приведем другие варианты решения уравнения (85), которые возникают при выполнении соотношений (87), (88). Пусть выполняются условия

$$C_3 < C_2 < C_1, \quad \nu_1^{(0)} = -1. \quad (89)$$

В силу (89) уравнение (85) имеет два действительных корня $z_1 > 0$, $z_2 > 0$. Тогда $\mu_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}$, $\mu_{3,4} = \pm \sqrt{z_2}$, т. е. получим двухпараметрический асимптотический ряд Ляпунова, который описывает асимптотически-равномерные движения тела относительно вектора $(-1, 0, 0)$.

Однопараметрический ряд Ляпунова можно получить при выполнении неравенств $C_1 > C_2$, $C_1 > C_3$ и в предположении, что параметр s_1 мал по сравнению с другими параметрами.

6. Общий случай вращения гиристора относительно главной оси инерции. Пусть в уравнениях (46), (54)–(57) $\nu_2^{(0)} = 0$, $\nu_3^{(0)} = 0$, $\nu_1^{(0)} = \pm 1$:

$$\epsilon_0 = \omega_0^2 A_1 - \omega_0 B_1 - C_1 + (s_1 + \omega_0 \lambda_1) \nu_1^{(0)}, \quad (90)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad (91)$$

$$\epsilon_2 = \omega_0^2 (A_2 - A_1) - \omega_0 (B_2 - B_1) + (C_1 - C_2) - (s_1 + \omega_0 \lambda_1) \nu_1^{(0)}, \quad (92)$$

$$\epsilon_3 = \omega_0^2 (A_3 - A_1) - \omega_0 (B_3 - B_1) + (C_1 - C_3) - (s_1 + \omega_0 \lambda_1) \nu_1^{(0)}, \quad (93)$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_1 = \nu^{(0)}[\omega_0(a_2 + A_3 - A_1) + B_1] - \lambda_1. \quad (94)$$

Отметим, что равенства (91) приняты для того, чтобы не получать ограничение на угловую скорость ω_0 (то есть равномерное вращение гиростата может происходить с любой угловой скоростью). Запишем (53)–(55) при условиях (90)–(94), полагая, как и ранее, $\mu = z \neq 0$. Тогда имеем

$$z^2 + az + b = 0, \quad (95)$$

где

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{A_2 A_3} \{ & \omega_0^2 [2A_2 A_3 - A_1(A_2 + A_3 - A_1)] + \omega_0 [A_2 B_2 + A_3 B_3 + \\ & + (A_2 + A_3 - 2A_1)(B_1 - \lambda_1 \nu_1^{(0)})] + (B_1 - \lambda_1 \nu_1^{(0)})^2 + A_3(C_3 - C_1) + \\ & + A_2(C_2 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)}(A_2 + A_3) \}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{A_2 A_3} [& \omega_0^2 (A_2 - A_1) - \omega_0 (B_2 - B_1) + C_1 - C_2 - (s_1 + \omega_0 \lambda_1) \nu_1^{(0)}] \times \\ & \times [\omega_0^2 (A_3 - A_1) - \omega_0 (B_3 - B_1) + C_1 - C_3 - (s_1 + \omega_0 \lambda_1) \nu_1^{(0)}]. \end{aligned} \quad (97)$$

Если рассматривать уравнение (95) с коэффициентами (96), (97) предполагая, что ω_0 является большим параметром, то получим результат, который имеет место в п. 3, 4. Однако при малых значениях угловой скорости ω_0 дискриминант уравнения (95) существенно изменяется по сравнению со случаями п. 3, 4. Действительно, при малых ω_0 из (96), (97) находим

$$\begin{aligned} D = & (B_1 - \lambda_1 \nu_1^{(0)})^4 + [A_2(C_2 - C_1) - A_3(C_3 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)}(A_2 - A_3)]^2 + \\ & + 2(B_1 - \lambda_1 \nu_1^{(0)})^2 [A_3(C_3 - C_1) + A_2(C_2 - C_1) + s_1 \nu_1^{(0)}(A_2 + A_3)] + \dots \end{aligned} \quad (98)$$

Пусть в (98) выполняются условия

$$C_3 > C_1, \quad C_2 - C_1 > 0, \quad s_1 \nu_1^{(0)} > 0. \quad (99)$$

В силу (98), (99) уравнение (95) имеет действительные корни z_1, z_2 . При малых ω_0 на основании неравенств (99) из (84) следует, что $a > 0, b > 0$. Тогда корни уравнения (95) отрицательны и ряды Ляпунова построить невозможно. Однако, при условии $B_1 = \lambda_1 \nu_1^{(0)}$, как отмечено в п. 4, ряды Ляпунова можно построить (см. формулы (87), (88)), причем в двух случаях.

Заключение. В статье рассмотрены асимптотически-равномерные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. На основании первого метода А.М. Ляпунова найдены условия существования асимптотически-равномерных вращений гиростата относительно вертикали, получена система первого приближения для данных движений, изучены условия существования у этих уравнений решений с положительными характеристическими числами. Анализ характеристического уравнения, которое получено в общем случае равномерных движений гиростата, проведен в трех

задачах: в задаче о движении тяжелого твердого тела под действием сил Лоренца; в задаче о движении твердого тела под действием потенциальных сил (силы тяжести и ньютоновских сил) и в общей задаче о движении гиростата. Для получения наглядного и сравнительного результатов полагается, что осью равномерного вращения является главная ось эллипсоида инерции гиростата, а векторы обобщенного центра масс и гиростатического момента направлены по этой оси. С помощью первого метода А.М. Ляпунова установлены два класса асимптотических решений системы в возмущениях, которые описывают асимптотически-равномерные движения гиростата.

1. *Hadamard J.* Sur certaines proprietes des trajectoires en dynamique // J. de math. Ser. 5. – 1897. – Н. 3. – Р. 331–387.
2. *Kneser A.* Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslage (Zweiter Ausfsatz) // J. reine und angew. Math. – 1897. – **11**, Н. 3. – Р. 186–223.
3. *Bohl P.* Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nahe einer Gleichgewichtslage // J. reine und angew. Math. – 1904. – **127**, Н. 3. – С. 179–276.
4. *Perron O* Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystem // Math. Zeitschrift. – 1929. – **29**, Sat. 10. – С. 147.
5. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1980. – Вып. 4. – С. 84–89.
6. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, вып. 4. – С. 573–577.
7. *Козлов В.В., Паломодов В.П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. – 1982. – **263**, № 2. – С. 285–289.
8. *Маркеев А.П.* Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, вып. 3. – С. 363–372.
9. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 29–36.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Собр. соч.; В 5 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
11. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – Избр. тр. В 2-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.
12. *Вархалев Ю.П., Горп Г.В.* Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса–Аппельерота // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 3. – С. 490–493.
13. *Брюм А.З., Горп Г.В.* Достаточные условия существования асимптотически маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 4. – С. 681–684.
14. *Брюм А.З.* Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 68–72.
15. *Горп Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26. – С. 20–28.
16. *Mettler E.* Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels // Math. Zeitschrift. – 1937. – **43**, Н. 1. – С. 59–100.
17. *Вархалев Ю.П., Горп Г.В.* Об асимптотически равномерных движениях твердого тела с одной неподвижной точкой // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1989. – Вып. 12(46). – С. 4–9.
18. *Вархалев Ю.П., Ковалев В.М.* Об асимптотически равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43–48.

19. Горр Г.В. Новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – С. 48–51.
20. Каменков Г.В. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. – Избр.тр.: в 2-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 210 с.
21. Steklov V.A. Remarque sur un probleme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indefini et sur le probleme de M. de Brun // Comp. Rend. Acad. Sci. – 1902. – **135**. – Р. 526–528.
22. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. (Статья первая). – Собр. соч.: В 2-х т. – М.; Л., 1948. – Т. 2. – С. 136–193.
23. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. (Статья вторая). – Собр. соч.: В 2-х т. – М.; Л., 1948. – Т. 2. – С. 194–311.
24. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
25. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by pontial and gyroscopic forces // J. de Mecanique theor. et appl. – 1986. – **5**, № 5. – Р. 747–762.
26. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 304 с.
27. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 407 с.
28. Млодзеевский Б.К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. Отд. физ.-мат. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **7**, вып. 1. – С. 46–48.
29. Staude O. Uber permanentte Rotationsakenbei der Bewegung des schweren unsymmetrische Kreisels // J. far reine und anngew Math. – 1894. – **113**, № 4, 5. – S. 318–334.
30. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, вып. 1. – С. 51–65.
31. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
32. Холостова О.В. Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела // Нелинейная динамика. – 2009. – **5**, № 3. – С. 357–375.
33. Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373–375.
34. Ковалев А.М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
35. Ковалев А.М., Киселев А.М. О конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 30–45.
36. Ковалев А.М., Киселев А.М. Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 46–48.

G.V. Gorr, T.V. Balaklitskaya, D.N. Tkachenko

On asymptotically uniform motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces

The article examines existence conditions for uniform and asymptotically uniform motions of a gyrostat with a fixed point under the action of potential and gyroscopic forces. Equations for variations are obtained for these motions together with their characteristic equation. Based on the first Lyapunov method, two classes of asymptotic motions of the gyrostat are established, they are motions, asymptotic to uniform rotations of the gyrostat relative to the principal axis of the ellipsoid of inertia, along which the vector of the generalized center of mass of the gyrostat and the gyrostatic moment vector are directed.

Keywords: *asymptotically uniform motions, potential and gyroscopic forces.*