ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2014. Вып. 44

УДК 531.38

©2014. **Г.А. Котов**

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА ВРАЩАЮЩИХСЯ ГИРОСКОПА

Изучены условия существования регулярных прецессий гиростата в поле силы тяжести, когда несомые тела – два вращающихся гироскопа. При заданном законе изменения гиростатического момента найдены новые решения уравнений движения.

Ключевые слова: *гиростат, регулярные прецессии.*

Задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом [1, 2] рассматривалась в двух вариантах. Первый характеризуется тем, что гиростатический момент направлен по некоторой неподвижной в теле-носителе оси. В таком предположении изучены равномерные, маятниковые и прецессионные движения [4–7]. Второй вариант характеризуется свойством, что гиростатический момент принадлежит некоторой плоскости, неизменной в теле-носителе. В нем исследованы регулярные прецессии, маятниковые и другие движения [8–10]. Данная работа посвящена исследованию регулярной прецессии тяжелого гиростата с заданным законом изменения гиростатического момента.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гиростат, несущий два гироскопа с переменным гиростатическим моментом, который находится под действием силы тяжести. Уравнения движения имеют вид [3]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{s}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; λ_1, λ_2 – дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{3}$$

где k — произвольная постоянная.

Рассмотрим прецессионные движения гиростата относительно вертикали [3]. Свяжем подвижную систему координат с единичным вектором

$\boldsymbol{a} = (0,0,1)$, который образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos\theta_0.$$

Согласно методу исследования прецессий (см., напр., [3]), векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ представимы в виде

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi,\ a_0' \cos\varphi,\ a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a} + \dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu},$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, φ и ψ — новые переменные, кинематический смысл которых состоит в том, что они могут трактоваться, как углы Эйлера.

Для случая регулярной прецессии $\dot{\varphi}(t) = n$, $\dot{\psi}(t) = m$, где n, m — некоторые константы. Тогда $\varphi = nt + \varphi_0$, $\psi = mt + \psi_0$ и выбором начальной фазы движения можно добиться $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$. Векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ примут вид

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin nt,\ a_0' \cos nt,\ a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = (a_0' m \sin nt,\ a_0' m \cos nt,\ n + a_0 m). \tag{4}$$

Уравнение (2) в силу (4) обращается в тождество. Для исследования уравнения (1) спроектируем его на три независимых вектора $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$. Поскольку

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \tag{5}$$

то после подстановки $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ из (4) в (1) и проектирования полученного уравнения на $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ найдем

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1 - \lambda_2\Big[\gamma_3 n + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)m\Big] + F_1 = 0,\\
&\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\Big[\gamma_3 n + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)m\Big] + F_2 = 0,\\
&\lambda_2\Big[\alpha_3 n + \big(a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0'\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3\big)m\Big] -\\
&\qquad -\lambda_1\Big[\beta_3 n + \big(a_0'\beta_1 \sin nt + a_0'\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3\big)m\Big] + F_3 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&F_i = A_{0,i}n^2 - \Big(A_{2,i}\cos 2nt + A_{2,i}'\sin 2nt + a_0 A_{1,i}\cos nt + a_0 A_{1,i}'\sin nt +\\
&+ \varkappa_0 A_{0,i}\Big)m^2 + nm\Big[\big(d_{1,i}' - A_{1,i}\big)\cos nt - \big(d_{1,i} + A_{1,i}'\big)\sin nt + 2a_0 A_{0,i}\Big] +\\
&+ \delta_{1,i}\cos nt + \delta_{1,i}'\sin nt + \delta_{0,i},\\
&\boldsymbol{e}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}),\ (i = 1,2,3), \quad (\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\gamma}),\\
&d_{1,i} = a_0'\big(e_{1,i}A_{12} + e_{2,i}A_{22} + e_{3,i}A_{23}\big),\\
&d_{1,i}' = a_0'\big(e_{1,i}A_{11} + e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\big),\\
&\varkappa_0 = \frac{1}{2}(a_0'^2 - 2a_0^2),\ A_{0,i} = e_{2,i}A_{13} - e_{1,i}A_{23},
\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&A_{1,i} = a_0'\Big[e_{1,i}\big(A_{22}-A_{33}\big) - e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\Big],\\
&A'_{1,i} = a_0'\Big[e_{2,i}\big(A_{33}-A_{11}\big) + e_{1,i}A_{12} - e_{3,i}A_{23}\Big],\\
&A_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\big(2e_{3,i}A_{12} - e_{1,i}A_{23} - e_{2,i}A_{13}\big),\\
&A'_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\Big[e_{2,i}A_{23} - e_{1,i}A_{13} + e_{3,i}(A_{11}-A_{22})\Big],\\
&\delta'_{1,i} = a_0'(e_{3,i}s_2 - e_{2,i}s_3),\ \ \delta_{1,i} = a_0'(e_{1,i}s_3 - e_{3,i}s_1),\\
&\delta_{0,i} = a_0\big(e_{2,i}s_1 - e_{1,i}s_2\big).
\end{aligned}
$$

Таким образом, изучение решений уравнений (1), (2) для регулярной прецессии (4) сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (6). В [10] указана методика изучения системы (6) для обобщенной задачи о движении гиростата с двумя роторами.

2. Вырожденный случай. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$, фиксированный в теле, совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}$, фиксированным в пространстве, т. е. $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{a}$. Так как при этом $a_0 = 1$, $a_0' = 0$, то угловая скорость из (4) примет вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{a}, \tag{8}$$

где $\omega_0 = n + m = \mathrm{const}$. Имеем случай вырождения регулярной прецессии в равномерное вращение относительно вертикали, который не рассмотрен в [11]. С учетом обозначений (7) перепишем систему (6) и интеграл моментов из (3).

$$
\begin{aligned}
&\dot\lambda_1 - \gamma_3\lambda_2\omega_0 + (\alpha_2A_{13} - \alpha_1A_{23})\omega_0^2 + \alpha_2s_1 - \alpha_1s_2 = 0,\\
&\dot\lambda_2 + \gamma_3\lambda_1\omega_0 + (\beta_2A_{13} - \beta_1A_{23})\omega_0^2 + \beta_2s_1 - \beta_1s_2 = 0,\\
&\omega_0(-\beta_3\lambda_1 + \alpha_3\lambda_2) + (\gamma_2A_{13} - \gamma_1A_{23})\omega_0^2 + \gamma_2s_1 - \gamma_1s_2 = 0,\\
&\alpha_3\lambda_1 + \beta_3\lambda_2 + \omega_0A_{33} = k.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Последние два уравнения из (9) служат для нахождения λ_1 и λ_2. Очевидно, что если определитель системы $\omega_0(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$ отличен от нуля, то λ_1 и λ_2 будут константами. Этот вариант не рассматриваем, так как гиростатический момент становится постоянным.

Вначале потребуем, чтобы $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$. Тогда $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ и система (9) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot\lambda_1 - \lambda_2\omega_0 + (\alpha_2A_{13} - \alpha_1A_{23})\omega_0^2 + \alpha_2s_1 - \alpha_1s_2 = 0,\\
&\dot\lambda_2 + \lambda_1\omega_0 + (\beta_2A_{13} - \beta_1A_{23})\omega_0^2 + \beta_2s_1 - \beta_1s_2 = 0,\\
&k = \omega_0A_{33}.
\end{aligned}
$$

Из первых двух уравнений найдем функции λ_1 и λ_2:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{T_2}{\omega_0},\\
&\lambda_2(t) = -c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{T_1}{\omega_0},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ и

$$
T_1 = (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})\omega_0^2 + \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2,
$$

$$
T_2 = (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})\omega_0^2 + \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2.
$$

Пусть теперь $\omega_0 = 0$. Из первого и второго уравнений системы (9) найдем

$$
\lambda_1 = -(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2)t + k_1, \qquad \lambda_2 = -(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2)t + k_2,
$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Эти выражения для λ_1 и λ_2 удовлетворяют всей системе (9) с учетом (5).

Таким образом, при $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{a}$ движение гиростата можно рассматривать как вращение вокруг вертикали с постоянной скоростью, при этом маховики, закон движения которых описывается зависимостями (10), выполняют роль стабилизаторов.

При $\omega_0 = 0$ тело-носитель неподвижен в пространстве, а функции λ_1 и λ_2, характеризующие вращение носимых гироскопов, являются, в отличие от (10), линейными функциями времени.

3. Случай $\boldsymbol{a_0' \neq 0}$. Так как вариант $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ исследован в [8], то потребуем, чтобы $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$. Пусть во все время движения гиростата выполнены зависимости

$$
\lambda_1 = f_1 \cos\varphi + f_1' \sin\varphi + f_0, \quad \lambda_2 = g_1 \cos\varphi + g_1' \sin\varphi + g_0, \tag{11}
$$

где $f_1,\ f_1',\ f_0,\ g_1,\ g_1',\ g_0$ — некоторые константы, подлежащие определению. После подстановки (7) и (11) в (6), каждое из уравнений системы (6) представляет собой тригонометрический многочлен второго порядка по переменной φ. Требование равенства этих многочленов нулю для всех φ приводит к следующей алгебраической системе на параметры задачи:

$$
a_0'(\gamma_2 g_1 - \gamma_1 g_1') + 2mA_{2,1} = 0, \quad a_0'(\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_1') + 2mA_{2,1}' = 0,
$$

$$
a_0'(\alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1) - (a_0 m + n)(\gamma_3 g_1 + mA_{1,1}) - a_0' m \gamma_2 g_0 + n f_1' + mnd_{1,1}' = 0,
$$

$$
a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2) + (a_0 m + n)(\gamma_3 g_1' + mA_{1,1}') + a_0' m \gamma_1 g_0 + n f_1 + mnd_{1,1} = 0,
$$

$$
a_0(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2) + A_{0,1}\Big((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2} a_0'^2 m^2\Big) - (a_0 m + n)\gamma_3 g_0 -
$$

$$
- \frac{a_0' m}{2}(\gamma_2 g_1 + \gamma_1 g_1') = 0,
$$

$$
\begin{gathered}
la'_0(\gamma_2 f_1 - \gamma_1 f'_1) - 2mA_{2,2} = 0,\ \ a'_0(\gamma_2 f'_1 + \gamma_1 f_1) - 2mA'_{2,2} = 0,\\
a'_0(\beta_1 s_3 - \beta_3 s_1) + (a_0 m + n)(\gamma_3 f_1 - mA_{1,2}) + a'_0 m\gamma_2 f_0 + ng'_1 + mnd'_{1,2} = 0,\\
a'_0(\beta_3 s_2 - \beta_2 s_3) + (a_0 m + n)(\gamma_3 f'_1 - mA'_{1,2}) + a'_0 m\gamma_1 f_0 - ng_1 - mnd_{1,2} = 0,\\
a_0(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2) + A_{0,2}\Big((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2}a'^2_0 m^2\Big) + (a_0 m + n)\gamma_3 f_0 +\\
+ \frac{a'_0 m}{2}(\gamma_1 f'_1 + \gamma_2 f_1) = 0,\\
a'_0(\beta_1 f'_1 - \beta_2 f_1 - \alpha_1 g'_1 + \alpha_2 g_1) - 2mA_{2,3} = 0,\\
a'_0(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g'_1 - \beta_1 f_1 - \beta_2 f'_1) - 2mA'_{2,3} = 0,\\
a'_0(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g_1 - \beta_3 f_1 - mA_{1,3}) + a'_0 m(\alpha_2 g_0 - \beta_2 f_0) +\\
+ mnd'_{1,3} = 0,\\
a'_0(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g'_1 - \beta_3 f'_1 - mA'_{1,3}) + a'_0 m(\alpha_1 g_0 - \beta_1 f_0) -\\
- mnd_{1,3} = 0,\\
a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2) + A_{0,3}\Big((a_0 m + n)^2 - \frac{1}{2}a'^2_0 m^2\Big) + (a_0 m + n)(\alpha_3 g_0 - \beta_3 f_0) +\\
+ \frac{a'_0 m}{2}(\alpha_1 g'_1 + \alpha_2 g_1 - \beta_2 f_1 - \beta_1 f'_1) = 0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Так как $a'_0 \neq 0$, то из (12) находим

$$
\begin{gathered}
g_1 = \frac{-2m(\gamma_1 A'_{2,1} + \gamma_2 A_{2,1})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \quad g'_1 = \frac{2m(\gamma_1 A_{2,1} - \gamma_2 A'_{2,1})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)},\\
f_1 = \frac{2m(\gamma_1 A'_{2,2} + \gamma_2 A_{2,2})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \quad f'_1 = \frac{2m(\gamma_2 A'_{2,2} - \gamma_1 A_{2,2})}{a'_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Из (5) для $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ вытекают очевидные соотношения

$$
\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{14}
$$

В частности, из (14) следует, что α_2, β_2, γ_2 одновременно в нуль не обращаются, поэтому составим линейную комбинацию уравнений из (12). Складывая третье уравнение из (12), умноженное на α_2, восьмое — на β_2 и тринадцатое — на γ_2 и, учитывая обозначения (7) и свойства (5), получим

$$
(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)A_{12} + \gamma_1\gamma_2(A_{22} - A_{11}) + \gamma_3(\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}) = 0. \tag{15}
$$

Домножая четвертое уравнение на γ_1, а третье – на γ_2 и вычитая, получим

$$
a'_0 m(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)g_0 + a'_0\big[\beta_3 s_3 - \alpha_3(\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1)\big] + (a_0 m + n)\big[\gamma_3(\gamma_1 g'_1 + \gamma_2 g_1) +
$$

$$+m(\gamma_1 A'_{1,1}+\gamma_2 A_{1,1})\big]+n(\gamma_1 f_1-\gamma_2 f'_1)+mn(\gamma_1 d_{1,1}-\gamma_2 d'_{1,1})=0. \tag{16}$$

Поступая аналогично с восьмым и девятым уравнениями, из (12) найдем

$$a'_0 m(\gamma_1^2+\gamma_2^2)f_0+a'_0\big[\alpha_3 s_3-\beta_3(\gamma_2 s_1-\gamma_1 s_2)\big]+(a_0 m+n)\big[\gamma_3(\gamma_2 f_1+\gamma_1 f'_1)-$$

$$-m(\gamma_2 A_{1,2}+\gamma_1 A'_{1,2})\big]+n(\gamma_2 g'_1-\gamma_1 g_1)+mn(\gamma_2 d'_{1,2}-\gamma_1 d_{1,2})=0. \tag{17}$$

Учитывая, что $\gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0$, равенства (16), (17) можно считать уравнениями для нахождения g_0 и f_0 соответственно.

Таким образом, на основании формул (13) и равенств (16), (17) полностью определен вид зависимостей $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$.

Исключая g_0 и f_0 из (12), получим: $s_1=0,\ s_2=0$ и

$$\begin{aligned}&-a'_0\alpha_3\gamma_3 s_3+(a_0 m+n)\big[\gamma_3(\gamma_2 g'_1-\gamma_1 g_1)+\\&+m(\gamma_2 A'_{1,1}-\gamma_1 A_{1,1})\big]+n(\gamma_1 f'_1+\gamma_2 f_1)+mn(\gamma_1 d'_{1,1}+\gamma_2 d_{1,1})=0.\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&-a'_0\beta_3\gamma_3 s_3+(a_0 m+n)\big[\gamma_3(\gamma_1 f_1-\gamma_2 f'_1)-\\&-m(\gamma_1 A_{1,2}-\gamma_2 A'_{1,2})\big]+n(\gamma_1 g'_1+\gamma_2 g_1)+mn(\gamma_1 d'_{1,2}+\gamma_2 d_{1,2})=0.\end{aligned} \tag{19}$$

При $\gamma_3=0$ из уравнения (18) имеем

$$\alpha_3(a_0 m+n)(\gamma_1 A_{13}+\gamma_2 A_{23})=0, \tag{20}$$

а из (19) найдем

$$\beta_3(a_0 m+n)(\gamma_1 A_{13}+\gamma_2 A_{23})=0. \tag{21}$$

Решением уравнений (20) и (21) является

$$n=-a_0 m \qquad \text{или} \qquad \gamma_1 A_{13}+\gamma_2 A_{23}=0. \tag{22}$$

Итак, если $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,0)$, то решением системы (12) являются равенства $s_1=0,\ s_2=0$, (13), (15)–(17), (22). Следует отметить, что $n=-a_0 m$ – единственный случай, когда возникает ограничение на скорости собственного вращения и прецессии.

При $\gamma_3\neq 0$ уравнение (18) или (19) служат для определения s_3 в зависимости от выполнения неравенств $\alpha_3\neq 0$ или $\beta_3\neq 0$. В случае, если $\alpha_3\neq 0$ и $\beta_3\neq 0$, уравнения (18) и (19) эквивалентны в силу (15).

Значит, решение системы (12) состоит из следующих соотношений: $s_1=0,\ s_2=0$, (13), (15), (16), (17) и, в зависимости от равенства α_3 или β_3 нулю, (18) или (19).

Окончательно, решение дифференциальных уравнений (1), (2) для регулярной прецессии при условии $a'_0\neq 0$ выражается равенствами $s_1=0$, $s_2=0$ и соотношениями (4), (13), (15)–(22) в зависимости от расположения векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в теле-носителе.

Выводы. В данной статье рассмотрена регулярная прецессия гиростата в двух случаях. Первый случай – вырожденный – характеризуется тем, что вектор, фиксированный в теле, и вектор, фиксированный в пространстве, совпадают. Результаты, полученные в такой постановке, можно использовать в задаче стабилизации. Во втором случае, когда векторы, фиксированные в теле и в пространстве, не совпадают, получено два новых решения. Отметим, что центр масс гиростата лежит на третьей оси и при $\gamma_3 \neq 0$ в этих решениях не имеется явных ограничений на скорости прецессии и собственного вращения.

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.; Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
2. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып.39. – С. 42–49.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 64–75.
6. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
7. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
8. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 46–56.
9. *Возняк А.А.* Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 69–78.
10. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.
11. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.

G.A. Kotov

Regular precessions of heavy gyrostat carrying two rotating gyroscopes

Existence conditions for regular precessions of a gyrostat in the gravity field are studied, in the case when the carried bodies are two rotating gyroscopes. The new solutions of the equations of motion with given rule of gyrostatic moment's variation are obtained.

Keywords: *gyrostat, regular precessions.*

Г.О. Котов

Регулярні прецесії важкого гіростата, який несе два гіроскопа, що обертаються

Досліджено умови існування регулярних прецесій гіростата в полі сили тяжіння, коли тіла, яких несуть – два гіроскопа, що обертаються. При заданому законі зміни гіростатичного моменту знайдено нові розв'язки рівнянь руху.

Ключові слова: *гіростат, регулярні прецесії.*

Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры, Макеевка
Получено 12.05.14

kotov_ga@rambler.ru