УДК 517.5

©2010. **В.В. Волчков, Вит.В. Волчков**

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены аналоги теоремы Лиувилля для решений некоторых дифференциальных уравнений.

***Ключевые слова:*** *группа Гейзенберга, искаженное уравнение свертки, вырожденные гипергеометрические функции.*

**1. Введение.** Реллих [1] и Векуа [2] изучали решения редуцированного волнового уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ $(k \neq 0, k \in \mathbb{R})$, которые определены вблизи $\infty$, т.е. при $|x| > r$. Они показали, что такое решение не может быть слишком малым, не обращаясь тождественно в нуль; наряду с другими результатами они доказали, что каждое такое решение, принадлежащее $L^2$, обязательно является тождественным нулем. Вольсон в своей диссертации [3], написанной под руководством Фрица Джона, доказал, что не существует ненулевого решения уравнения $Pu = 0$, которое квадратично интегрируемо в окрестности $\infty$, для более широкого класса операторов $P$. Ранее Трев в [4] охарактеризовал операторы, не имеющие отличных от тождественного нуля решений, стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Оба эти автора применяли теорему Пэли-Винера для преобразования Фурье. Во многих интересных случаях для получения таких результатов может быть использована теорема Пэли-Винера для преобразования Радона. Сильный результат такого типа получен Литманом [5]. Лакс и Филлипс [6] обобщили упомянутый выше результат Реллиха и Векуа на редуцированные гиперболические системы типа $u_t = \sum A_j \partial_j u$, где $u$ – функция от $x, t$, $x \in \mathbb{R}^k$, значения $u$ лежат в $\mathbb{R}^n$, коэффициенты $A_j$ являются $n \times n$-матрицами и через $\partial_j$ обозначается $\partial/\partial x_j$. Ряд точных результатов для уравнений вида $p(\Delta)u = 0$ в неограниченных областях содержится в [7].

**2. Постановка проблемы.** Пусть $\mathbb{C}^n$ – комплексное евклидово пространство размерности $n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ и эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$. Всюду в дальнейшем $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ – соответственно пространства распределений и распределений с компактными носителями в $\mathcal{O}$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ – пространство финитных бесконечно - дифференцируемых функций в $\mathcal{O}$. В случае, когда $\mathcal{O}$ инвариантно относительно унитарной группы $\mathrm{U}(n)$, символами $\mathcal{D}'_{\natural}(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathcal{O})$ и $\mathcal{D}_{\natural}(\mathcal{O})$ будем обозначать, соответственно, подмножества $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, состоящие из всех $\mathrm{U}(n)$-инвариантных распределений.

Пусть $P \in \mathbb{C}[z]$ – ненулевой многочлен. Введем специальный оператор Эрмита (искаженный лапласиан)

$$\mathfrak{L} = \frac{|z|^2}{4}\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{n}\left(z_k\frac{\partial}{\partial z_k} - \overline{z}_k\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}\right), \tag{1}$$

где Id – тождественный оператор. Предположим, что $\mathcal{O}$ – открытое подмножество $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(\mathfrak{L})f = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{O} \tag{2}$$

с неизвестным $f$. Обозначим через $\mathcal{D}'_P(\mathcal{O})$ множество всех $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, удовлетворяющих (2). Отметим, что всякое непрерывное решение (2) является вещественно-аналитическим ввиду эллиптичности оператора $\mathfrak{L}$. Интерес к изучению уравнений вида (2) объясняется в первую очередь тем, что они тесно связаны с группой Гейзенберга, которая широко используется в современных исследованиях по гармоническому анализу и уравнениях в частных производных (см., например, [8–10]).

В данной работе исследуется следующая

**Проблема 1.** *Пусть $\mathcal{O}$ – неограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $f \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{D}'_P)(\mathcal{O})$. При каких ограничениях на рост $f$ на бесконечности отсюда следует, что $f = 0$?*

В случае $\mathcal{O} = \mathbb{C}^n$ наиболее сильный (однако, как теперь выяснилось, неточный) результат принадлежит С. Сангавелу [11]: если многочлен $\widetilde{P}(z) = P(z^2)$ не имеет нулей $\lambda$, удовлетворяющих условию

$$\frac{n-\lambda^2}{2} \in \{0, -1, -2, \ldots\}, \tag{3}$$

то всякое решение уравнения (2) на $\mathbb{C}^n$ умеренного роста равно нулю тождественно. Условие (3) в теореме С. Сангавелу убрать нельзя. Доказательство теоремы С. Сангавелу основано на применении преобразования Вейля, которое является аналогом преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$ на пространстве распределений умеренного роста (см. [8], [9], [11]).

По поводу других результатов, касающихся проблемы 1 и ее аналогов для других классов функций см. [7], [12], [13, гл. 3, §§ 3.4, 3.5] и библиографию к этим работам.

В последние годы с помощью предложенной авторами новой техники, основанной на трансмутационных отображениях, был достигнут заметный прогресс в изучении уравнений типа (2) (см. [14]). Применение этой техники в данной работе позволило добиться продвижения и в проблеме 1.

**3. Формулировки основных результатов.** Положим $E(R,r) = \{z \in \mathbb{C}^n : R - r < |z| < R + r\}$, где $0 < r < R$. Для многочлена $P \neq 0$ обозначим через $N_P$ множество нулей $\lambda$ функции $\widetilde{P}$, удовлетворяющих (3). Пусть также $dm_n(w)$ – мера Лебега на $\mathbb{C}^n$ и $\mathrm{RA}_P(\mathcal{O}) = (\mathcal{D}'_P \cap \mathrm{RA})(\mathcal{O})$, где $\mathrm{RA}(\mathcal{O})$ – множество всех вещественно-аналитических функций на $\mathcal{O}$.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{D}'_P)(\mathbb{C}^n)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если $N_P = \varnothing$ и для некоторых $\gamma > 0$, $\eta < \frac{1}{2}\gamma$*

$$\varliminf_{R\to+\infty} e^{-\frac{R^2}{4}-\eta R} \int_{E(R,\gamma)} |f(z)|\,dm_n(z) = 0, \tag{4}$$

*то $f = 0$.*

(ii) *Если* $N_P \neq \varnothing$ *и для некоторых* $\gamma > 0$, $\eta < \frac{1}{2}\gamma$

$$\varliminf_{R\to+\infty} e^{\frac{R^2}{4}-\eta R} \int_{E(R,\gamma)} |f(z)| dm_n(z) = 0, \tag{5}$$

*то* $f = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{O}$ – внешность компакта.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{O}$ *– область в* $\mathbb{C}^n$, *которая является внешностью некоторого компакта в* $\mathbb{C}^n$. *Предположим, что* $f \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{D}'_P)(\mathcal{O})$ *и для некоторых* $\gamma > 0$, $\eta < \frac{1}{2}\gamma$ *выполнено условие (5). Тогда* $f = 0$.

Отметим, что второе утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2, если положить в ней $\mathcal{O} = \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.

Следующий результат показывает, что теоремы 1 и 2 носят окончательный характер.

**Теорема 3.**

(i) *Для любых* $\gamma > 0$, $\eta > \gamma/2$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathrm{RA}_P(\mathbb{C}^n)$, *для которой*

$$\int_{E(R,\gamma)} |f(z)| dm_n(z) = O\left(e^{\frac{R^2}{4}+\eta R}\right) \quad \textit{при} \quad R \to +\infty. \tag{6}$$

(ii) *Если* $N_P \neq \varnothing$, *то для любых* $\gamma > 0$, $\eta > \gamma/2$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathrm{RA}_P(\mathbb{C}^n)$, *такая, что*

$$\int_{E(R,\gamma)} |f(z)| dm_n(z) = O\left(e^{-\frac{R^2}{4}+\eta R}\right) \quad \textit{при} \quad R \to +\infty. \tag{7}$$

(iii) *Для любых констант* $\gamma > 0$, $\eta > \gamma/2$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathrm{RA}_P(\mathbb{C}^n \backslash \{0\})$, *удовлетворяющая условию (7).*

Сравнение теорем 1, 2 и 3 показывает, что главные члены в показателях экспоненты в условиях (4) и (5) являются точными.

**4. Вспомогательные конструкции и утверждения.** Обозначим $\mathcal{B}_r(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |z - w| < r\}$ и $\overline{\mathcal{B}_r}(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |z - w| \leqslant r\}$, соответственно, открытый и замкнутый шары в $\mathbb{C}^n$ с центром в точке $z$ и радиусом $r$. Положим $\mathcal{B}_r(0) = \mathcal{B}_r$, $\overline{\mathcal{B}_r}(0) = \overline{\mathcal{B}_r}$. Для $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ через $\operatorname{supp} T$ обозначим носитель $T$ и положим $r(T) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} T \subset \mathcal{B}_r\}$. *Искаженной сверткой* (*twisted convolution*) распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ и $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ называется распределение $f \star T \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, задаваемое формулой

$$\langle f \star T, \psi \rangle = \langle f(z), \langle T(w), \psi(z+w) e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}}}\rangle\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n). \tag{8}$$

Из (8) следует, что если $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$ и $T \in (\mathcal{E}' \cap L^{1,\mathrm{loc}})(\mathbb{C}^n)$, то $f \star T \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$ и

$$(f \star T)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w) T(w) e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}}} dm_n(w).$$

Сферическое преобразование $\widetilde{T}$ распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(\lambda) = \left\langle T(z), e^{-|z|^2/4}{}_1F_1\left(\frac{n-\lambda^2}{2}; n; \frac{|z|^2}{2}\right)\right\rangle,$$

где ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция (см. [15, гл. 6]).

Далее используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$; $\binom{j}{k}$ – биномиальные коэффициенты; $\Gamma$ – гамма функция; $\mathcal{D}(a, b)$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(a, b)$. Если $T$ – распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^1$, то символом $\widehat{T}$ обозначается его преобразование Фурье, то есть $\widehat{T}(z) = \langle T(t), e^{-itz}\rangle, \quad z \in \mathbb{C}$. Пусть также $\mathcal{D}_\natural(-R, R) = \{f \in \mathcal{D}(-R, R) : f(-t) = f(t)\}$ и $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ для функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Пусть $\mathcal{H}^{n,p,q}$ – пространство сферических гармоник бистепени $(p, q)$ на $\mathbb{S}^{2n-1}$ (см. [16, гл. 12]). Как известно [16, теоремы 12.2.7, 12.2.8], квазирегулярное представление группы $\mathrm{U}(n)$ в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1})$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, действующих на $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Обозначим через $d(n, p, q)$ размерность $\mathcal{H}^{n,p,q}$ и пусть $\{S_l^{p,q}\}$, $l \in \{1, \ldots, d(n, p, q)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Положим $S_1^{0,0}(\sigma) = \omega_{2n-1}^{-1/2}$ для любого $\sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}$, где $\omega_{2n-1} = 2n\pi^n/\Gamma(n + 1)$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{2n-1}$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – непустое открытое $\mathrm{U}(n)$-инвариантное множество в $\mathbb{C}^n$, соответствует ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f_{p,q,l}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma), \quad z = \varrho\sigma, \ \varrho = |z|, \ \sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}, \tag{9}$$

где

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\varrho\sigma)\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}d\omega(\sigma). \tag{10}$$

Разложение (9) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$f \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,l},$$

где распределение $f^{p,q,l}$ действует по правилу

$$\langle f^{p,q,l}, \psi\rangle = \langle f, \overline{\left(\overline{\psi}\right)_{p,q,l}(\varrho)}\ \overline{S_l^{p,q}(\sigma)}\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{11}$$

Для заданного класса $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ распределений на $\mathcal{O}$ положим

$$\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{p,q,l}\}.$$

Если $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, $r(T) < R \leqslant +\infty$ и $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{B}_R)$, то из (8) и (11) следует, что

$$(f \star T)^{p,q,l} = f^{p,q,l} \star T \quad \text{в} \quad \mathcal{B}_{R-r(T)}. \tag{12}$$

Кроме того, $f \star \delta_0 = \delta_0 \star f = f$ в $\mathcal{B}_R$, где $\delta_0$ – мера Дирака в нуле. Если $f \in C^2_{p,q,l}(\mathcal{O})$, то из (1) непосредственным вычислением получается соотношение

$$(\mathfrak{L}f)(z) = (\mathfrak{L}_{p,q} f_{p,q,l})(\varrho) S^{p,q}_l(\sigma), \tag{13}$$

где

$$\mathfrak{L}_{p,q} = -\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{2n-1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} + \left(\frac{(p+q)(2n+p+q-2)}{\varrho^2} + \frac{1}{4}\varrho^2 + p - q\right) \mathrm{Id}.$$

Далее, пусть $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, 2, 3$, и хотя бы два из распределений $T_j$ имеют компактный носитель. Тогда из определения искаженной свертки следуют равенства

$$(\lambda T_1 + \mu T_2) \star T_3 = \lambda(T_1 \star T_3) + \mu(T_2 \star T_3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

$$(T_1 \star T_2) \star T_3 = T_1 \star (T_2 \star T_3), \tag{15}$$

и

$$\operatorname{supp}(T_1 \star T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2. \tag{16}$$

Кроме того, используя легко проверяемое тождество

$$\mathfrak{L}\left(h(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}}}\right) = (\mathfrak{L}h)(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}}}, \quad h \in C^2(\mathbb{C}^n),$$

получаем, что

$$\mathfrak{L}(T_1 \star T_2) = T_1 \star \mathfrak{L}T_2. \tag{17}$$

Пусть $\Phi(a, b; \zeta)$ и $\Psi(a, b; \zeta)$ – вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, соответственно, [15, гл. 6]. Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\zeta u''(\zeta) + (b - \zeta)u'(\zeta) - au(\zeta) = 0. \tag{18}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, ..., d(n, p, q)\}$. Положим

$$a = p + \frac{n - \lambda^2}{2}, \quad b = n + p + q.$$

Для $z = \varrho\sigma \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ определим

$$\phi_{\lambda,p,q,l}(z) = \sqrt{\omega_{2n-1}}\, \phi_{\lambda,p,q}(\varrho) S^{p,q}_l(\sigma), \tag{19}$$

где

$$\phi_{\lambda,p,q}(\varrho) = \varrho^{p+q} e^{-\frac{\varrho^2}{4}} \Phi\left(a, b; \varrho^2/2\right). \tag{20}$$

Функция $\phi_{\lambda,p,q,l}$ допускает непрерывное продолжение в точку $z = 0$. Доопределяя $\phi_{\lambda,p,q,l}$ в нуле по непрерывности, получаем, что $\phi_{\lambda,p,q,l} \in \mathrm{RA}(\mathbb{C}^n)$.

Далее, при $\varrho \in (0, +\infty)$ положим

$$\psi_{\lambda,p,q}(\varrho) = \begin{cases} \varrho^{p+q} e^{-\frac{\varrho^2}{4}} \Psi\left(a, b; \varrho^2/2\right), & \text{если } -a \notin \mathbb{Z}_+ \\ \varrho^{p+q} e^{\frac{\varrho^2}{4}} \Psi\left(b - a, b; -\varrho^2/2\right), & \text{если } -a \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Теперь для $z=\varrho\sigma\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ определим

$$\psi_{\lambda,p,q,l}(z)=\psi_{\lambda,p,q}(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma).$$

Таким образом, $\psi_{\lambda,p,q,l}\in\mathrm{RA}(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})$.

**Лемма 1.** *Пусть $w\in\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $(\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})w=0$.

(ii) $w=c_1\phi_{\lambda,p,q,l}+c_2\psi_{\lambda,p,q,l}$.

*Доказательство.* В силу эллиптичности оператора $\mathfrak{L}$ достаточно доказать лемму для вещественно-аналитических $w$. Полагая $w(z)=f(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma)$ и используя (13), перепишем уравнение $(\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})w=0$ в виде

$$f''(\varrho)+\frac{f'(\varrho)}{\varrho}(2n-1)-\frac{f(\varrho)}{\varrho^2}\left((p+q)(2n+p+q-2)+(p-q-\lambda^2)\varrho^2+\frac{1}{4}\varrho^4\right)=0.$$

Делая замену

$$f(\varrho)=\varrho^{p+q}e^{-\frac{\varrho^2}{4}}\,u(\varrho^2/2),$$

приходим к вырожденному гипергеометрическому уравнению (18). Если $-a\notin\mathbb{Z}_+$, функции $\Phi(a,b;\zeta)$ и $\Psi(a,b;\zeta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (18) (см. [15, гл. 6, § 6.7]. При $-a\in\mathbb{Z}_+$ эти функции отличаются ненулевым постоянным множителем и вторым линейно независимым решением (18) является функция $e^\zeta\Psi(b-a,b;\zeta)$ (см. [15, гл. 6, § 6.7]). Учитывая определение $\phi_{\lambda,p,q,l}$ и $\psi_{\lambda,p,q,l}$, отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

**Следствие 1.** *Множество всех $w\in\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющих уравнению $(\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})w=0$, имеет вид $w=c\phi_{\lambda,p,q,l}$, где $c\in\mathbb{C}$.*

Доказательство следует из леммы 1 и того, что функция $\psi_{\lambda,p,q,l}$ имеет особенность в точке $z=0$ (см. [15, гл. 6, § 6.8]).

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение функций $\phi_{\lambda,p,q}$ и $\psi_{\lambda,p,q}$ при $\varrho\to+\infty$.

**Лемма 2.**

(i) *Пусть $-a\notin\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\phi_{\lambda,p,q}(\varrho)=2^{b-a}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\varrho^{p+q+2(a-b)}e^{\frac{\varrho^2}{4}}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)\quad \text{при}\quad \varrho\to+\infty,$$

$$\psi_{\lambda,p,q}(\varrho)=2^{a}\varrho^{p+q-2a}e^{-\frac{\varrho^2}{4}}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)\quad \text{при}\quad \varrho\to+\infty.$$

(ii) *Если* $-a \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\phi_{\lambda,p,q}(\varrho) = (-2)^a \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \varrho^{p+q-2a} e^{-\frac{\varrho^2}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{при} \quad \varrho \to +\infty,$$

$$\psi_{\lambda,p,q}(\varrho) = (-2)^{b-a} \varrho^{p+q+2(a-b)} e^{\frac{\varrho^2}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{при} \quad \varrho \to +\infty.$$

*Доказательство.* Утверждение (i) следует из определения функций $\phi_{\lambda,p,q}$ и $\psi_{\lambda,p,q}$ и асимптотических формул для $\Phi(a,b;\zeta)$ и $\Psi(a,b;\zeta)$ при $\zeta \to +\infty$ (см. [15, гл. 6, § 6.13]). В случае, когда $-a \in \mathbb{Z}_+$, функция $\Phi(a,b;\zeta)$ является многочленом степени $-a$ со старшим коэффициентом, равным

$$(-1)^{-a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}$$

(см. [15, гл. 6, § 6.1, формула (1)]). Отсюда и из асимптотической формулы для $\Psi(b-a,b;\zeta)$ при $\zeta \to +\infty$ (см. [15, гл. 6, § 6.13]) получаем утверждение (ii). $\square$

Далее, для любого $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ положим

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \langle f, \overline{\phi_{\overline{\lambda},p,q,l}} \rangle = \sqrt{\omega_{2n-1}}\ \langle f, \phi_{\lambda,p,q}(\varrho)\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}\,\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{21}$$

Согласно (21), $\mathcal{F}_l^{p,q}(f)$ является четной целой функцией переменной $\lambda$. Если $f \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$, функция $\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda)$ совпадает со сферическим преобразованием $f$, то есть,

$$\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda).$$

Преобразование $\mathcal{F}_l^{p,q}$ хорошо изучено в работе [14, § 6]. Напомним некоторые основные свойства $\mathcal{F}_l^{p,q}$, которые потребуются в дальнейшем.

**Лемма 3.**

(i) *Преобразование* $\mathcal{F}_l^{p,q}$ *является инъективным на* $\mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$.

(ii) *Если* $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ *и* $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f \star T)(\lambda) = \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)\widetilde{T}(\lambda).$$

(iii) *Пусть* $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ *и* $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{B}_r}$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leqslant c_1(1+|\lambda|)^{c_2} e^{r|\mathrm{Im}\lambda|} \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

*где* $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* $\lambda$. *Обратно, для каждой четной целой функции* $w(\lambda)$, *удовлетворяющей оценке вида (22), существует такое распределение* $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, *что*

$$\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{B}_r} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_l^{p,q}(f) = w.$$

Доказательство леммы 3 и более подробную информацию о свойствах $\mathcal{F}_l^{p,q}$ см. в [14, § 6].

**Лемма 4.** *Пусть $\mathcal{O}$ – произвольная область в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $f \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{D}'_P)(\mathcal{O})$ и $f \neq 0$. Тогда существует ненулевая функция $g \in C^\infty(\mathcal{O})$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\mathfrak{L}g = \lambda^2 g$ *в $\mathcal{O}$ для некоторого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P})$;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ и любого замкнутого шара $\overline{\mathcal{B}}_\varepsilon(z) \subset \mathcal{O}$*

$$|g(z)| \leqslant c \int_{\overline{\mathcal{B}}_\varepsilon(z)} |f(w)| dm_n(w), \tag{23}$$

*где постоянная $c > 0$ не зависит от $z$.*

*Доказательство.* Сначала отметим, что $\mathcal{Z}(\widetilde{P}) \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае $\widetilde{P}$ является тождественной константой. Это противоречит условиям $f \in \mathcal{D}'_P(\mathcal{O})$ и $f \neq 0$. Таким образом, $\mathcal{Z}(\widetilde{P}) \neq \varnothing$.

Далее, используя лемму 3 (iii), для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P})$ определим распределение $T_\lambda \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ по формуле

$$\widetilde{T}_\lambda(z) = \begin{cases} \widetilde{P}(z)/(z^2 - \lambda^2)^{m(\lambda,T)} & \text{если } \lambda \neq 0, \\ \widetilde{P}(z)/z^{m(0,T)} & \text{если } \lambda = 0 \in \mathcal{Z}(\widetilde{P}), \end{cases}$$

где $m(\lambda, T)$ – кратность нуля $\lambda$ функции $\widetilde{P}$.

Докажем теперь, что $f \star T_\lambda \neq 0$ в $\mathcal{O}$ для некоторого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{O} = \mathcal{B}_R$, $R > 0$. Предположим противное, то есть

$$f \star T_\lambda = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{B}_R \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P}). \tag{24}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$ при некоторых $p, q, l$. Для $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$ выберем $\eta \in \mathcal{D}_\natural(\mathcal{B}_R)$ так, что $\eta = 1$ в $\mathcal{B}_{r(\psi)+\delta}$ при некотором $\delta \in (0, R - r(\psi))$, где $r(\psi) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} \psi \subset (-r, r)\}$. Положим

$$\langle \mathfrak{A}_{p,q,l}(f), \psi \rangle = \sum_{j=0}^\infty \mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f\eta)(\lambda_j) \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda_j t) dt, \tag{25}$$

где

$$\lambda_j = \sqrt{2p + n + 2j}, \quad \mu_j = \frac{2^{1-n-p-q}}{\omega_{2n-1}(n+p+q-1)!} \binom{n+p+q+j-1}{n+p+q-1}.$$

Тогда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ корректно определено посредством равенства (25) как распределение в $\mathcal{D}'_\natural(-R, R)$ и

$$\mathfrak{A}_{p,q,l}(f|_{\mathcal{B}_r}) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f)|_{(-r,r)}$$

для любого $r \in (0, R]$ (см. [14, § 7]). Кроме того, из (25) и [14, теорема 9] имеем

$$\mathfrak{A}_{p,q,l}(f \star T_\lambda) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f) * \Lambda(T_\lambda) = 0 \tag{26}$$

на $(r(T)-R, R-r(T))$, где распределение $\Lambda(T_\lambda)\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^1)$ определяется равенством

$$\widehat{\Lambda(T_\lambda)}(z)=\widetilde{T_\lambda}(z),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Далее, используя [14, теорема 4], из (26) заключаем, что $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)=0$. Тогда в силу инъективности преобразования $\mathfrak{A}_{p,q,l}$ (см. [14, теорема 9]) $f=0$, что противоречит условию леммы. Рассмотрим теперь общий случай. Из (24) и (12) получаем, что

$$f^{p,q,l}\star T_\lambda=0 \quad \text{в} \quad \mathcal{B}_{R-r(T)} \quad \text{для всех} \quad \lambda,p,q,l.$$

По уже доказанному имеем $f^{p,q,l}=0$. Отсюда в силу произвольности $p,q,l$ имеем $f=0$, что также противоречит условию. Итак, существует $\lambda\in\mathcal{Z}(\widetilde{P})$ такое, что $f\star T_\lambda\neq 0$ в $\mathcal{O}_T$. Тогда для некоторого $\nu\in\mathbb{Z}_+$ функция $g=(\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})^\nu(f\star T_\lambda)$ ненулевая в $\mathcal{O}$ и удовлетворяет условию 1) леммы.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ и $\overline{\mathcal{B}}_\varepsilon(z)\subset\mathcal{O}$. Тогда для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{C}^n)$, такой, что $\widetilde{\varphi}(\lambda)=1$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathcal{B}_\varepsilon$, находим

$$\begin{aligned} g(z)=(g\star\varphi)(z)=\big(\big((\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})^\nu(f\star T_\lambda)\big)\star\varphi\big)(z)=\\ \big(f\star\big((\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})^\nu\, T_\lambda\star\varphi\big)\big)(z) \end{aligned}\tag{27}$$

(см. (14), (15), (17)). Учитывая, что $(\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})^\nu\, T_\lambda\star\varphi\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{C}^n)$ и

$$\operatorname{supp}\big((\mathfrak{L}-\lambda^2\mathrm{Id})^\nu\, T_\lambda\star\varphi\big)\subset\mathcal{B}_\varepsilon$$

(см. (16)), из (27) получаем оценку (23). Тем самым лемма 4 полностью доказана. □

**5. Доказательство основных результатов.**

*Доказательство теоремы 1.* Достаточно рассмотреть случай $\eta>0$. Пусть $0<\alpha<\gamma$, $\beta=\gamma-\alpha$ и $\chi_\alpha$ – индикатор шара $\mathcal{B}_\alpha$. При $R\geqslant\gamma$ для любой $h$

$$\begin{aligned} &\int_{E(R,\beta)}\int_{\mathcal{B}_\alpha(z)}|f(w)|dm_n(w)dm_n(z)\leqslant\\ &\int_{E(R,\beta)}\int_{E(R,\gamma)}|f(w)|\,\chi_\alpha(z-w)dm_n(w)dm_n(z)\leqslant\\ &\int_{E(R,\gamma)}|f(w)|dm_n(w)\int_{\mathbb{C}^n}\chi_\alpha(z)dm_n(z). \end{aligned}$$

Предположим, что $f\neq 0$. Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы $2\eta<\gamma-\varepsilon$. Пусть $g\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ – ненулевая функция, удовлетворяющая условиям 1) и 2) леммы 4 при выбранном $\varepsilon$. Применяя оценку (23) при $\alpha=\varepsilon$, получаем

$$\int_{E(R,\beta)}|g(z)|dm_n(z)\leqslant c_1\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z),$$

где постоянная $c_1>0$ не зависит от $R$. Отсюда и из (10) следует, что

$$\int_{E(R,\beta)}|g^{p,q,l}(z)|dm_n(z)\leqslant c_2\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z)$$

при всех $p, q, l$ с постоянной $c_2 > 0$, не зависящей от $R$. Предположим, что $g^{p,q,l} \neq 0$. Тогда из свойства 1) функции $g$ (см. лемму 4) и следствия 1 имеем

$$\int_{E(R,\beta)} |\phi_{\lambda,p,q,l}(z)| dm_n(z) \leqslant c_3 \int_{E(R,\gamma)} |f(z)| dm_n(z),$$

где постоянная $c_3$ не зависит от $R$. Однако условия (4), (5) и лемма 2 показывают, что последнее неравенство противоречиво для некоторой последовательности значений $R$, стремящейся к бесконечности. Это означает, что $g^{p,q,l} = 0$ при всех $p, q, l$. Поэтому $g = 0$ (см. [16, гл. 12, теорема 12.2.3]), что противоречит выбору $g$. Таким образом, $f = 0$, что и требовалось. $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Повторим рассуждения из доказательства теоремы 1 для случая, когда $E(R, \gamma) \subset \mathcal{O}$. Тогда, используя лемму 1 вместо следствия 1 и асимптотические формулы из леммы 2, получим, что существует достаточно большое $R_0 > 0$ для которого $f = 0$ в области $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| > R_0\} \subset \mathcal{O}$. Поскольку $f \in \mathcal{D}'_P(\mathcal{O})$, отсюда имеем утверждение теоремы 2. $\square$

*Доказательство теоремы 3.* Рассмотрим функцию $f(z) = \phi_{\lambda,p,q,l}(z)$, где $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P})$. Из следствия 1 получаем $(\mathfrak{L} - \lambda^2 \mathrm{Id}) f = 0$ в $\mathbb{C}^n$. Используя теорему о среднем для собственных функций оператора $\mathfrak{L}$ (см. [14, предложение 7]), находим $P(\mathfrak{L}) f = 0$. Следовательно, $f \in \mathrm{RA}_P(\mathbb{C}^n)$. Кроме того, из (19), (20) и леммы 2 вытекает, что $f$ удовлетворяет условию (6). Более того, если $N_P \neq \varnothing$, то при $\lambda \in N_P$ функция $f$ удовлетворяет (7). Таким образом, утверждения (i) и (ii) теоремы 3 доказаны. Для доказательства (iii) достаточно повторить данные рассуждения для функции $f(z) = \psi_{\lambda,p,q,l}(z)$, где $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{P})$, с использованием леммы 2. $\square$

В заключение отметим, что методы данной работы могут быть использованы в более общей ситуации, например, для изучения уравнений свертки с искажением.


1. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. – 1943. – V. 53. – P. 57-65.
2. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – М. – Л., 1948.
3. *Wolsson K.* Dissertation, New York University, 1962.
4. *Treves F.* Differential polynomials and decay at $\infty$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 66. – P. 184-186.
5. *Littman W.* Decay at infinity to solutions of partial differential equations // Notices Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 17, № 2. – P. 444.
6. *Lax P.D., Phillips R.S.* The Paley-Wiener theorem for the Radon transform //Comm. Pure Appl. Math. – 1970. – V. 23, № 3. – P. 409 – 424.
7. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
8. *Folland G.* Harmonic Analysis in phase space. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.
9. *Thangavelu S.* Lectures on Hermite and Laguerre Expansions. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
10. *C.A. Berenstein C.A, Chang D.C., Tie J.* Laguerre Calculus and Its Applications on the Heisenberg group. – Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2001.
11. *Thangavelu S.* Mean periodic functions on phase space and the Pompeiu problem with a twist // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1995. – V. 45. – P. 1007–1035.
12. *Очаковская О.А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Матем. сб. – 2008. – Т.199, №1. – С. 47–66.

13. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979.
14. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Матем. сб. – 2008. – Т.199, №8. – С. 29–60.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
16. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984.

**V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov**

**Asymptotic behavior of solutions of some differential equations.**

Analogs of Liouville's theorem for solutions of some differential equations are obtained.

***Keywords:*** *Heisenberg group, twisted convolution equation, confluent hypergeometric functions.*

**В.В. Волчков, Вит.В. Волчков**

**Асимптотичне поводження розв'язків деяких диференціальних рівнянь.**

Одержано аналоги теореми Ліувілля для розв'язків деяких диференціальних рівнянь.

***Ключові слова:*** *група Гейзенберга, викривлене рівняння згортки, вироджені гіпергеометричні функції.*

*Донецкий национальный университет*
`valeriyvolchkov@gmail.com`

*Получено 29.10.10*