УДК 517.444

©2011. **О.А. Очаковская**

ВЫРОЖДЕННЫЕ МАЖОРАНТЫ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

Изучаются функции с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса. Основной результат статьи содержит достаточные условия на допустимый рост функций из таких классов на бесконечности.

Ключевые слова: *сферические средние, периодичность в среднем.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ и пусть $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – класс локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$ функций. Для фиксированного $r > 0$ символом $Vr(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых при всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} f(x+y)\,dx = 0. \tag{1}$$

Из условия (1) не следует, вообще говоря, что $f = 0$ (см., например, [1, гл. 2], [2], где получено описание некоторых классов таких функций), но при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ справедливо. Одним из таких предположений является условие достаточно быстрого убывания f на бесконечности.

Подобное явление было впервые отмечено Ф. Йоном для функций с нулевыми сферическими средними в $\mathbb{R}^3$ [3, гл. 6]. Многие авторы исследовали вопрос о точных условиях убывания на бесконечности, из которых следует, что функция f, удовлетворяющая уравнению типа (1), равна нулю. Для шаровых средних в $\mathbb{R}^n$ первый точный результат принадлежит Д. Смиту [4], который установил, что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)|x|^{\frac{n-1}{2}} = 0 \tag{2}$$

удовлетворяет (1), то $f = 0$. При этом условие (2) нельзя заменить условием $f(x) = O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}}\right)$ при $|x| \to \infty$. Аналогичное утверждение имеет место и для сферических средних в $\mathbb{R}^n$ [4]. Известно также, что если при некотором $p \in \left[1, \frac{2n}{n-1}\right]$ функция с условием (1) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = 0$, а при $p > \frac{2n}{n-1}$ это утверждение уже не имеет места (см. [5], а также [6], где утверждение сформулировано для сферических средних). Существенно более общие и точные результаты в этом направлении получены В.В. Волчковым в [7], [1]. Из [7] следует, в частности, что если при некотором $p \in \left[1, \frac{2n}{n-1}\right]$ функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1) при всех $|y| > r$

и

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\mu_p(R)}\int\limits_{|x|\leqslant R}|f(x)|^p\,dx=0, \tag{3}$$

то $f=0$ на множестве $\{x\in\mathbb{R}^n : |x|>r-1\}$ (здесь $\mu_p(R)=R^{n-\frac{n-1}{2}p}$ при $1\leqslant p<\frac{2n}{n-1}$ и $\mu_p(R)=\ln R$ при $p=\frac{2n}{n-1}$). При этом условие (3) нельзя заменить условием $\int\limits_{|x|\leqslant R}|f(x)|^p\,dx=O(\mu_p(R))$ при $R\to\infty$. Ряд далеко идущих обобщений этого результата получен в [7, §8], а также в [1], где условие (1) заменяется уравнением свертки более общего вида.

Некоторые аналоги рассмотренной проблемы на симметрических пространствах исследовались в [8], [9]. В работах [10], [11] изучались подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданных на полупространстве.

Характерной особенностью всех перечисленных выше условий для поведения f на бесконечности, при которых из (1) следует, что $f=0$, является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это позволяло использовать в их доказательствах аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [1]). В работе [12] впервые рассматривается подобная задача для случая, когда указанная выше инвариантность существенно нарушается и требуются другие методы. В частности, по одной из переменных допускается даже экспоненциальный рост функции, который в некотором смысле компенсируется быстрым убыванием по другим переменным.
Таким образом, представляет интерес следующая проблема (см. [1, часть 2, проблема 4.15]).

Проблема 1. Пусть $f\in Vr(\mathbb{R}^n)$ и для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|f(x)|\leqslant F(x), \tag{4}$$

где F – заданная положительная функция на $\mathbb{R}^n$. Для каких r и F отсюда следует, что $f=0$?

В данной работе получено достаточное условие существования ненулевых функций из $Vr(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих (4) для широкого класса функций F.

2. Формулировка основного результата. Пусть, как обычно, $J_\mu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка μ. Как известно, при $\mu>-1$ функция J_μ имеет бесконечное множество нулей на луче $(0,+\infty)$, не имеющее конечных предельных точек (см., например, [1]). Символом ν_n обозначим наименьший нуль функции $J_{\frac{n}{2}}$ на $(0,+\infty)$. Пусть также Z_+ – множество неотрицательных целых чисел.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть θ – четная непрерывная положительная функция на $\mathbb{R}^1$, для которой*

$$\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\theta(s)}=\infty. \tag{5}$$

Пусть также функция $\rho : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию

$$0 < \rho(t) < \theta(\xi) \quad \text{для любых } t \in \mathbb{R}^1, \quad \xi \in [t - \rho(t), t + \rho(t)] \tag{6}$$

Тогда для любых $r > 0$ существует ненулевая функция $f \in Vr(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая оценке

$$|f(x)| \leqslant c \inf_{k \in Z_+} \sqrt{k} \left(\frac{kr}{e}\right)^k (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^{-\frac{k}{2}} e^{\nu_n |x_n|/r} F_k(x_n) \tag{7}$$

при всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где

$$F_k(x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\rho(t))^{-k} \exp\left(\frac{-\pi}{2} \int\limits_0^t \frac{ds}{\theta(s)} + (t + \rho(t)\frac{|x_n|}{r})\right) dt \tag{8}$$

и постоянная $c > 0$ не зависит от x.

Отметим, что оценка (7) является удобной для применения, поскольку для построения ненулевых функций из $Vr(\mathbb{R}^n)$ в ней достаточно выбирать любые конкретные k, возможно зависящие от x. Поведение интегралов (8) при $|x_n| \to +\infty$ в ряде случаев может быть исследовано методом перевала (см., например, [13]).

3. Доказательство основного результата. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция θ удовлетворяет условиям теоремы 1 и пусть $\mathcal{D} = \{Z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Jm}\, Z| \leqslant \theta(\mathrm{Re}\, z)\}$. Тогда существует функция W, голоморфная в $\mathcal{D}$, удовлетворяющая условиям:*

1) $W(x+iy) = \overline{W(-x+iy)}$
2) $\mathrm{Re} W(x+iy) \geqslant \frac{\pi}{2} \int\limits_0^x \frac{ds}{\theta(s)} + O(1)$ *при $x \to +\infty$ равномерно по $x + iy \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Рассмотрим область $\mathcal{D}_+ = \{z \in \mathcal{D} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Обозначим через $W(z)$ функцию, конформно отображающую область $\mathcal{D}_+$ на полуполосу $\prod\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, \ |\,\mathrm{Jm}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ так, чтобы образом бесконечности была бесконечность, а образом отрезка $\{z \in \mathcal{D} : \mathrm{Re}\, z = 0\}$ – отрезок $\{z \in \prod : \mathrm{Re}\, z = 0\}$. Согласно известным теоремам теории конформных отображений эти условия однозначно определяют функцию W, так как они задают образы трех граничных точек. Продолжим функцию на всю область $\mathcal{D}$, используя принцип симметрии Римана-Шварца. Продолженная функция будет голоморфна в $\mathcal{D}$. Сохраняя для нее обозначение W, получаем, что условие 1) выполнено. Далее, используя [14, §2.6, следствие к лемме 2*], имеем выполнение условия 2). Таким образом, лемма 1 доказана. □

Переходя к доказательству теоремы 1, прежде всего отметим, что ее утверждение достаточно доказать для $r = 1$. Общий случай будет следовать отсюда с помощью простой замены переменной в интеграле (1). Пусть $t \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = I_{\frac{n-3}{2}}(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2})\, ch(\sqrt{t^2 - \nu_n^2}) x_n, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $I_{\frac{n-3}{2}}(z) = J_{\frac{n-3}{2}}(z) z^{\frac{3-n}{2}}$. Используя формулы дифференцирования для функций Бесселя (см. [15, формулы (6.1) и (6.2)]), имеем

$$I'_\mu(z) = -zI_{\mu+1}(z) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dz}(z^{2\mu} I_\mu(z)) = z^{2\mu-1} I_{\mu-1}(z) \tag{10}$$

при всех $z \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$. Кроме того,

$$I_{\mu-1}(z) + z^2 I_{\mu+1}(z) = 2\mu\, I_\mu(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

(см. [15, формула (6.5)]). Тогда из (10), (11) и (9) находим

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = t^2 g(t) = -\nu_n^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Это означает, что g удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta g + \nu_n^2 g = 0$. По теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца (см. [1]) получаем

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} g(x)\, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}}(\nu_n) g(y) = 0 \tag{12}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть W – функция из леммы 1. Умножая равенство (12) на $\exp(-W(t))$ и интегрируя на $\mathbb{R}^1$, находим

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} f(x)\, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathbb{R}^n, \ \text{где}$$

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\frac{n-3}{2}}\left(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right) ch\left(\sqrt{t^2 - \nu_n^2}\, x_n\right) \exp(-w(-t))\, dt. \tag{13}$$

Таким образом, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$ и $r = 1$. Докажем, что f не является тождественным нулем. Действительно, из (13) следует, что

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} I_{\frac{n-3}{2}}\left(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right) ch\left(\sqrt{t^2 - \nu_n^2}\, x_n\right)(\exp(-w(t)) + \exp(-w(-t)))\, dt. \tag{14}$$

Предположим,что $f = 0$. Тогда из (14) и [16, гл. IV, теорема 3.10] следует в силу произвольности $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, что $\exp(-w(t) + \exp(-w(-t))) = 0$ на $\mathbb{R}^1$. Отсюда и из свойства 1) в лемме 1 заключаем,что $\mathrm{Jm}\, W(t)$ является тождественной константой на $\mathbb{R}^1$. Поэтому из нашего предположения и (13) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\frac{n-3}{2}}\left(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right) ch\left(\sqrt{t^2 - \nu^2}\, x_n\right) \exp(-\mathrm{Re}\, W(t))\, dt = 0$$

при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Полагая здесь $x = 0$, получаем противоречивое равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\operatorname{Re} W(t))\, dt = 0$, поскольку подынтегральная функция положительна. Итак, $f \neq 0$.

Далее, при любых $Z \in \mathcal{C}$
$$|I_\mu(z)| \leqslant \lambda e^{|\operatorname{Jm} Z|}, \tag{15}$$
где $\lambda > 0$ не зависит от Z (см., например, [1, формула (1.4.50)]). Интегрируя (13) по частям к раз с использованием (10) и (15), находим
$$|f(x)| \leqslant C(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^{-\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x_n, t)|\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$
где
$$H(x_n, t) = \frac{d^k}{dt^k}(ch\sqrt{t^2 - \nu_n^2}x_n)\exp(-w(t))$$
и $c > 0$ не зависит от x. Согласно (6), круг K_t с центром в точке $(t, 0)$ радиуса $\rho(t)$ содержится в $\mathcal{D}$. Применяя формулу Коши для этого круга, имеем
$$|H(x_n, t)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{|\xi - t| \leqslant \rho(t)} (\rho(t))^{-k-1} |H(x_n, \xi)| \cdot |d\xi|$$
$$\leqslant k!(\rho(t))^{-k} \max_{|\xi - t| \leqslant \rho(t)} |H(x_n, \xi)|.$$
Учитывая, что $|ch\sqrt{\xi^2 - \nu_n^2}x_n| \leqslant \exp((|\xi| + \nu_n^2)|x_n|)$, отсюда и из (16) получаем утверждение теоремы 1.

1. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London. – 2003. – 454 p.
2. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 15-34.
3. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ. – 1958. – 159 с.
4. *Smith I.D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403-416.
5. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on // Illinois J. Math. – 1984. – V. 28. – P. 339-347.
6. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group. // J.Anal. Math. – 1994. – V. 63. – P. 255-286.
7. *Волчков В.В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций. // Мат. сб. – 1997. – Т. 188. – № 9. – С. 13-30.
8. *Shahshahani M. and Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. – 1987. – V. 63. – P. 267-277.
9. *Волчков В.В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах. // Мат. сб. – 2001. – Т. 192. – №9. – С.17-38.
10. *Очаковская О.А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // ДАН. – 2001. – Т. 381. – № 6. – С. 745-747.

11. *Очаковская О.А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9. – № 3. – С. 493-501.
12. *О.А. Очаковская* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Матем. сб. – 2008. – Т. 199. – № 1. – С. 47-66.
13. *Федорюк М.В.* Метод перевала. – М.: Наука. – 1977. – 368 с.
14. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука. – 1979. – 320 с.
15. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука. – 1971. – 288 с.
16. *Стейн И.,Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир. – 1974. – 335 с.

O.A. Ochakovskaya

Degenerated majorants of functions with zero ball means.

Functions with vanishing integrals over all balls of fixed radius are studied. The central result of the paper includes sufficient conditions on the admissible growth of functions from such classes at infinity.

Keywords: *spherical means,mean periodisity.*

О.О. Очаковська

Вироджені мажоранти функцій з нульовими кульовими середніми.

Про деякі класи функцій з нульовими кульовими середніми. Вивчаються функції з нульовими інтегралами по всіх кулях фіксованого радіуса. Головний результат статті містить достатні умови на припустиме зростання функцій з таких класів на нескінченності.

Ключові слова: *сферичні середні, періодичність у середньому.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`ochakovskaja@yandex.ua`

Получено 25.03.11