УДК 539.3:534.1

©2018. **Е.И. Митрушкин, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев**

НЕЧЕТКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ НА ОСНОВЕ РЕЗОНАНСНО-ВОЛНОВОЙ МЕТОДИКИ

Дано описание теоретического алгоритма получения оценок разбросов в значениях упругих постоянных конструкционных изотропных материалов, определяемых на основе неконтрастных экспериментальных данных измерения скоростей упругих волн и величин резонансных частот изгибных колебаний тонких плит прямоугольной либо круговой формы. Алгоритм базируется на нечетко-интервальной интерпретации экспериментальных данных и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения при переходе к нечетким представлениям экзогенных параметров-аргументов в соотношениях связи модуля Юнга и коэффициента Пуассона со скоростью поперечных упругих волн в материале плиты, а также со значениями низших частот собственных поперечных колебаний плит в рамках прикладной теории их динамического изгиба. Представлены примеры численной реализации описываемого алгоритма.
Ключевые слова: *изотропные конструкционные материалы, идентификация упругих постоянных, оценки разбросов, резонансно-волновые методики, скорости сдвиговых волн, собственные частоты изгибных колебаний, неконтрастные экспериментальные данные, нечетко-множественные алгоритмы, эвристический принцип расширения.*

Введение. Экспериментальные методы ультразвуковых измерений являются одними из наиболее эффективных методов идентификации значений упругих постоянных конструкционных материалов [1 – 4]. Однако, непосредственно определяемые этими методами характеристики динамических деформационных процессов в виде скоростей упругих волн различных типов, резонансных частот колебаний экспериментальных объектов, представляют собой неопределенные величины с некоторыми уровнями разбросов фиксируемых значений, обусловленными техникой измерений, выбором образцов и целым рядом иных факторов. Соответственно, способы учета указанных разбросов при непосредственном определении значений упругих постоянных должны учитывать фактор наличия указанных разбросов и природу информации относительно их характеристик. В качестве методов учета неопределенности экзогенных параметров в моделях пересчета экспериментальных данных в требуемые механические характеристики применимы как методы математической статистики и стохастического анализа [5 – 6], так и методы теории нечетких вычислений (методы теории нечетких множеств) [7 – 13].

Целью представленных в настоящей работе исследований является разработка и применение нечетко-множественной методики идентификации механических характеристик тонких изотропных плит по экспериментальным данным, получаемым на основе резонансно-волновой методики для объектов в виде тонких изотропных плит. Представляемый подход связан с использованием модифицированного эвристического принципа обобщения [7 – 13] при переходе к нечетким аргументам в аналитических расчетных соотношениях, связывающих экспериментально определяемые характеристики скоростей упругих волн и частот собственных изгибных колебаний плит различной формы с искомыми величинами модуля Юнга E $[Pa]$ и коэффициента Пуассона ν материала плиты.

1. Нечеткая идентификация механических характеристик прямоугольных свободно опертых по контуру плит. Рассматриваем в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ прямоугольные тонкие плиты с длинами сторон a_1, a_2 и толщиной h, свободно опертые по кромкам и занимающие область $V = \{0 \le x_1 \le a_1\ ,\ 0 \le x_2 \le a_2\ ,\ -h/2 \le x_3 \le h/2\}$. При этом полагаем, что экспериментально могут быть определены скорость поперечных упругих волн вдоль срединной плоскости плиты $\tilde{V}_s$ и низшая собственная циклическая частота поперечных гармонических колебаний $\tilde{\omega}_{11}$, а характер учитываемого разброса измерений позволяет описывать эти неопределенные экзогенные параметры трапецеидальными нечеткими интервалами с кортежами реперных точек $(V_s^{(1)},\ V_s^{(2)},\ V_s^{(3)},\ V_s^{(4)})$, $(\omega_{11}^{(1)},\ \omega_{11}^{(2)},\ \omega_{11}^{(3)},\ \omega_{11}^{(4)})$ и функциями принадлежности $\mu_{\tilde{V}_s}$, $\mu_{\tilde{\omega}_{11}}$.

С учетом предположения о малости относительной толщины плиты $h << << a_j$ и соответствующей возможности применения для описания деформационных колебательных процессов в плите модели динамического обобщенного плоского наряженного состояния и прикладной модели изгибных колебаний в рамках гипотезы прямых нормалей [14, 15], для параметров скорости сдвиговых волн в материале плиты [16, 17], а также для собственных частот поперечных колебаний свободно опертых прямоугольных плит с показателями изменяемости форм n_1, n_2 могут быть записаны соотношения

$$\begin{gathered} V_s = (E/(2\rho(1+\nu)))^{1/2}, \\ \omega_{n_1 n_2} = h\pi^2((n_1/a_1)^2 + (n_2/a_2)^2)(E/(12\rho(1-\nu^2)))^{1/2}, \quad (n_1,\ n_2 \ge 1), \end{gathered} \tag{1}$$

в которых ρ, ν, E – соответственно параметры плотности, коэффициента Пуассона и модуля Юнга материала плиты. Из соотношений (1), полагая, что значение низшей резонансной частоты изгибных колебаний ω_{11} известно, находим

$$\begin{gathered} \nu = 1 - (V_s/\omega_{11})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6, \\ E = 2\rho V_s^2 (2 - (V_s/\omega_{11})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6), \end{gathered} \tag{2}$$

используемые при дальнейшем построении описываемой методики.

При разработке алгоритма получения нечетких оценок прочностных свойств рассматриваемой конструкции вводится предположение о том, что параметр плотности материала плиты ρ и ее геометрические параметры a_1, a_2, h не подвергаются эксплуатационным изменениям, а оцениваемыми характеристиками являются неконтрастные значения механических параметров $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$. Для нечетко-интервальных экспериментальных значений экзогенных параметров модели $\tilde{V}_s$, $\tilde{\omega}_{11}$ вводятся представления в виде суперпозиций множеств α-срезов:

$$\begin{gathered}\tilde{V}_s = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{V}_{s\alpha}, \overline{V}_{s\alpha}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)V_s^{(1)} + \alpha V_s^{(2)}, \alpha V_s^{(3)} + (1-\alpha)V_s^{(4)}), \\ \tilde{\omega}_{11} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\omega}_{11\alpha}, \overline{\omega}_{11\alpha}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)\omega_{11}^{(1)} + \alpha\omega_{11}^{(2)}, \alpha\omega_{11}^{(3)} + (1-\alpha)\omega_{11}^{(4)}).\end{gathered} \tag{3}$$

Искомые нечеткие оценки $\tilde{V}_s$, $\tilde{\omega}_{11}$ также формируются в виде суперпозиций по множествам α-уровня

$$\tilde{\upsilon} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\nu}_{\,\alpha},\, \overline{\nu}_{\alpha}), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{E}_{\,\alpha},\, \overline{E}_{\alpha}), \tag{4}$$

причем в рассматриваемом случае с учетом свойств

$$\begin{gathered}\partial\nu/\partial V_s = -(V_s/\omega_{11}^2)h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/3 < 0, \\ \partial\nu/\partial\omega_{11} = (V_s^2/\omega_{11}^3)h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/3 > 0, \\ \partial E/\partial V_s = 8V_s\rho\nu > 0, \\ \partial E/\partial\omega_{11} = 2\rho V_s^2(V_s^2/\omega_{11}^3)h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/3 > 0,\end{gathered} \tag{5}$$

согласно [8], для характеристик $\underline{\nu}_{\,\alpha}$, $\overline{\nu}_{\alpha}$ и $\underline{E}_{\,\alpha}$, $\overline{E}_{\alpha}$ соответственно могут быть записаны представления

$$\begin{gathered}\underline{\nu}_{\,\alpha} = 1 - (\overline{V}_{s\alpha}/\underline{\omega}_{\,11\alpha})^2h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6, \\ \overline{\nu}_{\alpha} = 1 - (\underline{V}_{\,s\alpha}/\overline{\omega}_{11\alpha})^2h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6, \\ \underline{E}_{\,\alpha} = 2\rho\underline{V}^2_{\,s\alpha}(2 - (\underline{V}_{\,s\alpha}/\underline{\omega}_{\,11\alpha})^2h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6), \\ \overline{E}_{\alpha} = 2\rho\overline{V}^2_{s\alpha}(2 - (\overline{V}_{s\alpha}/\overline{\omega}_{11\alpha})^2h^2\pi^4((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2/6).\end{gathered} \tag{6}$$

В качестве примера реализации описываемой методики представлены результаты получения нечетких оценок $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$ для характеристик ν, E плиты из алюминия [18] с параметрами

$$a_1 = 1.0\ [m], \quad a_2 = 0.5\ [m], \quad h = 0.01\ [m], \quad \rho = 2700\ [kg/m^3]$$

по результатам имеющих разбросы экспериментальных замеров, приводящих к оценкам

$$\tilde{V}_s = (3.010\cdot 10^6,\ 3.070\cdot 10^6,\ 3.095\cdot 10^6,\ 3.135\cdot 10^6)\ [m/\sec], \tag{7}$$

$$\tilde{\omega}_{11} = (740,\ 760,\ 770,\ 785)\ [rad/\sec]. \tag{8}$$

При этом с применением соотношений (4), (6) для анализируемых характеристик получены нечеткие оценки, характеризуемые функциями принадлежности $\mu_{\tilde{\nu}}, \mu_{\tilde{E}}$ для $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$, представленными на рис. 1, 2.

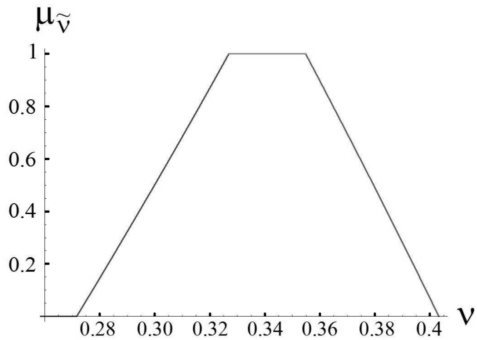

Рис. 1. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\nu}$.

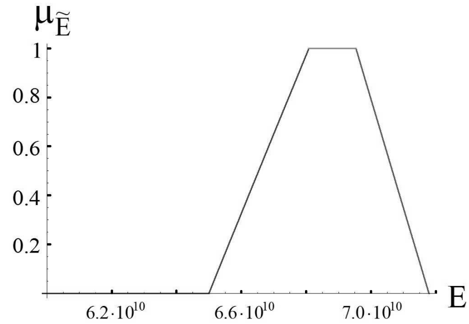

Рис. 2. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{E}$.

2. Нечеткая идентификация механических свойств материала тонкой закрепленной по контуру плиты кругового очертания. Применение аналогичной схемы нечеткой идентификации механических характеристик на основе неконтрастных данных экспериментов с тонкими плитами кругового очертания так же базируется на соотношении (1) для скорости сдвиговых волн в плоскости плиты и представлении резонансных частот [19] поперечных колебаний с окружным волновым числом n для круглой изотропной плиты радиуса R с закрепленным контуром

$$\omega_{jn} = h(\beta_{jn}^2/R^2)(E/(12\rho(1-\nu^2)))^{1/2}, \tag{9}$$

в котором β_{jn} – корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\beta_n)I'_n(\beta_n) - J'_n(\beta_n)I_n(\beta_n) = 0. \tag{10}$$

Значение β_{10}, соответствующее низшей частоте осесимметричных резонансных колебаний [20], равно $\beta_{10} = 3.196$.

Из соотношений (1), (9) следует

$$\nu = 1 - (V_s^2/6)h^2\omega_{jn}^{-2}\beta_{jn}^4 R^{-4}, \tag{11}$$

$$E = 2\rho V_s^2(2 - (V_s^2/6)h^2\omega_{jn}^{-2}\beta_{jn}^4 R^{-4}). \tag{12}$$

Согласно описанной выше схеме применения к соотношениям (11), (12) эвристического принципа расширения в α-уровневой форме, исходя из предположения о задании характеристик V_s, ω_{jn} как нечетко-интервальных аргументов с представлениями вида (3) и с учетом свойств

$$\begin{gathered} \partial\nu/\partial V_s = -(V_s/\omega_{jn}^2)h^2\beta_{jn}^4 R^{-4}/3 < 0, \\ \partial\nu/\partial\omega_{jn} = (V_s^2/\omega_{jn}^3)h^2\beta_{jn}^4 R^{-4}/3 > 0, \\ \partial E/\partial V_s = 8V_s\rho\nu > 0, \quad \partial E/\partial\omega_{jn} = 2\rho V_s^2(V_s^2/\omega_{jn}^3)h^2\beta_{jn}^4 R^{-4}/3 > 0, \end{gathered} \tag{13}$$

формируются представления

$$\tilde{v} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\nu}_\alpha,\ \overline{\nu}_\alpha), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{E}_\alpha,\ \overline{E}_\alpha). \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_{\ \alpha} &= 1 - (\overline{V}_{s\alpha}/\underline{\omega}_{\ jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4}/6, \\ \overline{\nu}_\alpha &= 1 - (\underline{V}_{\ s\alpha}/\overline{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4}/6, \\ \underline{E}_{\ \alpha} &= 2\rho \underline{V}^2_{\ s\alpha}(2 - (\underline{V}_{\ s\alpha}/\underline{\omega}_{\ jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4}/6), \\ \overline{E}_\alpha &= 2\rho \overline{V}^2_{s\alpha}(2 - (\overline{V}_{s\alpha}/\overline{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4}/6). \end{aligned} \tag{15}$$

В примере реализации этого варианта методики так же рассматривается получение нечетких оценок $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$ для характеристик ν, E плиты радиуса $R = 0.5$ $[m]$ и толщины $h = 0.01$ $[m]$ из алюминия с плотностью $\rho = 2700$ $[kg/m^3]$ по результатам неконтрастного экспериментального замера низшей частоты осесимметричных колебаний с оценкой $\tilde{\omega}_{01} = (625,\ 630,\ 635,\ 640)$ $[rad/\sec]$. Экспериментальная оценка для параметра $\tilde{V}_s$ имеет вид (7). Полученные в результате расчетов с использованием соотношений (14), (15) нечеткие оценки для $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$ характеризуются функциями принадлежности, представленными на рис. 3, 4.

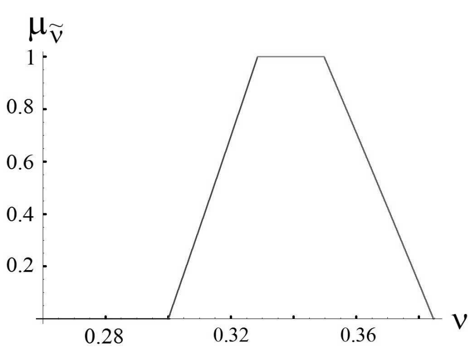

Рис. 3. Функция принадлежности для нечеткой характеристики $\tilde{\nu}$ круглой плиты.

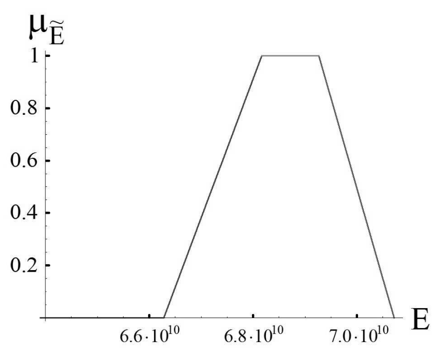

Рис. 4. Функция принадлежности для нечеткой характеристики $\tilde{E}$ круглой плиты.

Они позволяют, в частности, сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных значений механических постоянных материала плиты, а также о границах предельно возможных разбросов для соответствующих характеристик, идентифицируемых на базе экспериментальных данных при применении резонансно-волновой методики. В качестве сопоставительного примера могут быть приведены справочные данные для идентифицируемых характеристик материала рассматриваемых пластин, которые в [18] описываются значениями $\nu = 0.32 - 0.36$; $E = 6.9 \cdot 10^{10}$ $[Pa]$.

3. Выводы. В результате проведенных исследований разработан и апробирован теоретический алгоритм анализа факторов неопределенности при получении оценок разбросов в значениях упругих постоянных конструкционных изотропных материалов, определяемых на основе неконтрастных экспериментальных данных измерения скоростей упругих волн и величин резонансных частот изгибных колебаний тонких плит прямоугольной либо круговой формы. Алгоритм базируется на нечетко-интервальной интерпретации экспериментальных данных и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения при переходе к нечетким представлениям экзогенных параметров-аргументов в соотношениях связи модуля Юнга и коэффициента Пуассона со скоростью поперечных упругих волн в материале плиты, а также со значениями низших частот собственных поперечных колебаний плит в рамках прикладной теории их динамического изгиба. Представлены примеры численной реализации описываемого алгоритма.

1. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М.: Мир, 1972. – 307 с.
2. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. – 280 с.
3. *Колесников А.М.* Акустические измерения. – М.: Наука, 1985. – 254 с.
4. *Самедов Я.Ю., Щербинский В.Г., Абдулов А.И.* Ультразвуковой способ определения упругих констант твердых тел / Патент (РФ), RU 2006853 от 30 января 1994 г.
5. *Ларин В.Б.* Статистические задачи виброзащиты. – Киев: Наук. думка, 1974. – 128 с.
6. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
7. *Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Изд-во Машиностроение–1, 2004. – 397 с.
8. *Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
9. *Сторожев В.И., Сторожев С.В.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
10. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде // Вестн. Донецкого национального ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38–43.
11. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного фед. ун-та, 2016. – Т. 2. – С. 200–204.
12. *Storozhev S.V.* Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma"(Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O.Ja. Kravets. – Yelm, StateWA, country-regionUSA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
13. *Storozhev S.V.* Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium // Nonlinear Dynamics – 2016. Proc. of 5-th Intern. Conf. (September 27–30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al. – Kharkov, 2016. – P. 509–514.
14. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

15. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1976. – 608 с.
16. *Волков А.С., Гребенников В.С.* Об использовании сдвиговых ультразвуковых волн с горизонтальной поляризацией примдефектоскопии изделия // Дефектоскопия. – 1988. – No. 5. – С. 94–95.
17. *Алешин Н.П., Вадковский Н.Н., Медведев В.А.* О вводе сдвиговых волн в контролируемое изделие // Дефектоскопия. – 1968. – No 7. – С. 35–40.
18. *Золотаревский В.С.* Механические свойства металлов. – М.: Металлургия, 1998. – 306 с.
19. *Коренев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 459 с.
20. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

E.I. Mitrushkin, S.A. Priymenko, S.V. Storozhev

Fuzzy identification of mechanical characteristics of thin isotropic plates based on resonance wave methodology

Is given a description of the theoretical algorithm for obtaining estimates of the values of elastic constants of isotropic materials, determined on the basis of non-contrast experimental data on the measurement of the velocities of elastic waves and the resonance frequencies of the flexural vibrations of thin plates of rectangular or circular shapeis. The algorithm is based on the representation for experimental data in fuzzy-interval form and on the alpha-level modification of the heuristic generalization principle upon transition to fuzzy representations of arguments in mathematical formulas for the Young's modulus and for the Poisson's ratio. Representations for velocity of shear elastic waves in the materials of plate, and for resonanse frequation of transverse vibrations of plates in the framework of the applied theory of their dynamic bending is used. Examples of numerical implementation of the described algorithm are presented.

Keywords: *isotropic structural materials, identification of elastic constants, fuzzy estimates, resonance-wave techniques, shear wave velocities, eigenfrequencies of bending vibrations, non-contrast experimental data, fuzzy-multiple algorithms, heuristic generalizations principle.*

ФГУП "Научно-исслед. и экспериментальный ин-т автомобильной электроники и электрооборудования", Москва;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк;
ГОУ ВПО "Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры", Макеевка
`stvistvi@mail.ru`

Получено 09.07.18