

УДК 531.38, 531.39

©2018. Г.В. Горп, Г.А. Котов

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Изучены условия существования инвариантных соотношений уравнений движения тела в потенциальном поле сил, описывающих прецессионные движения тела относительно вертикали. На основании метода решения обратных задач механики получены новые классы прецессионных движений, не имеющие аналогов в классической задаче о движении тяжелого твердого тела.

Ключевые слова: потенциальное поле сил, инвариантные соотношения, прецессионные движения.

Введение. Задача о движении твердого тела в потенциальном поле сил является обобщением задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [1, 2]. Поскольку в общем случае уравнения движения в этих задачах неинтегрируемы в квадратурах, то актуально применение метода инвариантных соотношений (ИС) [3, 4] построения частных решений данных уравнений. История развития метода ИС исследована в монографии [5], в которой не только изложены результаты по теории ИС, но и указаны особенности в использовании методов ИС для решения задач динамики твердого тела. При этом в упомянутой монографии рассмотрены прямая и обратная задачи в построении ИС уравнений Д. Гриоли – наиболее общих уравнений движения твердого тела, допускающих три первых интеграла [6]. Большой интерес представляют ИС для прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой, которые являются рабочими режимами многих современных конструкций и имеют место не только в классической задаче [1, 7], но и в ее обобщениях [8–10]. Особое место среди них занимает динамика связанных твердых тел с постоянным гиростатическим моментом [8] и динамика гиростата с переменным гиростатическим моментом [10]. Прецессии гиростата в потенциальном поле сил изучены только в постановке прямой задачи механики (силовая функция предполагается заданной) [11].

Данная статья посвящена исследованию прецессий тела с неподвижной точкой в потенциальном поле сил в постановке обратной задачи механики, т. е. силовая функция строится в силу заданных ИС для прецессий. С помощью метода [5] изучены условия существования заданных классов ИС, основанные на интегрировании уравнения в частных производных для одной вспомогательной функции, которая характеризует скорость собственного вращения тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных сил [1, 2]

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силового поля; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — потенциальная функция; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции тела; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает производную по времени t в подвижной системе координат. Для любой дифференцируемой функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$

здесь k — произвольная постоянная. Если функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ задана, то для всех решений уравнений (1) наряду с интегралами (2) имеет место и интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad (3)$$

где E — произвольная постоянная. В рамках решения обратной задачи механики на инвариантных соотношениях $\omega_i = \omega_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ может быть сформирована с помощью (3), но для того, чтобы соотношение (3) было первым интегралом, необходимо требовать равенства нулю следующей производной

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \cdot \boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3))$$

в силу уравнений (1).

Исследуем вид инвариантных соотношений для прецессионных движений тела [8–11]. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — единичный вектор, неизменно связанный с телом ($\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$). Тогда для прецессий тела выполняются инвариантные соотношения, которые запишем в векторном виде

$$\boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\mathbf{a} + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\boldsymbol{\nu}, \quad (4)$$

где $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — дифференцируемые функции переменных ν_i ($i = 1, 3$). Учтем во втором уравнении системы (1) выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (4)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}). \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad (6)$$

где a_0 — постоянная. Таким образом, для прецессионных движений тела (4) в течение всего времени движения постоянен угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ [7, 8].

Сформулируем задачу: исследовать условия существования инвариантных соотношений, задающихся векторным равенством (4), для уравнений (1) в рамках постановки обратной задачи механики [5, 12, 13].

2. Основное уравнение для прецессионных движений. Внесем ω из (4) в интеграл моментов из (2):

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \quad (7)$$

Согласно методу [5, 12] будем полагать, что равенство (7) выполняется для всех значений ν_1, ν_2, ν_3 . Тогда из (7) имеем

$$\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} [k - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)]. \quad (8)$$

Свяжем с телом главную систему координат: $A = \text{diag} (A_1, A_2, A_3)$. Тогда в силу $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ получим

$$A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2 > 0,$$

т. е. функция $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (8) не имеет особенностей в знаменателе. Согласно постановке задачи, функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (1) построим на основании (3), (4), (8):

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{\varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \left((A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 \right) + k^2}{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - E. \quad (9)$$

При решении обратной задачи исследования ИС (4) для уравнения (1), в которых силовая функция находится с помощью заданных ИС, имеет место следующее необходимое условие [5]:

$$\text{div } \mathbf{x}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0. \quad (10)$$

В формуле (10) вектор $\mathbf{x}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = A\boldsymbol{\omega}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – момент количества движения тела, его структура в силу (4), (8) такова

$$\mathbf{x}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)A\mathbf{a} + \frac{1}{(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} [k - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)]A\boldsymbol{\nu}. \quad (11)$$

Запишем равенство (10) в скалярной форме:

$$\frac{\partial x_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + \frac{\partial x_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + \frac{\partial x_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} = 0, \quad (12)$$

где на основании формулы (11)

$$\begin{aligned} x_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = & a_i A_i \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \\ & + A_i \nu_i \frac{k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(a_1 A_1 \nu_1 + a_2 A_2 \nu_2 + a_3 A_3 \nu_3)}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 + A_3 \nu_3^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим значения x_i из (13) в равенство (12)

$$\begin{aligned}
 & (A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2) \left\{ A_1 \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_1} [a_1(A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2) - \right. \\
 & - \nu_1(A_2a_2\nu_2 + A_3a_3\nu_3)] + A_2 \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_2} [a_2(A_3\nu_3^2 + A_1\nu_1^2) - \\
 & - \nu_2(A_3a_3\nu_3 + A_1a_1\nu_1)] + A_3 \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_3} [a_3(A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2) - \\
 & - \nu_3(A_1a_1\nu_1 + A_2a_2\nu_2)] \left. \right\} + k [A_1\nu_1^2(A_2 + A_3 - A_1) + \\
 & + A_2\nu_2^2(A_3 + A_1 - A_2) + A_3\nu_3^2(A_1 + A_2 - A_3)] - \\
 & - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \left\{ (A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2) [a_1A_1\nu_1(2A_1 + A_2 + A_3) + \right. \\
 & + a_2A_2\nu_2(2A_2 + A_3 + A_1) + a_3A_3\nu_3(2A_3 + A_1 + A_2)] - \\
 & - 2(a_1A_1\nu_1 + a_2A_2\nu_2 + a_3A_3\nu_3) (A_1^2\nu_1^2 + A_2^2\nu_2^2 + A_3^2\nu_3^2) \left. \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Указанное уравнение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. В общем случае его интегрирование сводится к нахождению первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной статье рассмотрим случай

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0). \tag{15}$$

Исследуем условия существования решений уравнения (14) при выполнении условия (15). Полагая в (14) $k = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 & (A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2) \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_1} - A_2\nu_2\nu_1 \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_2} - \\
 & - A_3\nu_3\nu_1 \frac{\partial\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial\nu_3} - \frac{\nu_1\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2} \left[A_1(A_2 + A_3)\nu_1^2 + \right. \\
 & + A_2(2A_1 + A_3 - A_2)\nu_2^2 + A_3(2A_1 + A_2 - A_3)\nu_3^2 \left. \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Из формул (8), (9) при $k = 0$ следует

$$\begin{aligned}
 \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= -\frac{A_1\nu_1\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2}, \\
 U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \frac{A_1\varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2)}{2(A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2)} - E.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнению в частных производных (16) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик

$$\frac{d\nu_1}{dv} = A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2, \quad \frac{d\nu_2}{dv} = -A_2\nu_1\nu_2, \quad \frac{d\nu_3}{dv} = -A_3\nu_1\nu_3, \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\nu_1[A_1(A_2 + A_3)\nu_1^2 + A_2(2A_1 + A_3 - A_2)\nu_2^2 + A_3(2A_1 + A_2 - A_3)\nu_3^2]\varphi}{(A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2)},$$

где v – вспомогательная переменная. Умножая первое равенство системы (18) на ν_1 , второе – на ν_2 , и третье – на ν_3 и складывая итоговые равенства, получим уравнение

$$\nu_1 \frac{d\nu_1}{dv} + \nu_2 \frac{d\nu_2}{dv} + \nu_3 \frac{d\nu_3}{dv} = 0,$$

из которого вытекает первый интеграл системы (18) $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2$, c_1 – произвольная постоянная. Из второго и третьего равенств системы (18) следует уравнение $\frac{d\nu_2}{A_2\nu_2} = \frac{d\nu_3}{A_3\nu_3}$, имеющее решение $\nu_3^{A_2} = c_2\nu_2^{A_3}$, в котором c_2 – произвольная константа. Окончательно два первых интеграла системы (18) таковы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2, \quad \frac{\nu_3^{A_2}}{\nu_2^{A_3}} = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Для нахождения третьего интеграла рассмотрим уравнение, полученное из второго и четвертого равенств системы (18)

$$\begin{aligned} & \frac{A_1(A_2 + A_3)\nu_1^2 + A_2(2A_1 + A_3 - A_2)\nu_2^2 + A_3(2A_1 + A_2 - A_3)\nu_3^2}{\nu_2(A_1\nu_1^2 + A_2\nu_2^2 + A_3\nu_3^2)} d\nu_2 = \\ & = -\frac{A_2 d\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}. \end{aligned}$$

Из этого уравнения, принимая за независимую переменную $\nu_2^2 = y$ и используя интегралы (19), получим

$$\int \frac{(m_0 + m_1 y + m_2 y^{\alpha_0}) dy}{y(n_0 + n_1 y + n_2 y^{\alpha_0})} = \ln|\varphi^{-2A_2}|, \quad (20)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{A_3}{A_2}, \quad m_1 = (A_2 - A_1)(A_3 - A_2), \quad m_2 = c_2^2(A_3 - A_1)(A_2 - A_3), \\ m_0 &= A_1 c_1^2(A_2 + A_3), \quad n_0 = A_1 c_1^2, \quad n_1 = A_2 - A_1, \quad n_2 = c_2^2(A_3 - A_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Из формулы (20) следует, что вычислить интеграл для произвольных значений α_0 не представляется возможным. Рассмотрим следующие случаи.

3. Случай $A_1 = A_2 = A_3$. Пусть все моменты инерции A_i равны между собой. Тогда из формул (19) – (21) определим первые интегралы системы (18):

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2, \quad \frac{\nu_3}{\nu_2} = c_2, \quad \nu_2^2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = c_3. \quad (22)$$

На основании соотношений (22) получим общее решение уравнения (16) в рассматриваемом случае

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{\nu_2^2} F_1 \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2} \right), \quad (23)$$

где F_1 — произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Рассмотрим интегрирование уравнения Пуассона из (5), которое запишем в скалярном виде при условии (15):

$$\dot{\nu}_1 = 0, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \dot{\nu}_3 = -\nu_2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \quad (24)$$

Инвариантное соотношение (6) в силу (15) упрощается

$$\nu_1 = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0), \quad (25)$$

где θ_0 — постоянный угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{\nu}$. Геометрическому интегралу $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ из (2) с учетом (25) можно удовлетворить, положив

$$\nu_1 = a_0, \quad \nu_2 = a'_0 \sin u, \quad \nu_3 = a'_0 \cos u, \quad (26)$$

где u — вспомогательная переменная, $a'_0 = \sin \theta_0$.

Подставим в уравнение для $\dot{\nu}_2$ из (24) величины (23), (26)

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0'^2 \sin^2 u} F_1^*(\operatorname{ctg} u). \quad (27)$$

Здесь через F_1^* обозначено значение функции F_1 из (23) на многообразии (26).

Введем вместо u переменную w по формуле $w = \operatorname{ctg} u$. Тогда из (27) получим уравнение, из которого найдем функцию $w(t)$ путем обращения интеграла

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{F_1^*(w)(1+w^2)^2} = -\frac{1}{a_0'^2}(t-t_0). \quad (28)$$

Для получения зависимостей всех переменных задачи от времени необходимо выполнить последовательную подстановку функции $w(t)$ из (28) в

формулы $u(t) = \operatorname{arcc tg} w(t)$, (26), (23), (17), (4). Так как в данном случае вектор угловой скорости из (4) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{F_1^*}{a_0^2 \sin^2 u} (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}), \quad (29)$$

то прецессия (29) относится к прецессии общего вида [7]. Если $a_0 = 0$, то тело совершает маятниковое движение относительно горизонтальной оси.

4. Случай $A_2 = A_3 \neq A_1$. Запишем при указанных условиях первые интегралы системы (18), вытекающие из формул (19)–(21):

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2, \quad \frac{\nu_3}{\nu_2} = c_2, \quad \frac{(\nu_2^2 + \nu_3^2) \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{A_1 \nu_1^2 + A_2 (\nu_2^2 + \nu_3^2)} = c_3. \quad (30)$$

На основании соотношений (30) получим общее решение уравнения (16)

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{A_1 \nu_1^2 + A_2 (\nu_2^2 + \nu_3^2)}{\nu_2^2 + \nu_3^2} F_2 \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2} \right). \quad (31)$$

На решении $\nu_1 = a_0$, $\nu_2 = a'_0 \sin \sigma$, $\nu_3 = a'_0 \cos \sigma$, в котором введена вспомогательная переменная σ , функция (31) примет вид

$$\varphi^*(\sigma) = F_2^*(\operatorname{ctg} \sigma). \quad (32)$$

В формулах (31), (32) F_2 и F_2^* — произвольные дифференцируемые функции своих аргументов. Зависимость функции σ от времени устанавливаем из уравнений Пуассона (24). В силу (32) функция $\sigma(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{F_2^*(\operatorname{ctg} \sigma)} = t - t_0. \quad (33)$$

Тогда для компонент ν_i ($i = \overline{1, 3}$) имеем соотношения

$$\nu_1 = a_0, \quad \nu_2 = a'_0 \sin \sigma(t), \quad \nu_3 = a'_0 \cos \sigma(t). \quad (34)$$

Вектор угловой скорости определим из формул (4), (17)

$$\boldsymbol{\omega} = F_2^*(\operatorname{ctg} \sigma(t)) (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}). \quad (35)$$

На основании условий $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $A_3 = A_2$, при выполнении которых построено решение (33)–(35), приходим к выводу, что вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен круговому сечению эллипсоида инерции. Эти условия определяют некоторый аналог условий существования решения Ж.Л. Лагранжа классической задачи о движении тяжелого твердого тела.

5. Случай $A_3 = A_1 \neq A_2$. Первые интегралы (19) для рассматриваемого случая сохраняют свой вид. Несложно проверить, что система (18) допускает интеграл

$$\frac{\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \nu_2^{\frac{A_1+A_2}{A_2}}}{A_2 \nu_2^2 + A_1 (\nu_1^2 + \nu_3^2)} = c_3, \quad (36)$$

где c_3 – произвольная постоянная. Следовательно, в силу (19), (36) общее решение уравнения (16) при $A_3 = A_1$ таково

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{A_2 \nu_2^2 + A_1 (\nu_1^2 + \nu_3^2)}{\nu_2^{\frac{A_1+A_2}{A_2}}} F_3 \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3^{A_2}}{\nu_2^{A_1}} \right), \quad (37)$$

где F_3 – произвольная дифференцируемая функция указанных в (37) аргументов. Введем переменную z

$$\nu_2 = a'_0 \sin z, \quad \nu_3 = a'_0 \cos z. \quad (38)$$

С учетом (38) и равенства $\nu_1 = a_0$ функция (37) примет вид

$$\varphi^*(z) = \frac{A_1 a_0^2 + a_0'^2 (A_2 \sin^2 z + A_1 \cos^2 z)}{(\sin z)^{\frac{A_1+A_2}{A_2}}} F_3^* \left(\frac{(\cos z)^{A_2}}{(\sin z)^{A_1}} \right). \quad (39)$$

Рассмотрим уравнения Пуассона (24) при наличии равенств (38), (39). Из них следует, что зависимость $z(t)$ находим, обращая интеграл

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\varphi^*(z)} = t - t_0. \quad (40)$$

На основании соотношений (38), (39) из (17) получим

$$\psi^*(z(t)) = -\frac{A_1 a_0}{(\sin z(t))^{\frac{A_1+A_2}{A_2}}} F_3^* \left(\frac{(\cos z(t))^{A_2}}{(\sin z(t))^{A_1}} \right). \quad (41)$$

Запишем вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (4), используя (39), (41):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{F_3^* \left(\frac{(\cos z(t))^{A_2}}{(\sin z(t))^{A_1}} \right)}{(\sin z(t))^{\frac{A_1+A_2}{A_2}}} \left\{ [A_1 a_0^2 + a_0'^2 (A_2 \sin^2 z(t) + A_1 \cos^2 z(t))] \mathbf{a} - A_1 a_0 \boldsymbol{\nu} \right\}. \quad (42)$$

В силу неравенств треугольника на главные моменты инерции в данном случае параметры A_1 и A_2 должны удовлетворять условию $2A_1 > A_2$.

Построение решения уравнений (1) проводится на основании формул (25), (38), (42) с учетом второй формулы (17) и (39), (40).

Интерес представляют условия $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $A_3 = A_1$. Если полагать, что центр масс тела лежит на оси, проходящей через вектор $\mathbf{a}$, то условие $A_3 = A_1$ означает, что тело динамически симметрично с центром масс в плоскости равных моментов инерции. Следовательно, в данном случае имеет место некоторый аналог гироскопов С.В. Ковалевской и Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина.

Заключение. В статье с помощью метода решений обратных задач механики исследованы прецессионные движения тела под действием потенциальных сил. Получено разрешающее уравнение на скорость собственного вращения тела, которое является линейным уравнением в частных производных. Используя метод характеристик, найдены решения этого уравнения, которые описывают новые классы прецессий тела, имеющего неподвижную точку. Данные результаты дополняют результаты Д.Н. Горячева [13] по построению первых интегралов уравнений (1).

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946. — 655 с.
2. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов. — М.: Наука, 1990. — 416 с.
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951. — Т. 2, ч. 2. — 555 с.
4. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. — Вып. 6. — С. 15–24.
5. *Горр Г. В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). — М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. — 424 с.
6. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. — 1963. — 35, f. 1-2. — P. 35–39.
7. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. — Донецк: ДонНУ, 2010. — 364 с.
8. *Горр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. — Донецк: ДонНУ, 2009. — 222 с.
9. *Yehia H. M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. of the Egyptian Mathematical Society. — 2016. — P. 1–4.
10. *Горр Г. В., Мазнев А. В., Котов Г. А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. — Донецк: ГУ “ИПММ”, 2018. — 265 с.
11. *Горр Г. В.* О прецессиях гиростата в потенциальном поле сил // Механика твердого тела. — 1978. — Вып. 11. — С. 64–67.
12. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой // Диф. уравнения. — 1972. — 8, № 8. — С. 1357–1362.
13. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. — Варшава, 1910. — 62 с.

G.V. Gorr, G.A. Kotov

Precession motions of the rigid body in the potential force field

The existence conditions for invariant relations of rigid body's equations of motion in the potential forces field are studied. These conditions describe the precession motions around the vertical axis. Based on the method of inverse mechanic's problem solution, new classes of precession motions are obtained. These classes have no analogues in the classical problem on motion of a heavy rigid body.

Keywords: *potential force field, invariant relation, precession motion.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
ГОУ ВПО "Донбас. национальная акад. строительства и
архитектуры", Макеевка
kotov_ga@rambler.ru

Получено 05.09.18