УДК 517.946

И. В. Скрыпник

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье изучается регулярность по Винеру граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка, т. е. устанавливается условие на границу области, обеспечивающее непрерывность решения в данной граничной точке.

Отметим, что критерий, полученный Винером для уравнения Лапласа, оказался необходимым и достаточным условием регулярности граничной точки для широких классов линейных уравнений второго порядка (см. работы [1—3] и имеющуюся там литературу).

В случае квазилинейных уравнений вначале В. Г. Мазьей в [4] в модельной ситуации, а затем Гарипи и Цимера [5] получено достаточное условие регулярности граничной точки. Задача о необходимом условии регулярности граничной точки изучалась в [6] на основе поточечных оценок решений модельных задач. Доказательству результатов работы [6] и посвящена настоящая статья.

Данная работа посвящена исследованию регулярности граничных точек для дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в R^n. Будем изучать поведение решений уравнения (1) в граничных точках области Ω в предположении, что функции $a_i(x, u, p)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ определены при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при тех же значениях x, u, p и $v \in R^1$, $q \in R^n$ следующим условиям:

а) для почти всех x функции $a_i(x, u, p)$ непрерывны по u, p и для всех u, p $(a_i(x, u, p)$ — измеримые функции x; $a_i(x, 0, 0) = 0$;

б) с положительными постоянными ν, μ при $2 \leqslant m < n$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, u, p) - a_i(x, u, q)](p_i - q_i) \geqslant \nu(1 + |p| + |q|)^{m-2} \cdot |p - q|^2,$$

$$|a_i(x, u, p) - a_i(x, v, q)| \leqslant \mu \cdot w^{m-2} \cdot \{|p - q| + |u - v|\}. \tag{2}$$

Здесь $w = 1 + |u| + |v| + |p| + |q|$.

Пусть x_0 — произвольная точка на $\partial\Omega$, границе области Ω. Обозначим через $B(x_0, R)$ шар радиуса R с центром в x_0 и пусть $\Omega_R = \Omega \cap B(x_0, R)$.

Будем говорить, что x_0 — регулярная граничная точка области Ω для уравнения (1), если существует $R > 0$ такое, что для всякого, определенного в Ω_R, обобщенного решения $u(x) \in W^1_m(\Omega_R)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\varphi(x)[u(x) - f(x)] \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega_R) \tag{3}$$

с функцией $f(x) \in C(\overline{\Omega}_R) \cap W^1_m(\Omega_R)$ и бесконечно дифференцируемой функцией $\varphi(x)$, равной единице в окрестности x_0, выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0,\, x\in\Omega_R} u(x) = f(x_0). \tag{4}$$

Отметим, что решение $u(x)$, о котором идет речь, ограничено при некотором $\rho > 0$ в $B(x_0, \rho)\cap\overline{\Omega}$ и гельдерово в $B(x_0, \rho)\cap\Omega$. Это следует из [7].

Для формулировки условия регулярности введем еще понятие m-емкости C_m (см. [3] при $m=2$ и [4] при произвольном m). Обозначим через $\mathfrak{M}(E)$ множество функций пространства $C_0^\infty(B(x_0, 1))$, удовлетворяющих условию $u(x)\geqslant 1$ при $x\in E$.

Будем называть m-емкостью множества $E\subset B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ следующее число:

$$C_m(E) = \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}(E)} \int_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^m dx.$$

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия а), б). Для того, чтобы точка $x_0\in\partial\Omega$ была регулярной граничной точкой области Ω для уравнения (1) необходимо, чтобы при $\varepsilon = (m-2)\frac{n}{m}$ выполнялось условие

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{C_m(B(x_0, t)\setminus\Omega)\cdot t^{m-n}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{5}$$

Введем вспомогательные функции $u_k(x)$, играющие основную роль при доказательстве сформулированной теоремы.

Пусть

$$E_k = B(x_0, 2^{-k})\setminus\Omega, \quad E^{(k)} = E_k\setminus B(x_0, 2^{-(k+1)}).$$

Можем считать $a_i(x, u, p)$ определенными при $x\in R^n$, $u\in R^1$, $p\in R^n$ и удовлетворяющими а), б).

Выберем в дальнейшем число R так, чтобы

$$R < \frac{\nu}{\mu}\cdot 3^{-m}\cdot\frac{1}{1+c_0}, \tag{6}$$

где c_0 — такая постоянная, что для $u(x)\in \overset{0}{W}{}_m^1(B(0,1))$ имеют место неравенства Пуанкаре

$$\int_{B(0,1)} |u(x)|^k dx \leqslant c_0 \int_{B(0,1)} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^k dx \text{ при } 2\leqslant k\leqslant m. \tag{7}$$

Пусть $k_0 = 1 - \log_2 R$ и $\varphi_R(x)$ — неотрицательная функция класса $C_0^\infty(B(x_0, R))$, равная единице в $B\left(x_0, \frac{R}{2}\right)$. При введенном выше множестве E_k определим для целого $k > k_0$ функцию $u_k(x)$ как решение задачи

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x\in D_k; \tag{8}$$

$$u(x) - \varphi_R(x)\in \overset{0}{W}{}_m^1(D_k), \quad D_k = B(x_0, R)\setminus E_k. \tag{9}$$

Существование так определенных функций $u_k(x)$ доказывается методами монотонных операторов. Условие (6) обеспечивает при этом коэрцитивность соответствующего оператора. Функцию $u_k(x)$, определенную на D_k, можем доопределить на E_k, полагая ее значение равным единице.

Отметим просто проверяемую оценку нормы $u_k(x)$ в $W_m^1(D_k)$.

Лемма 1. Для функций $u_k(x)$ решения задачи (8), (9) справедлива оценка

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(D_k)} + \|u_k\|^m_{W_m^1(D_k)} \leqslant c\Lambda_m(E_k),$$

где

$$\Lambda_m(E_k) = [C_m(E_k)]^{\frac{2}{m}} [C_m(E_k) + 2^{-kn}]^{\frac{m-2}{m}}.$$

Ключевую роль при доказательстве теоремы 1 играют поточечные оценки функций $u_k(x)$ и $u_k(x) - u_{k+1}(x)$.

Теорема 2. Пусть $u_k(x)$ — решение задачи (8), (9) и предположим, что выполнены условия а), б). Тогда с некоторой постоянной A, зависящей только от m, n, ν, μ, выполнено неравенство

$$\max_{|x-x_0|\leqslant 2^{-(k+1)}} |u_k(x) - u_{k+1}(x)| \leqslant A\cdot\lambda_m(E_k), \qquad (10)$$

где

$$\lambda_m(E_k) = \{2^{k(n-m)}\cdot C_m(E_k) + 2^{-km}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{n}{m}(m-2).$$

Теорема 3. При $2^{-(k-2)} \leqslant |x - x_0| \leqslant R$ имеет место оценка

$$|u_k(x)| \leqslant c\,\{C_m(E_k)\cdot 2^{k(n-m)} + 2^{-km}\}^{\frac{1}{m-1}} \qquad (11)$$

с постоянной c, зависящей лишь от m, n, ν, μ.

Доказательство теоремы 1 на основе содержащихся в теоремах 2,3 априорных оценок содержится в [6]. Доказательство неравенства (11) проводится по схеме, изложенной в [8]. Дальше сосредоточим внимание только на доказательстве оценки (10). Начнем с получения интегральной оценки для $\delta_k(x) = u_k(x) - u_{k+1}(x)$. Будут использоваться вспомогательные функции $v_k(x)$, определяемые как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{m-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad x \in D^{(k)} = B(x_0, R)\setminus E^{(k)}; \qquad (12)$$

$$u(x) - \varphi_R(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(D^{(k)}), \qquad (13)$$

где множество $E^{(k)}$ и функция $\varphi_R(x)$ определены выше.

Справедливы неравенства

$$\|v_k\|^m_{W^1_m(D^{(k)})} \leqslant c C_m(E^{(k)}), \qquad (14)$$

$$0 \leqslant v_k(x) \leqslant c\,\{2^{k(n-m)} C_m(E^{(k)})\}^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{при } x \in G^{(k)}, \qquad (15)$$

где $G^{(k)} = \{x : 2^{-(k-2)} \leqslant |x - x_0| \leqslant R\} \cup \{x : |x - x_0| \leqslant 2^{-(k+2)}\}$.

Пусть

$$d_k = \max\{|\delta_k(x)| : 2^{-(k-3)} \leqslant |x - x_0| \leqslant R\}, \qquad (16)$$

определим для произвольной функции $f(x)$

$$[f(x)]_+ = \max\{f(x), 0\}, \quad [f(x)]_{(-c,c)} = \max\{\min[f(x), c], -c\}$$

и выберем функцию $\eta_k(x) \in C_0^\infty(B(x_0, 1))$ так, чтобы $\eta_k(x) = 1$ при $2^{-(k+2)} \leqslant |x - x_0| \leqslant 2^{-(k-1)}$, $\eta_k(x) = 0$ вне множества $\{x : 2^{-(k+3)} \leqslant |x - x_0| \leqslant 2^{-(k-2)}\}$ и выполнялись неравенства $0 \leqslant \eta_k(x) \leqslant 1$, $\left|\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right| \leqslant 2^{-(k-2)}$.

Используя эти обозначения, определяем при $c > d_k$ множества

$$T_c = \{x : |\delta_k(x)| \leqslant c\}, \quad F_c = F_c^+ \cup F_c^-,$$

$$F_c^+ = \{x : [\delta_k(x)]_{(-c,c)} \geqslant c\bar{v}_k(x)\}, \quad F_c^- = \{x : [\delta_k(x)]_{(-c,c)} \leqslant -c\bar{v}_k(x)\}, \qquad (17)$$

где $\bar{v}_k(x) = v_k(x)\,\eta_k(x)$ и $v_k(x)$ — решение задачи (12), (13).

Лемма 2. Для произвольного $c > d_k$ имеет место оценка

$$\int\limits_{T_c \cap F_c} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k(x)}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{K} c \{\Lambda_m(E_k) + 2^{-kn}\}^{\frac{1}{2}} \{\Lambda_m(E_k)\}^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

с функцией $\Lambda_m(E_k)$, определенной в лемме 1, и постоянной $\mathscr{K}$, зависящей лишь от m, n, ν, μ.

Доказательство. Левую часть (18) представим в виде суммы двух интегралов от той же подынтегральной функции по множествам $T_c \cap F_c^+$ и $T_c \cap F_c^-$. Ограничимся получением оценки только интеграла по $T_c \cap F_c^+$.

По определению $u_k(x)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{D_k} \left\{\sum_{i=1}^n a_i\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) \varphi\right\} dx = 0 \tag{19}$$

при произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(D_k)$.

Определим функцию $\xi_k(x) = [[\delta_k(x)]_{(-c,c)} - c\bar{v}_k(x)]_+$. Проверяется, что $\xi_k(x) = 0$ на E_k. Если $x \in E^{(k)}$, то $\xi_k(x) = 0$ в силу $v_k(x) = 1$ на $E^{(k)}$. Если $x \in E_{k+1}$, то $\delta_k(x) = 0$, $\bar{v}_k(x) \geqslant 0$, поэтому снова $\xi_k(x) = 0$.

Следовательно, функция $\xi_k(x)$ принадлежит пространствам $\overset{0}{W}{}^1_m(D_k)$, $\overset{0}{W}{}^1_m(D_{k+1})$, и поэтому ее можно подставить вместо $\varphi(x)$ в (19) и аналогичное интегральное тождество для $u_{k+1}(x)$. Подставляя $\xi_k(x)$ в два указанных тождества, вычитая одно из другого и производя оценки на основании неравенств (2), получаем

$$\nu \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k(x)}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu \Bigg\{ \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \delta_k^2(x)\, dx + \int\limits_{F_c^+} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \times$$

$$\times \left[\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right] \left\{c\left|\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x}\right| + c|\bar{v}_k| + |[\delta_k]_{(-c,c)}|\right\} dx\Bigg\}. \tag{20}$$

Покажем способ оценки слагаемых в правой части (20). По неравенству Юнга

$$\int\limits_{F_c^+} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left[\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right] |[\delta_k]_{(-c,c)}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m-2} \Bigg\{ \int\limits_{F_c^+} \left\{\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right\} |[\delta_k]_{(-c,c)}|\, dx +$$

$$+ \int\limits_{F_c^+} \left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-1} \left[\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right] dx\Bigg\}. \tag{21}$$

Аналогично оценивается первый интеграл в правой части (20).

Используя лемму 1 и неравенство (14) для оценки второго слагаемого в фигурной скобке (21) и слагаемых, содержащих $\bar{v}_k(x)$ и $\frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_k(x)$ в (20), получаем из (20)

$$\nu \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k(x)}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu 2^{m-1} \int\limits_{F_c^+} \left\{\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right\} |[\delta_k]_{(-c,c)}| \, dx + \mathscr{K}_1 c \Lambda_m(E_k). \qquad (22)$$

Осталось оценить интеграл в правой части (22). Применяя неравенства Гельдера и Юнга, находим, что

$$\int\limits_{F_c^+} \left(\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right) |[\delta_k]_{(-c,c)}| \, dx \leqslant R \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right|^2 dx +$$

$$+ 2\left(1 + \frac{1}{R}\right) \int\limits_{T_c \cap F_c^+} |[\delta_k]_{(-c,c)} - c\bar{v}_k(x)|^2 dx + 2\left(1 + \frac{1}{R}\right) c^2 \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \bar{v}_k^2 dx +$$

$$+ c \left\{ \int\limits_{F_c^+ \setminus T_c} \left(\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \{\operatorname{mes}(F_c^+ \setminus T_c)\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (23)$$

Оценим второе слагаемое правой части по неравенству Пуанкаре и заметим, что $\operatorname{mes}(F_c^+ \setminus T_c) \leqslant \mathscr{K}_2 2^{-kn}$ в силу выбора d_k, T_c и условия $c > d_k$. Применяя содержащуюся в лемме 1 оценку для $u_k(x)$ и аналогичную оценку для $v_k(x)$, получаем из (23)

$$\int\limits_{F_c^+} \left\{\left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right| + |\delta_k|\right\} |[\delta_k]_{(-c,c)}| \, dx \leqslant 4R(1 + c_0) \int\limits_{T_c \cap F_c^+} \left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right|^2 dx +$$

$$+ \mathscr{K}_3 c \{\Lambda_m(E_k)\}^{\frac{1}{2}} \{\Lambda_m(E_k) + 2^{-kn}\}^{\frac{1}{2}},$$

где c_0 — постоянная из неравенства (7). Отсюда из неравенства (22) и условия (6) на R следует требуемая оценка интеграла в левой части (22).

Оценка соответствующего интеграла по $T_c \cap F_c^-$ проводится аналогично с заменой функции $\xi_k(x)$ функцией $[[\delta_k(x)]_{(-c,c)} + c\bar{v}_k(x)]_-$. Получаемые таким образом неравенства обеспечивают выполнение оценки (18), что и заканчивает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 2. Из интегрального тождества (19) и соответствующего тождества для $u_{k+1}(x)$ следует, что для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D_k)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{D_k} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[a_i\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_{k+1}, \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \left[a_0\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u_{k+1}, \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right) \right] \varphi(x) \right\} dx = 0. \qquad (24)$$

Вначале получим интегральные оценки. Определим последовательности чисел $\rho_j = 2^{-(k+4)}(2 - 2^{-j})$ и бесконечно дифференцируемых функций $\psi_j(x)$, равных единице на множестве $\mathscr{D}^{(j)} = \{x : |x - x_0| \leqslant \rho_j\}$, нулю вне $D^{(j+1)}$ и таких, что $0 \leqslant \psi_j(x) \leqslant 1$ $\left|\frac{\partial}{\partial x} \psi_j(x)\right| \leqslant 2^{k+j+6}$. Пусть $\mu_j = \max\{|\delta_k(x)|$:

$: x \in \mathcal{D}^{(j)}\}$. Подставим в (24) $\varphi(x) = |\delta_k(x)|^r \delta_k(x) \psi_j^{s+m}(x)$, где r, s — произвольные положительные числа. Производя оценки на основе условий (2) и неравенства Юнга, получаем

$$\int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right|^2 |\delta_k(x)|^r \psi_j^{s+m}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (s+m)^2 2^{2(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx, \tag{25}$$

Для оценки правой части (25) понадобятся еще два неравенства, получаемые из (19) и соответствующего тождества для $u_{k+1}(x)$. Подставляя в (19) $\varphi(x) = |\delta_k(x)|^{r+2} u_k(x) \psi_j^{s+m}(x)$ и оценивая возникающие слагаемые на основе условий (2), имеем

$$\int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|^2 |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (r+s+m)^2 \Bigg\{ \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right|^2 |\delta_k(x)|^r \psi_j^{s+m}(x)\, dx +$$

$$+ 2^{2(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|\right)^{m-2} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_3 (r+s+m)^4 2^{2(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx. \tag{26}$$

Здесь при получении последнего неравенства использована оценка (25). Аналогичное неравенство (26) с заменой в левой части $u_k(x)$ на $u_{k+1}(x)$ получается при подстановке в соответствующее $u_{k+1}(x)$ интегральное тождество пробной функции $|\delta_k(x)|^{r+2} u_{k+1}(x) \psi_j^{s+m}(x)$. Таким образом,

$$\int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^m |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_4 (r+s+m)^4 2^{2(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \times$$

$$\times |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx. \tag{27}$$

Оценим правую часть (27) по неравенству Юнга

$$(r+s+m)^4 2^{2(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2c_4} \int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^m |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m}(x)\, dx +$$

$$+ c_5 (r+s+m)^{2m} 2^{m(k+j)} \int\limits_{D^{(j+1)}} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^s(x)\, dx.$$

И в силу (27) отсюда

$$\int\limits_{D^{(j+1)}} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^{s+m-2}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_6 (r+s+m)^{2m-4} 2^{(m-2)(k+j)} \int\limits_{D(j+1)} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^s(x)\, dx.$$

Продолжая (25) и используя для оценки правой части последнее неравенство, находим, что

$$\int\limits_{D(j+1)} \left(1 + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial \delta_k}{\partial x}\right|^2 |\delta_k(x)|^r \psi_j^{s+m}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_7 (r+s+m)^{2m-2} 2^{m(k+j)} \int\limits_{D(j+1)} |\delta_k(x)|^{r+2} \psi_j^s(x)\, dx. \qquad (28)$$

Из неравенства (28) на основании итерационного процесса Мозера получаем оценку для μ_j:

$$\mu_j^{m+\frac{n}{m}(m-2)} \leqslant c_8 2^{n(k+j)} \int\limits_{D(j+1)} |\delta_k(x)|^m \psi_j^m(x)\, dx. \qquad (29)$$

Рассмотрим дальше два случая: 1) $\mu_{j+1} > d_k$, 2) $\mu_{j+1} \leqslant d_k$. Во втором случае из неравенства (11) следует утверждение доказываемой теоремы:

$$\max_{|x-x_0| \leqslant 2^{-(k+4)}} |u_k(x) - u_{k+1}(x)| \leqslant \mu_{j+1} \leqslant d_k \leqslant$$

$$\leqslant \max_{2^{-(k-3)} \leqslant |x-x_0| \leqslant R} |u_k(x)| + \max_{2^{-(k-3)} \leqslant |x-x_0| \leqslant R} |u_{k+1}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant c_9 \{C_m(E_k) 2^{k(n-m)} + 2^{-km}\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

В первом случае, используя неравенства (18), (14), получаем оценку интеграла в правой части (29):

$$\int\limits_{\mathscr{D}(j+1)} |\delta_k(x)|^m \psi_j^m(x)\, dx \leqslant c_{10} 2^{-km} \mu_{j+1} \{\Lambda_m(E_k) + 2^{-kn}\}^{\frac{1}{2}} \{\Lambda_m(E_k)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (30)$$

где $\Lambda_m(E_k)$ определяется в лемме 1. Из (29), (30) следует

$$\mu_j^{m+\frac{n}{m}(m-2)} \leqslant c_{11} 2^{(n-m)k+nj} \mu_{j+1} \{\Lambda_m(E_k) + 2^{-kn}\}^{\frac{1}{2}} \{\Lambda_m(E_k)\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда последовательным применением полученной оценки получаем

$$\mu_1 \leqslant c_{12} \{2^{(n-m)k} [\Lambda_m(E_k) + 2^{-kn}]^{\frac{1}{2}} [\Lambda_m(E_k)]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} \qquad (31)$$

с $\varepsilon = \frac{n}{m}(m-2)$. Тем самым доказательство теоремы 2 закончено.

1. *Олейник О. А.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб.— 1952.— **30**, № 3.— С. 695—707.
2. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М. : Наука, 1971.— 287 с.
3. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Univ. of Minesota, December, 1962.— P. 1—42.
4. *Мазья В. Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ.— 1970.— **13**.— С. 42—55.
5. *Gariepy R., Ziemer W. P.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1977.— **67**, N 1.— P. 25—39.
6. *Скрыпник И. В.* Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1984.— **274**, № 5.— С. 1040—1044.
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
8. *Скрыпник И. В.* О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач.— Киев : Наук. думка, 1983.— С. 198—206.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 20.10.87