

УДК 517.91; 531.36

©2019. А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный

КЛАССИФИКАЦИЯ И ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ПО СВОЙСТВУ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие координатной устойчивости, лежащее в основе координатного подхода, распространено на неавтономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложена расширенная классификация переменных относительно свойства устойчивости, состоящая из четырех классов. Сформулированы три наиболее важные задачи координатного подхода. Разработаны общие утверждения для выделения переменных требуемого класса, справедливые для произвольных систем, а также предложены некоторые частные приемы, которые могут быть использованы в конкретных случаях. Применение соответствующих техник продемонстрировано на примере неавтономной системы.

Ключевые слова: неавтономная система, устойчивость по Ляпунову, координатный подход.

Введение. Понятие устойчивости решения системы дифференциальных уравнений возникло при изучении движений различных механических систем. Ученых и инженеров интересовал вопрос о том, как сильно могут отличаться траектории движения некоторой заданной системы при незначительно отличающихся начальных условиях. Попытки сформулировать общую концепцию и математически формализовать определение устойчивости предпринимались различными выдающимися учеными, такими как Лагранж и Пуассон. Однако наиболее удачным и удобным для практики оказалось определение устойчивости, данное русским математиком и механиком А.М. Ляпуновым [1].

В работе [2] было предложено разделить современную теорию устойчивости на три раздела: устойчивость, частичную устойчивость и координатную устойчивость. Первые два из перечисленных направлений широко исследованы в литературе. Получены результаты как для автономных, так и для неавтономных динамических систем. Последнее же направление, связанное с координатной устойчивостью, было создано относительно недавно, и большинство сформулированных на сегодняшний день задач и полученных для них результатов связаны с автономными системами. Данная статья посвящена развитию координатного подхода для неавтономных систем.

1. Основные определения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

где x – n -мерный фазовый вектор системы, t – время, $\dot{x}$ обозначает производную фазового вектора по времени. Вектор-функция $f(x, t)$ имеет значения в $\mathbb{R}^n$, определена на множестве $X \times [0, +\infty)$, где X – область пространства $\mathbb{R}^n$,

содержащая 0 в качестве внутренней точки. Предполагается, что функция f является достаточно гладкой для того, чтобы при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$ ($x_0 \in X$, $t_0 \geq 0$) существовало единственное решение системы (1), которое обозначим $x(t; x_0, t_0)$. Кроме того, предполагаем, что $f(0, t) = 0$ при любом значении $t \in [0, +\infty)$, что обеспечивает существование нулевого решения.

В случае, когда правая часть системы (1) не зависит явным образом от времени, она называется неавтономной:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2)$$

А.М. Ляпуновым [1] была сформулирована задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы (1). Понятие устойчивости по отношению к части переменных было впервые введено также А.М. Ляпуновым [3], но общая теория частичной устойчивости была развита В.В. Румянцевым [4]. Им же были получены и наиболее важные результаты по обобщению второго метода Ляпунова для исследования устойчивости по части переменных. В соответствующих задачах фазовый вектор системы (1) разбивается на две части $x = (y, z)$, где $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, и система приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(y, z, t), \\ \dot{z} &= f_2(y, z, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции f_1 и f_2 являются проекциями функции f на соответствующие координатные подпространства.

Координатный подход к исследованию устойчивости был предложен в работе [5]. В его основе лежит рассмотрение характера поведения траекторий, исходящих из окрестности начала координат, по каждой отдельно взятой координате. В результате такого анализа координата x_i определяется как устойчивая или неустойчивая в зависимости от того, является ли решение $x = 0$ устойчивым или неустойчивым по отношению к переменной $y = x_i$. Далее для устойчивых переменных при наличии сходимости этих координат к нулю при $t \rightarrow +\infty$ из них выделяются асимптотически устойчивые.

Для удобства будем называть устойчивые переменные, не обладающие свойством притяжения к нулю, неасимптотически устойчивыми. Неустойчивые переменные мы также разделим на две группы: ограниченно неустойчивые и неограниченно неустойчивые.

Определение 1. Решение $x = 0$ уравнения (3) называется ограниченно неустойчивым по отношению к переменным y , если оно неустойчиво по отношению к этим переменным и для любого $t_0 \in [0, +\infty)$ существуют такие $\delta > 0$ и $D > 0$, что для любой точки (y_0, z_0) из δ -окрестности начала координат и любого момента времени $t \in [t_0, +\infty)$ выполнено неравенство $\|y(t; y_0, z_0, t_0)\| < D$.

Определение 2. Решение $x = 0$ уравнения (3) называется неограниченно неустойчивым по отношению к переменным y , если найдется такое $t_0 \in [0, +\infty)$, что для любых $\delta > 0$ и $D > 0$ найдутся точка (y_0, z_0) в

δ -окрестности начала координат и момент времени $t \in [t_0, +\infty)$, для которых $\|y(t; y_0, z_0, t_0)\| \geq D$.

Для удобства введем понятие класса переменной. К классу 1 отнесем асимптотически устойчивые переменные, к классу 2 – неасимптотически устойчивые, к классу 3 – ограниченно неустойчивые, к классу 4 – неограниченно неустойчивые. При этом считаем класс 1 самым высоким классом (обладающим наиболее сильным свойством устойчивости), а классы с большими номерами – более низкими.

Вообще говоря, неограниченные координаты следовало бы также разделить на два типа. Дело в том, что существуют системы, у которых значения некоторых координат решения в конечный момент времени стремятся к бесконечности. Это приводит к тому, что решения будут определены лишь на конечном промежутке времени. При этом могут возникать неожиданные эффекты. Исследованию таких эффектов и анализу устойчивости систем с конечным интервалом существования решений посвящена работа [6]. В данной статье мы ограничимся лишь случаем, когда все решения являются неограниченно продолжаемыми.

2. Постановка задач. В рамках координатного подхода ставится следующая основная задача [5].

Задача 1. Разделить координаты фазового вектора x системы (1) на четыре группы: асимптотически устойчивые, неасимптотически устойчивые, ограниченно неустойчивые и неограниченно неустойчивые переменные.

Конфигурацией системы (1) в переменных x назовем четверку неотрицательных целых чисел $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, где k_i – количество переменных класса i среди координат вектора x . Иными словами, система (1) в переменных x имеет конфигурацию k , если среди координат вектора x будет ровно k_1 асимптотически устойчивых, k_2 неасимптотически устойчивых, k_3 ограниченно неустойчивых и k_4 неограниченно неустойчивых переменных. Очевидно, что сумма всех значений k_i в конфигурации должна равняться n (размерности фазового пространства).

Задачу 1 тогда можно переформулировать как задачу об определении конфигурации системы в исходных переменных. Ее решение осуществляется с помощью теории частичной устойчивости. При этом для первоначального анализа и формирования предположений о характере поведения переменных задачи могут применяться методы инвариантных многообразий [7] и дополнительных функций [8].

Вторая задача заключается в преобразовании с помощью замены переменных исходного фазового вектора x с целью получения определенных свойств координат системы в новых переменных.

Задача 2. Для заданной четверки целых неотрицательных чисел $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, сумма которых равняется n , найти такую допустимую замену переменных $y = g(x, t)$, что четверка k будет конфигурацией системы (1) в переменных y .

В постановке задачи указывается, что замена переменных должна быть допустимой, однако не конкретизируется, какие замены считаются допустимыми. В зависимости от выбора классов допустимых замен, конечно же, будет зависеть и разрешимость этой задачи. Перечислим ряд условий, которые могут накладываться на функцию g .

1. Функция $g(x, t)$ определена всюду на множестве $X \times [0, +\infty)$.
2. Функция $g(x, t)$ непрерывно дифференцируема в области определения.
3. $g(0, t) = 0$ для всех $t \in [0, +\infty)$.
4. Функция $g(x, t)$ должна быть обратимой на области определения.
5. Функция $g(x, t)$ мажорируется некоторой непрерывной скалярной положительной функцией $\bar{g}(x)$, т. е. $\|g(x, t)\| \leq \bar{g}(x)$.

Замечание 1. При рассмотрении автономных систем (2), как правило, требуется, чтобы преобразование между старыми и новыми координатами не зависело явно от времени, т. е. $y = g(x)$. Требование 5 в таком случае будет всегда выполнено автоматически.

Задача 2 может иметь решение не при всех возможных конфигурациях k . Поэтому важное значение имеет задача об оптимальной достижимой конфигурации переменных.

Задача 3. Среди всех конфигураций $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, для которых задача 2 имеет решение, необходимо найти лексикографически максимальную.

3. Получение переменных с заданными свойствами. Пусть для системы (1) уже решена задача 1 и тем самым определена конфигурация k для исходных переменных x . Рассмотрим возможности получения других конфигураций.

Утверждение 1. Если некоторая переменная x_1 относится к классу c_1 , а переменная x_2 — к классу c_2 , причем $c_1 < c_2$, то переменная $y_1 = x_1 + x_2$ будет относиться к классу c_2 .

Доказательство этого утверждения проводится отдельно для каждого значения c_2 и следует из определений соответствующих классов устойчивых и неустойчивых переменных.

В соответствии с этим утверждением, если у системы (1) есть переменная x_i некоторого класса, то всегда возможно понизить до ее класса любые переменные x_j более высокого класса с помощью замены $y_j = x_j + x_i$, $y_l = x_l$ для всех $l \neq j$.

Для преобразования неустойчивых переменных из неограниченных в ограниченные и наоборот используется следующее утверждение.

Утверждение 2. Если некоторая переменная x_1 является неограниченно неустойчивой, то переменная $y_1 = \arctg x_1$ будет ограничено неустойчивой. Для автономной системы (2) ограничено неустойчивую переменную x_2 можно преобразовать в неограниченно неустойчивую заменой

$y_2 = \operatorname{tg}(\pi x_2/(2D))$, где D – ограничение сверху на норму решений, начинающихся в окрестности радиуса δ , существующее в соответствии с определением 1.

Из этого утверждения следует, что без введения каких-то дополнительных требований на функцию g , определяющую замену переменных, ограниченно и неограниченно неустойчивые переменные становятся неразличимыми.

Для остальных классов переменных переход из одного класса в другой одномерным преобразованием невозможен. Более того, невозможно понизить класс переменной до заданного, если нет переменных требуемого или более низкого класса.

Утверждение 3. Если все исходные переменные x_i являются асимптотически устойчивыми (конфигурация $(n, 0, 0, 0)$), то после любой замены переменных, удовлетворяющей требованиям 1–5, все новые переменные y_i будут также асимптотически устойчивыми. Если все исходные переменные x_i являются либо асимптотически устойчивыми, либо неасимптотически устойчивыми (конфигурация $(k_1, n - k_1, 0, 0)$), то новые переменные y_i будут также либо асимптотически устойчивыми, либо неасимптотически устойчивыми (конфигурация $(k'_1, n - k'_1, 0, 0)$).

Итак, понижение класса переменных, т.е. ухудшение их свойств устойчивости, в большинстве случаев не представляет особой проблемы. Более сложным является повышение класса переменной, что и требуется для решения задачи 3. Этого можно добиться либо за счет удачного комбинирования переменных одного класса, либо отказавшись от некоторых требований на функцию g , определяющую замену переменных.

Утверждение 4. Если некоторая переменная x_1 относится к классу $c_1 \in [1; 3]$, а переменная x_2 – к классу $c_2 \in [1; 3]$, то переменная $y_1 = x_1 x_2$ будет относиться к классу $\min\{c_1, c_2\}$.

В данном случае замена $y_1 = x_1 x_2$, $y_2 = x_2$ перестает удовлетворять требованию обратимости из-за того, что точки $(0, 0)$ и $(\varepsilon, 0)$ будут иметь один и тот же образ.

4. Пример. Рассмотрим следующую неавтономную систему

$$\dot{x}_1 = (1 + t)x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + tx_2, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + (2t - 1)(x_1 - x_2 - x_3). \quad (4)$$

Общее решение этой системы может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[c_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{erf} \frac{t-2}{\sqrt{2}} + \operatorname{erf} \sqrt{2} \right) + c_2 \right] e^{t^2/2+t} + c_1 e^{-t}, \\ x_2 &= \left[c_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{erf} \frac{t-2}{\sqrt{2}} + \operatorname{erf} \sqrt{2} \right) + c_2 \right] e^{t^2/2+t}, \\ x_3 &= c_1 e^{-t} + c_3 e^{-t^2}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ – стандартная функция ошибок, монотонная и ограниченная на всей числовой оси.

По показателям экспонент легко установить характер поведения каждой из координат при $t \rightarrow +\infty$, что в данном случае полностью определяет их класс. Переменные x_1 и x_2 являются неограниченно неустойчивыми, а переменная x_3 – асимптотически устойчивой, что соответствует конфигурации $(1, 0, 0, 2)$.

Утверждение 1 позволяет нам понизить класс третьей координаты. В переменных $x_1, x_2, x_1 + x_3$ система (4) будет иметь конфигурацию $(0, 0, 0, 3)$.

Более содержательным является вопрос об улучшении конфигурации. Выделить еще одну асимптотически устойчивую координату можно с помощью обратимой замены

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

Уравнение на переменную y_1 будет иметь вид $\dot{y}_1 = -y_1$. Соответственно она будет асимптотически устойчивой, и в координатах y система (4) будет иметь конфигурацию $(2, 0, 0, 1)$.

С помощью замены $z_2 = \operatorname{arctg} y_2$, в соответствии с утверждением 2, можно привести систему к конфигурации $(2, 0, 1, 0)$. В силу утверждения 3 дальнейшее улучшение конфигурации с помощью обратимых замен невозможно.

Интересный эффект возникает при попытке перейти уже с помощью необратимого преобразования от переменных y к конфигурации со всеми асимптотически устойчивыми переменными. В работе [2] для этого использовались замены вида $w_i = y_i^l y_j^m$, где m и l – некоторые натуральные числа. В данном примере воспользоваться такой заменой сразу не удастся, поскольку в нашем распоряжении есть две асимптотически устойчивые переменные y_1 и y_3 и выражения их в виде функций времени имеют главный член порядка e^{-t} при $t \rightarrow \infty$, в то время, как неустойчивая переменная y_2 имеет порядок роста $e^{t^2/2+t}$. Никакие положительные показатели степени m и l не позволят нам погасить рост экспоненты с квадратичным показателем, т.е. переменная w_i при любых m и l будет неограниченно неустойчивой.

Есть два возможных пути решения этой проблемы. Первый из них заключается в том, что сначала нужно превратить неограниченно неустойчивую координату y_2 в ограниченно неустойчивую z_2 , а уже затем сделать ее, в силу утверждения 4, асимптотически устойчивой с помощью замены $w_2 = z_2 y_1$. Второй путь предполагает получение переменной с более высокой скоростью сходимости к нулю. В данном случае в качестве такой переменной может быть взята $u_3 = y_3 - y_1$. Соответствующее уравнение для этой переменной будет иметь вид $\dot{u}_3 = -2tu_3$, что обеспечивает скорость сходимости порядка e^{-t^2} по u_3 . Теперь уже можно будет воспользоваться привычной заменой в форме произведения. Окончательно получаем, что в переменных

$$w_1 = x_1 - x_2, \quad w_2 = x_2(x_3 - x_1 + x_2), \quad w_3 = x_3 - x_1 + x_2$$

все координаты асимптотически устойчивы. То есть нулевое решение $w = 0$ системы (4) в координатах w асимптотически устойчиво.

Заключение. В статье были сформулированы основные задачи координатного подхода в теории устойчивости для неавтономных систем дифференциальных уравнений, введены понятия класса переменной и конфигурации системы в заданных координатах. Был определен класс допустимых замен переменных и сформулирован ряд общих утверждений о возможностях перехода от одной конфигурации к другой. Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть связаны с получением условий возможности выделения переменных требуемого класса с помощью функций Ляпунова и дополнительных функций, а также с учетом эффектов, которые возникают при рассмотрении непродолжаемых решений.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Рассуждение А. Ляпунова. – Харьков: Типография Зильберберга, 1892. – 251 с.
2. *Ковалев А.М.* Координатная устойчивость динамических систем // *Механика твердого тела.* – 2015. – Вып. 45. – С. 3–10.
3. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // *Математический сборник.* – 1893. – **XVII**, вып. 2. – С. 253–333.
4. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // *Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика.* – 1957. – № 4. – С. 9–16.
5. *Ковалев А.М.* Динамика автономных систем при наличии неустойчивых переменных // *Механика твердого тела.* – 2012. – Вып. 42. – С. 3–13.
6. *Неспирный В.Н.* Продолжимость решений в задачах устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Механика твердого тела.* – 2014. – Вып. 44. – С. 67–74.
7. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // *Механика твердого тела* – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
8. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Использование дополнительных функций для исследования устойчивости и неустойчивости неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Механика твердого тела.* – 2017. – Вып. 47. – С. 78–86.

A.M. Kovalev, V.N. Nesporny

Classification and extraction of variables by the stability property in autonomous systems of ordinary differential equations

The notion of coordinate stability underlying the coordinate approach is generalized to the case of non-autonomous systems of ordinary differential equations. An extended classification of variables with respect to the stability property is proposed. This classification consists of four classes. The three most important problems of the coordinate approach are formulated. General statements applicable for arbitrary systems are developed for constructing variables of required class. And also some particular approaches applicable in specific cases are proposed. The usage of these techniques is demonstrated on the example of nonautonomous systems.

Keywords: *nonautonomous system, Lyapunov stability, coordinate approach.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
kovalev@iamm.su, vetal_n@mail.ru

Получено 12.09.19